

圆锥曲线基础知识与典型例题

第一部分：椭圆

1、知识关系网

2、基础知识点

(1).椭圆的定义：平面内到两个定点 F_1 、 F_2 的距离之和等于定值 $2a(2a > |F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做椭圆,这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点的距离叫做椭圆的焦距.

(2).椭圆的标准方程和其几何性质(如下表所示)

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$
图形		
顶点	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(0, \pm a), (\pm b, 0)$
对称轴	x 轴, y 轴, 长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$	
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦距	焦距为 $ F_1F_2 = 2c (c > 0), c^2 = a^2 - b^2$	
离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (0 < e < 1) e$ 越大椭圆越扁	

第二部分：双曲线

1、知识网络

2、基本知识点

(1)双曲线的定义：平面内到两个定点 F_1 、 F_2 的距离之差的绝对值等于定值 $2a(0 < 2a < |F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做双曲线,这两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点的距离叫做双曲线的焦距.

(2)双曲线的标准方程和其几何性质(如下表所示)

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图形		
顶点	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
对称轴	x 轴, y 轴, 实轴长为 $2a$, 虚轴长为 $2b$	
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦距	焦距为 $ F_1F_2 = 2c (c > 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$	
离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (e > 1) e$ 越大双曲线开口越大	

第三部分：抛物线

1、知识网络

2、基本知识点

(1)抛物线的定义: 平面内到定点 F 和定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线(点 F 不在 l 上).定点 F 叫做抛物线的焦点, 定直线 l 叫做抛物线的准线.

(2)抛物线的标准方程和其几何性质(如下表所示)

标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
图形				
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
焦点	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$F(0, \frac{p}{2})$	$F(0, -\frac{p}{2})$
顶点	原点 $(0, 0)$			
准线	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
离心率	$e = 1$			

第四部分：圆锥曲线综合问题

1.直线与圆锥曲线的位置关系

(1)直线与圆锥曲线的位置关系和判定

直线与圆锥曲线的位置关系有三种情况：相交、相切、相离.

方法：直线方程是二元一次方程，圆锥曲线方程是二元二次方程，由它们组成的方程组，经过消元得到一个一元二次方程，直线和圆锥曲线相交、相切、相离的充分必要条件分别是 $\Delta > 0$ 、 $\Delta = 0$ 、 $\Delta < 0$.

注：直线方程与双曲线方程、抛物线方程联立消元后注意二次项系数为零的情况讨论.

(2)直线与圆锥曲线相交所得的弦长

①当直线存在斜率 k 时，直线与圆锥曲线的两个交点坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

则它的弦长 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

②当直线斜率不存在时，则 $|AB| = |y_1 - y_2|$.

(3)椭圆、双曲线的通径： $\frac{2b^2}{a}$ (过焦点且垂直于焦点所在对称

轴的弦)

椭圆焦点三角形面积公式： $S_{\Delta F_1PF_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}$ (点 P 是椭圆上的点)

双曲线焦点三角形面积公式： $S_{\Delta F_1PF_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}}$ (点 P 是双曲线上的点)

(4)抛物线相关结论：

抛物线中有一些常见、常用的结论，了解这些结论后在做选择题、填空题时可迅速解答相关问题，在做解答题时也可迅速打开思路。(自己可以尝试证明这些结论)

若 AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点弦，且 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，则有如下结论：

① $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$ ， $y_1y_2=-p^2$ ② $|AF|=\frac{P}{1-\cos\alpha}$ ， $|BF|=\frac{P}{1+\cos\alpha}$ (α 为 AB 所在直线倾斜角) ③ $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$ ④ $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{P}$ ⑤

$$S_{\Delta AOB} = \frac{P^2}{2\sin\alpha}$$

⑥相切： a .以抛物线焦点弦为直径的圆与准线相切；

b .

过抛物线焦点弦的两端点向准线作垂线，以两垂足为直径端点的圆与焦点弦相切；

c.以 AF 或 BF 为直径端点的圆与轴相切.

2.圆锥曲线问题求解策略:

1.一要重视定义，这是学好圆锥曲线最重要的思想方法，二要数形结合，既熟练掌握方程组理论，又关注图形的几何性质，以简化运算。2.当涉和到弦的中点时，通常有两种处理方法：一是韦达定理；二是点差法。3.圆锥曲线中参数取值范围问题通常从两个途径思考:一是建立函数，用求值域的方法求范围；二是建立不等式，通过解不等式求范围。

第五部分：圆锥曲线考点、题型、方法

题型一：定义的应用

(1) 寻找符合条件的等量关系 (2) 等价转换，数形结合

典型例题

例 1、动圆 M 与圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=36$ 内切,与圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=4$ 外切，求圆心 M 的轨迹方程.

