

6.2.3 向量的数乘运算

【考点梳理】

考点一 向量数乘的定义

实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\mathbf{a}$ ，其长度与方向规定如下：

$$(1)|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|.$$

$$(2)\lambda\mathbf{a} (\mathbf{a}\neq\mathbf{0}) \text{ 的方向 } \begin{cases} \text{当}\lambda\geq 0\text{时, 与}\mathbf{a}\text{的方向相同;} \\ \text{当}\lambda< 0\text{时, 与}\mathbf{a}\text{的方向相反.} \end{cases}$$

特别地，当 $\lambda=0$ 时， $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}$ ，当 $\lambda=-1$ 时， $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$ 。

考点二 向量数乘的运算律

$$1.(1)\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}.$$

$$(2)(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}.$$

$$(3)\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}.$$

特别地， $(-\lambda)\mathbf{a}=-\lambda\mathbf{a}=\lambda(-\mathbf{a})$ ， $\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}$ 。

2.向量的线性运算

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算，对于任意向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ ，以及任意实数 λ ， μ_1 ， μ_2 ，恒有 $\lambda(\mu_1\mathbf{a}\pm\mu_2\mathbf{b})=\lambda\mu_1\mathbf{a}\pm\lambda\mu_2\mathbf{b}$ 。

考点三 向量共线定理

向量 $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$) 与 $\mathbf{b}$ 共线的充要条件是：存在唯一一个实数 λ ，使 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$ 。

【题型归纳】

题型一：向量的线性运算

1. (2021·山东邹城·高一期中) 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 实数 m , n ($m \neq 0$, $n \neq 0$), 则下列关于向量的运算错误的是 ()

A. $m(\vec{a}-\vec{b})=m\vec{a}-m\vec{b}$

B. $(m-n)\vec{a}=m\vec{a}-n\vec{a}$

C. 若 $m\vec{a}=\vec{0}$, 则 $\vec{a}=\vec{0}$

D. 若 $m\vec{a}=n\vec{a}$, 则 $m=n$

2. (2021·全国·高一课前预习) 若 $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 化简 $3(\vec{a}+2\vec{b})-2(3\vec{b}+\vec{c})-2(\vec{a}+\vec{b})$ 的结果为 ()

A. $-\vec{a}$

B. $-4\vec{b}$

C. $\vec{c}$

D. $\vec{a}-\vec{b}$

3. (2021·四川省蒲江县蒲江中学高一阶段练习) 已知 m, n 是实数, $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量, 则下列命题中正确的为 ()

① $m(\vec{a}-\vec{b})=m\vec{a}-m\vec{b}$; ② $(m-n)\vec{a}=m\vec{a}-n\vec{a}$;

③ 若 $m\vec{a}=m\vec{b}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$; ④ 若 $m\vec{a}=n\vec{a}$, 则 $m=n$.

A. ①④

B. ①②

C. ①③

D. ③④

题型二：平面向量的混合运算

4. (2021·全国·高一课时练习) 若 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $(\vec{OB}-\vec{OC})\cdot(\vec{OB}+\vec{OC}-2\vec{OA})=0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 正三角形

D. 等腰直角三角形

5. (2021·福建福州·高一期中) 在五边形 $ABCDE$ 中 $\vec{EB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, M, N 分别为 AE, BD 的中点, 则 $\vec{MN}=()$

A. $\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

B. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

D. $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

6. (2020·全国·高一课时练习) 在 $\triangle ABC$ 中, P, Q 分别是边 AB, BC 上的点, 且 $AP=\frac{1}{3}AB, BQ=\frac{1}{3}BC$. 若 $\vec{AB}=\vec{a}$,

$\vec{AC}=\vec{b}$, 则 $\vec{PQ}=()$

A. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

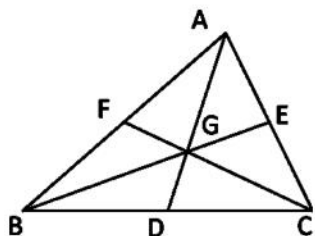
B. $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

C. $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

D. $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

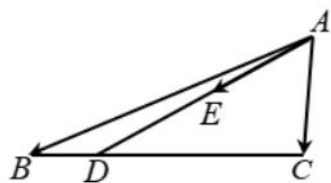
题型三：向量的线性运算的几何应用

7. (2021·四川·宁南中学高一阶段练习(文)) 如图, $\triangle ABC$ 中, AD, BE, CF 分别是 BC, CA, AB 上的中线, 它们交于点 G , 则下列各等式中不正确的是 ()