例 2、方程 $\sqrt{(x-6)^2+y^2}-\sqrt{(x+6)^2+y^2}=8$ 表示的曲线是

例 3、 F_1, F_2 是定点， $|F_1F_2|=6$ ，动点 M 满足 $|MF_1|+|MF_2|=6$ ，则 M 点的轨迹是()

(A)椭圆(B)直线(C)圆 (D)线段

例 4、抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为 1，则点 M 的纵坐标是()

(A) $\frac{17}{16}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D)0

例 5、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{25}=1 (a>5)$ 的两个焦点为 F_1 、 F_2 ，且 $|F_1F_2|=8$ ，弦 AB 过点 F_1 ，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 ()

(A) 10 (B) 20 (C) $2\sqrt{41}$ (D) $4\sqrt{41}$

例 6、椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点 F_1 、 F_2 ， P 为椭圆上的一点， $PF_1 \perp PF_2$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 () (A) 9 (B) 12 (C) 10 (D) 8

例 7、双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 右支上一点 P 到右焦点的距离为 2，则 P 点到左焦点的距离为 () (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

例 8、抛物线 $y^2=12x$ 上的一点 M 到焦点的距离为 9，则点 M

的坐标是

题型二：圆锥曲线标准方程

特别关注：焦点位置的正确判断（首先化成标准方程，然后再判断，先定位后定量计算）

方法要求：熟练掌握待定系数法求圆锥曲线的标准方程.

- 1、椭圆：由 x^2 、 y^2 分母的大小决定，焦点在分母大的坐标轴上；
- 2、双曲线：由 x^2 、 y^2 项的系数的正负决定，焦点在系数为正的坐标轴上；
- 3、抛物线：焦点在一次项的坐标轴上，一次项的符号正、负决定开口方向。

典型例题

例 9、若方程 $\frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{2-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围是

例 10、当 k 为何值时，方程 $\frac{x^2}{9-k} - \frac{y^2}{5-k} = 1$ 的曲线：

(1)是椭圆；

(2)是双曲线.

例 11、求满足下列条件的椭圆的标准方程

(1) 焦点坐标为 $(\pm 2, 0)$ ，经过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

(2) 焦点在 y 轴上， $a=4, b=1$

(3) $a+b=10$ ， $c=2\sqrt{5}$

例 12、求满足下列条件的双曲线的标准方程

(1) 焦点坐标为 $(0, \pm 6)$ ，经过点 $(2, -5)$

(2) 焦点在 x 轴上， $a=4, b=3$

(3) $a=2\sqrt{5}$ ， $c=6$

例 13、求满足下列条件的抛物线的标准方程

(1) 焦点坐标为 $(0, 3)$

(2) 准线为 $x=-\frac{1}{4}$

(3) 焦点到准线距离是 2

例 14、若双曲线经过点 $P(3, 0)$ ， $a=2b$ ，则双曲线的标准方程为.

例 15、双曲线离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

有公共焦点，则双曲线的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

例 16、过点(2,-2)且与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 有相同渐近线的双曲线方程是()

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$

例 17、抛物线的对称轴为 x 轴，顶点在原点，焦点在直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 上，则此抛物线的方程为

题型三：圆锥曲线性质

1、特别关注：几何性质与图像相结合（首先化成标准方程，先定位、再定量计算）：

2、圆锥曲线中离心率，渐近线的求法：

(1) a, b, c 三者知道任意两个或三个的相等关系式，可求离心率，渐近线的值；

(2) a, b, c 三者知道任意两个或三个的不等关系式，可求离心率，渐近线的最值或范围；

(3)注重数形结合思想不等式解法

(4)双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程可以看作是由双曲线方程右

边“1”变为“0”直接得到 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ，即 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$

双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ ，即 $\frac{y^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm \frac{a}{b}x$

(5)与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 具有相同渐近线的双曲线方程可以设为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda \neq 0),$$

与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 具有相同渐近线的双曲线方程可以设为

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \lambda (\lambda \neq 0), \text{ 再由另外一个条件可求得 } \lambda \text{ 的值.}$$

(6)等轴双曲线(实轴长等于虚轴长 $2a=2b$) $\Leftrightarrow$ 离心率 $e = \sqrt{2} \Leftrightarrow$ 渐

近线方程 $y = \pm x$

方程可以设为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$ ，根据另外已知条件可以确定 λ 的值.

3、典型例题

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/698020016047006133>