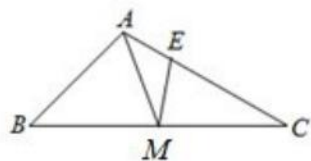
- A. $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$ B. $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$;
 C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{FG}$

8. (2021·四川资阳·高一期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为线段 BC 上一点, $CD=2DB$, E 为 AD 的中点. 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

9. (2021·内蒙古·林西县第一中学高一期中(文)) 已知点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, 点 E 在边 AC 上, 且 $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AE}$, 则向量 $\overrightarrow{EM} =$ ()



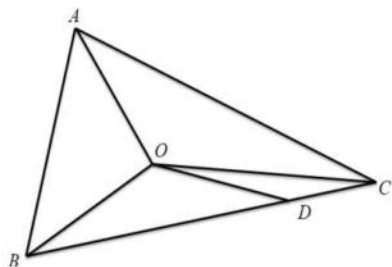
- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

题型四：三角形的心的向量表示

10. (2021·陕西渭南·高一期末) 已知 O 为三角形 ABC 所在平面内一点, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $S_{\triangle OBC} : S_{\triangle ABC} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

11. (2021·山东师范大学附中高一期中) 如图, O 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, D 是边 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{DC}$, 则 ()



A. $\overrightarrow{OD} = -\frac{2}{15}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b}$

B. $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{15}\vec{a} - \frac{7}{15}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{OD} = -\frac{2}{15}\vec{a} - \frac{7}{15}\vec{b}$

D. $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{15}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b}$

12. (2021·全国·高一课时练习) 已知点 O 、 N 、 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则点 O 、 N 、 P 依次是 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 重心、外心、垂心

B. 重心、外心、内心

C. 外心、重心、垂心

D. 外心、重心、内心

【双基达标】

一、单选题

13. (2021·全国·高一课时练习) 下列运算正确的个数是 ()

① $(-3) \cdot 2\vec{a} = -6\vec{a}$; ② $2(\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{b} - \vec{a}) = 3\vec{a}$;

③ $(\vec{a} + 2\vec{b}) - (2\vec{b} + \vec{a}) = \vec{0}$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

14. (2021·全国·高一课时练习) 已知 O 是平面上的一定点, A , B , C 是平面上不共线的三个动点, 若动点 P 满足

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\lambda \in (0, +\infty)$, 则点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 内心

B. 外心

C. 重心

D. 垂心

15. (2021·全国·高一课时练习) 若 $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, 则下列各式中不正确的是 ().

A. $\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

16. (2021·上海·高一课时练习) 已知平面上不共线的四点 O, A, B, C , 若 $\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ 等于 ()

A. $\frac{1}{3}$

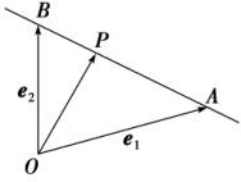
B. $\frac{1}{2}$

C. 3

D. 2

17. (2021·全国·高一课时练习) 设向量 $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$, 若 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 不共线, 且点 P 在线段 AB 上, $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PB}| = 2$,

则 $\overrightarrow{OP} =$ ()



- A. $\frac{1}{3}\vec{e_1} - \frac{2}{3}\vec{e_2}$ B. $\frac{2}{3}\vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_2}$ C. $\frac{1}{3}\vec{e_1} + \frac{2}{3}\vec{e_2}$ D. $\frac{2}{3}\vec{e_1} - \frac{1}{3}\vec{e_2}$

18. (2021·安徽·定远县育才学校高一阶段练习(文)) 下列叙述不正确的是 ()

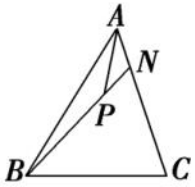
A. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线, 则存在唯一的实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

B. $\vec{b} = 3\vec{a}$ ($\vec{a}$ 为非零向量), 则 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线

C. 若 $\vec{m} = 3\vec{a} + 4\vec{b}, \vec{n} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$, 则 $\frac{\vec{m}}{\vec{n}}$

D. 若 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

19. (2021·福建浦城·高一阶段练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AN} = \frac{2}{3}\overline{NC}$, P 是 BN 上一点, 若 $\overline{AP} = t\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$, 则实数 t 的值为 ().



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

20. (2021·云南隆阳·高一期中) 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 AB, AD 上, 连接 EF 交 AC 于点 M , 且满足 $\overline{BE} = 4\overline{EA}$, $\overline{AF} = 3\overline{FD}$, $\overline{AM} = 2\lambda\overline{AB} - 3\mu\overline{AC}$, 则 $5\lambda - \frac{19}{2}\mu =$ ()

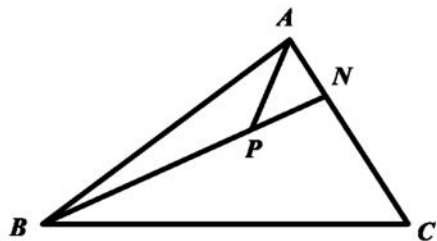
- A. -3 B. 1 C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

21. (2021·河南郑州·高一期末) 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 上有一点 D 满足 $\vec{BD} = -2\vec{DC}$, 则 $\vec{AD}$ 可表示为 ()

- A. $\vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$ B. $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
C. $\vec{AD} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ D. $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

22. (2021·江西宜春·高一期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\overline{AP} = \left(m + \frac{2}{9}\right)\overline{AB} + \frac{2}{9}\overline{BC}$,

则实数 m 的值为 ()



- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3

【高分突破】

一：单选题

23. (2021·全国·高一专题练习) 已知点 O, N 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, 则点 O, N 依次是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 外心 B. 重心 内心 C. 外心 重心 D. 外心 内心

24. (2021·湖南·常德市第二中学高一期末) 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 E 在中线 CD 上, 且 $CE = 6ED$, 则 $\overrightarrow{AE} =$ ()

- A. $\frac{1}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ B. $\frac{13}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ C. $\frac{3}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$ D. $\frac{3}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{13}{7}\overrightarrow{AB}$

25. (2021·全国·高一课时练习) 下列算式中, 正确的个数为 ()

① $(-7) \times 6\vec{a} = -42\vec{a}$; ② $\vec{a} - 2\vec{b} + (2\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}$; ③ $\vec{a} + \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

26. (2021·江苏省梅村高级中学高一阶段练习) 在 $\triangle ABC$ 中, E 为 AB 边的中点, D 为 AC 边上的点, BD, CE 交于点 F . 若 $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{AC}{AD}$ 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

27. (2021·全国·高一课时练习) 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是非零向量. 下列四个条件中, 使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的条件是 ()

- A. $\vec{a} = -\vec{b}$ B. $\frac{1}{a} // \frac{1}{b}$
C. $\vec{a} = 2\vec{b}$ D. $\frac{1}{a} // \frac{1}{b}$ 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

28. (2020·全国·高一) 点 M, N, P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 满足 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $|\overrightarrow{NA}| = |\overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{NC}|$, 且

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则 M, N, P 依次是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心, 外心, 内心 B. 重心, 外心, 垂心
C. 外心, 重心, 内心 D. 外心, 重心, 垂心

二、多选题

29. (2021·全国·高一课时练习) (多选) 已知 $4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. A, B, C, D 四点共线
B. C, B, D 三点共线
C. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}|$
D. $|\overrightarrow{BC}| = 3|\overrightarrow{DB}|$

30. (2021·浙江·嘉兴市第五高级中学高一阶段练习) 下列说法错误的是 ()

- A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$
B. 若 $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $S_{\triangle AOC}$, $S_{\triangle ABC}$ 分别表示 $\triangle AOC$, $\triangle ABC$ 的面积, 则 $S_{\triangle AOC} : S_{\triangle ABC} = 1:6$
C. 两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线且反向
D. 若向量 $\vec{a} \neq \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 一定不是共线向量

31. (2021·河北承德第一中学高一阶段练习) 对于非零向量 $\vec{a}$, 下列说法正确的是 ()

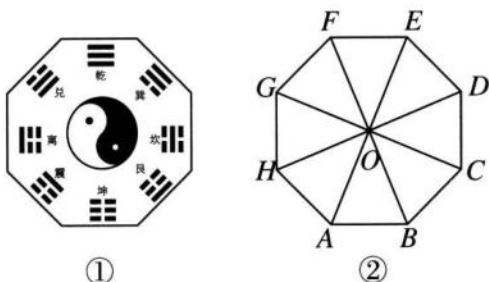
- A. $2\vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 2 倍, 且 $2\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同
B. $-\frac{\vec{a}}{3}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 $\frac{1}{3}$, 且 $-\frac{\vec{a}}{3}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反
C. 若 $\lambda = 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 等于零
D. 若 $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, 则 $\lambda\vec{a}$ 是与 $\vec{a}$ 同向的单位向量

32. (2021·湖南·高一期末) 已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G , 过 G 点的直线与边 AB, AC 的交点分别为 M, N , 若 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$,

且 $\triangle AMN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{9}{20}$, 则 λ 的可能取值为 ()

- A. $\frac{4}{3}$
B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{3}$
D. 3

33. (2021·福建三明·高一期中) 八卦是中国文化中的基本哲学概念, 如图①是八卦模型图, 其平面图形记为图②中的正八边形 $ABCDEFGH$, 其中 $OA = 1$, 则下列结论中正确的是 ()



A. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$

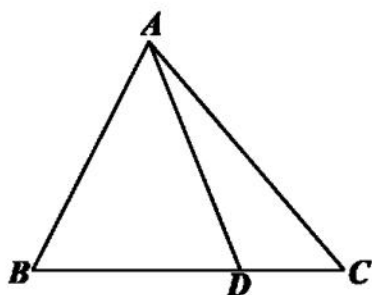
D. $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

三、填空题

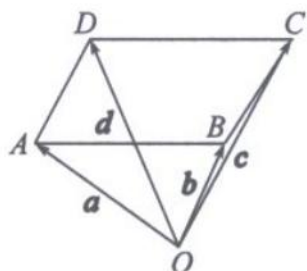
34. (2021·全国·高一课时练习) 已知 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 的中点, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$. 给出下列五个命题: ① $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$; ② $\overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; ③ $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; ④ $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; ⑤ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. 其中正确的命题是_____. (填序号)

35. (2021·全国·高一课时练习) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{AF}$, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

36. (2021·上海大学附属南翔高级中学高一阶段练习) 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 且 $BD = 2DC$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AD}$ 等于_____ (结果用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示)



37. (2021·全国·高一课时练习) 设平面内四边形 $ABCD$ 及任一点 O , $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$. 若 $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{d}|$. 则四边形 $ABCD$ 的形状是_____.



四、解答题

38. (2021·全国·高一课时练习) 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$, 其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 是不共线的向量, 试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

39. (2021·全国·高一课时练习) 计算:

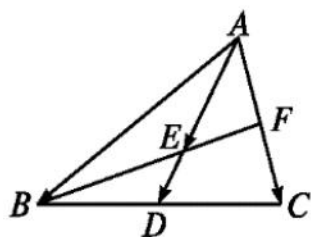
$$(1) 3(5\vec{a}-3\vec{b})-2(6\vec{a}+\vec{b});$$

$$(2) 4(\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c})-2(-3\vec{a}-6\vec{b}+8\vec{c}).$$

40. (2021·全国·高一课时练习) (1) 已知 $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}$, 求 $\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)+(2\vec{b}-\vec{a})$.

(2) 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 且 $5\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$, $3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$, 求 $\vec{x}, \vec{y}$.

41. (2021·全国·高一课时练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, F 分别是 BC, AC 的中点, $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

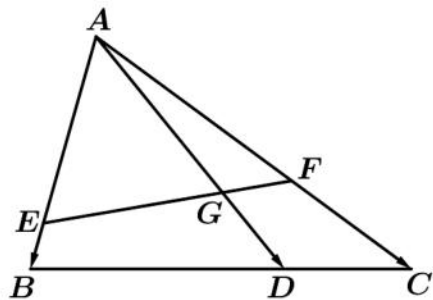


(1) 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$;

(2) 求证: B, E, F 三点共线.

42. (2021·全国·高一课时练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上一点, G 是线段 AD 上一点, 且 $\frac{AG}{DG}=\frac{BD}{CD}=2$,

过点 G 作直线与 AB, AC 分别交于点 E, F .



(1) 用向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$.

(2) 试问 $\frac{AB}{AE}+\frac{2AC}{AF}$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【答案详解】

1. D

【分析】

根据向量数乘运算判断 AB 选项的正确性, 通过 m 的特殊情况判断 C 选项的正确性, 根据向量运算判断 D 选项的正确性.

【详解】

由题意, 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 实数 m , n ($m \neq 0$, $n \neq 0$),

由向量的运算律可得, $m(\vec{a} - \vec{b}) = m\vec{a} - m\vec{b}$, 故选项 A 正确;

由向量的运算律可得, $(m-n)\vec{a} = m\vec{a} - n\vec{a}$, 故选项 B 正确;

若 $m\vec{a} = \vec{0}$, 因为 $m \neq 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$, 故选项 C 正确;

当 $\vec{a} = \vec{0}$ 时, $m\vec{a} = n\vec{a}$, 此时 m 和 n 不一定相等, 故选项 D 错误.

故选: D.

2. A

【分析】

根据已知条件结合 $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, 利用向量的线性运算即可求解.

【详解】

$$\begin{aligned} & 3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(3\vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= 3\vec{a} + 6\vec{b} - 6\vec{b} - 2\vec{c} - 2\vec{a} - 2\vec{b} \\ &= \vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{b} - 2\vec{c} = -(\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a}, \end{aligned}$$

故选: A.

3. B

【分析】

①②结合平面向量的数乘运算即可判断, ③④举出反例即可说明.

【详解】

对于①: 根据数乘向量的法则可得: $m(\vec{a} - \vec{b}) = m\vec{a} - m\vec{b}$, 故①正确;

对于②: 根据数乘向量的法则可得: $(m-n)\vec{a} = m\vec{a} - n\vec{a}$, 故②正确;

对于③: 由 $m\vec{a} = m\vec{b}$ 可得 $m(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$, 当 $m=0$ 时也成立, 所以不能推出 $\vec{a} = \vec{b}$, 故③错误;

对于④: 由 $m\vec{a} = n\vec{a}$ 可得 $(m-n)\vec{a} = \vec{0}$, 当 $\vec{a} = \vec{0}$, 命题也成立, 所以不能推出 $m=n$. 故④错误;

故选: B

4. A

【分析】

利用向量运算化简已知条件, 由此确定正确选项.

【详解】

依题意 $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$,

$$\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0,$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 0,$$

所以 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow c = b$, 所以三角形 ABC 是等腰三角形.

故选: A

5. C

【分析】

由向量的加法运算得到 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, 进而利用中点的条件, 转化为向量的关系, 化简整理即得.

【详解】

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b,$$

故选: C

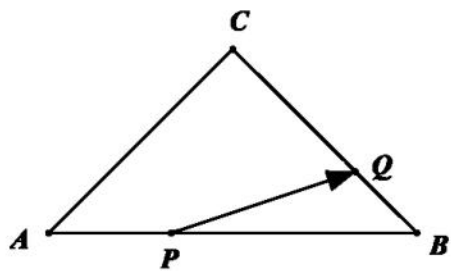
6. A

【分析】

由已知得到 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. 利用 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$, 得到 $\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, 利用 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$ 及 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 和平面向量的线性运算法则运算即得.

【详解】

由已知可得 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查平面向量的线性运算,是基础题,只要熟练掌握平面向量的加减数乘运算法则,并注意将有关向量转化为基底向量表示,即可得解.

7. B

【分析】

利用向量运算对选项进行分析,由此确定正确选项.

【详解】

依题意 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 、 CF 分别是 BC 、 CA 、 AB 上的中线,

所以 G 是三角形 ABC 的重心.

所以 $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$, A 选项正确.

$\overrightarrow{DG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, B 选项错误.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, C 选项正确.

$\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{FG}$, D 选项正确.

故选: B

8. C

【分析】

根据平面图形的性质以及平面向量的基本定理和线性运算,对应系数相等即可求出 λ , μ 的值,进而求出结果.

【详解】

因为 D 为线段 BC 上一点, $CD = 2DB$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 且 E 为 AD 的中点, 所以

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, 又因为 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 因此 $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{6}$, 所以 $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$,

故选: C.

9. B

【分析】

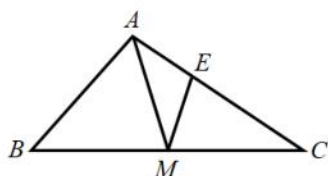
根据向量的加法运算可得 $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM}$ 和减法运算可得 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ，结合条件，可得答案.

【详解】

$$\text{由 } \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AE}, \text{ 则 } \overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{则 } \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

故选：B

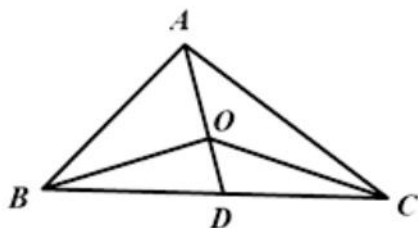


10. B

【分析】

题目考察三角形四心的问题，易得：O为三角形的重心，位于中线的三等分点处，从而求出三角形面积的比例关系

【详解】



如图所示，由 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 得：O为三角形ABC的重心，是中线的交点，

且 $AO = \frac{2}{3}AD$ ，所以， $h_{\triangle OBC} : h_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$ ，底边为BC，

$$\text{所以， } S_{\triangle OBC} : S_{\triangle ABC} = h_{\triangle OBC} : h_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$$

故选：B

11. A

【分析】

由O是 $\triangle ABC$ 的重心，可知 $\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ ，又 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{BD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，化简即可.

【详解】

由O是 $\triangle ABC$ 的重心，可知 $\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ ，

又 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{BD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，

$$\begin{aligned} \text{故 } \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{15}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{2}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{15}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b}, \end{aligned}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/698062005023006137>