

2023-2024 学年安徽省安庆市达标名校高考数学四模试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ， $3 + ai = b - (2a - 1)i$ ，则 $|3a + bi| =$ ()

- A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. 4

2. 以下关于 $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ 的命题，正确的是

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增

B. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 需是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 将函数 $y = f(x)$ 图象向左平移需 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，可得到 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象

3. 已知三棱锥 $D - ABC$ 的体积为 2， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，且三棱锥 $D - ABC$ 的外接球的球心 O 恰好是 CD 中点，则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{52\pi}{3}$ B. $\frac{40\pi}{3}$ C. $\frac{25\pi}{3}$ D. 24π

4. 把函数 $f(x) = \sin^2 x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象。给出下列四个命题

① $g(x)$ 的值域为 $(0, 1]$

② $g(x)$ 的一个对称轴是 $x = \frac{\pi}{12}$

③ $g(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

④ $g(x)$ 存在两条互相垂直的切线

其中正确的命题个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线与 x 轴交于点 A , 点 M 在抛物线 C 上, 则当 $\frac{|MA|}{|MF|}$ 取得最大值时, 直线 MA 的方程为 ()

- A. $y = x + 1$ 或 $y = -x - 1$ B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ C. $y = 2x + 2$ 或 $y = -2x - 2$
D. $y = -2x + 2$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx - 1, & x > 0, \\ -\ln(-x), & x < 0, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点有 2 对, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, +\infty)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

7. 过点 $P(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$ 的直线 l 与曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{2PA} = \overrightarrow{5AB}$, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $2 + \sqrt{3}$
C. $2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$ D. $2 - \sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3} - 1$

8. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x+1)} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - 2ax = a - 1$ 有唯一解, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{-8\} \cup (1, +\infty)$ B. $\{-16\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$
C. $\{-8\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$ D. $\{-32\} \cup [1, 2] \cup (4, +\infty)$

9. $(x + y)(2x - y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 ()

- A. -30 B. -40 C. 40 D. 50

10. 给定下列四个命题:

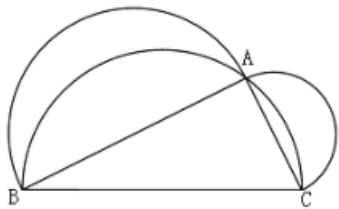
- ①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 则这两个平面相互平行;
②若一个平面经过另一个平面的垂线, 则这两个平面相互垂直;
③垂直于同一直线的两条直线相互平行;
④若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中, 为真命题的是 ()

- A. ①和② B. ②和③ C. ③和④ D. ②和④

11.

如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC ，直角边 AB, AC 。已知以直角边 AC, AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，记 $\angle ABC = \alpha$ ，则 $\sin 2\alpha =$ ()



- A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

12. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ，则与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为()

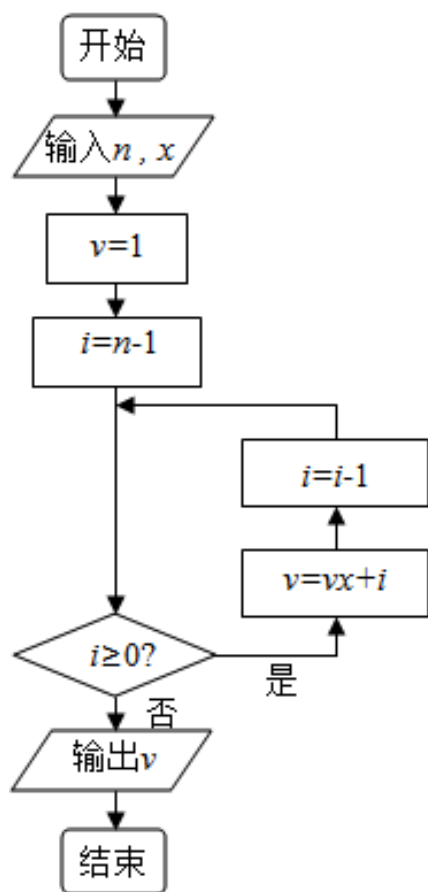
- A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. (5 分) 已知函数 $f(x) = \lg(9x^2 + 1) + x^2 - 1$ ，则不等式 $f(\log_3 x) + f(\log_3 \frac{1}{x}) \leq 2$ 的解集为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-1}{1-ax}$ 为奇函数，则 $a =$ _____.

15. 秦九韶算法是南宋时期数学家秦九韶提出的一种多项式简化算法，如图所示的框图给出了利用秦九韶算法求多项式值的一个实例，若输入 n ， x 的值分别为 4，5，则输出 v 的值为_____.



16. 已知 $\int_0^2 x^3 dx = n$, 则 $(x+y+1)^n$ 展开式中 x^2y 的系数为__

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 过点 $P(-1,0)$ 作倾斜角为 α 的直线与曲线 $C: \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 相交于 M 、 N 两点.

(1) 写出曲线 C 的一般方程;

(2) 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的最小值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$

(1) 已知直线 $l: x - y - 1 = 0$, $l_1: 2x - y - 2 = 0$. 若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称, 又函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 l_2 垂直, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $g(x) = (e-2)x+1$, 则当 $x > 0$, $a=1$ 时, 求证:

① $f(x) \geq g(x)$;

② $e^x - ex - 1 \geq x(\ln x - 1)$.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \cos x$ ($a \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(1) 当 $a=1$ 时, 令 $h(x)=f'(x)-x+\ln x$, $h'(x)$ 为 $h(x)$ 的导数. 证明: $h'(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一的极小值点;

(2) 已知函数 $y=f(2x)-\frac{2}{3}x^4$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(1,0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|AP|+|PB|$ 的值.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a=b\cos C+c\sin B$.

(1) 求 B 的值;

(2) 设 $\angle BAC$ 的平分线 AD 与边 BC 交于点 D , 已知 $AD=\frac{17}{7}$, $\cos A=-\frac{7}{25}$, 求 b 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+bx$, 函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0.

(1) 试用含有 a 的式子表示 b , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 对于函数 $f(x)$ 图象上的不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 如果在函数 $f(x)$ 图象上存在点

$M(x_0, y_0) (x_0 \in (x_1, x_2))$, 使得在点 M 处的切线 $l \parallel AB$, 则称 AB 存在“跟随切线”. 特别地, 当 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ 时, 又称

AB 存在“中值跟随切线”. 试问: 函数 $f(x)$ 上是否存在两点 A, B 使得它存在“中值跟随切线”, 若存在, 求出 A, B 的坐标, 若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

根据复数相等的特征，求出 $3a$ 和 b ，再利用复数的模公式，即可得出结果.

【详解】

因为 $3+ai=b-(2a-1)i$ ，所以 $\begin{cases} b=3, \\ -(2a-1)=a, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=3, \\ 3a=1, \end{cases}$

则 $|3a+bi|=|1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查相等复数的特征和复数的模，属于基础题.

2、D

【解析】

利用辅助角公式化简函数得到 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ ，再逐项判断正误得到答案.

【详解】

$$f(x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$$

A 选项， $x\in(0,\frac{2\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{13\pi}{12})$ 函数先增后减，错误

B 选项， $x=\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=0$ 不是函数对称轴，错误

C 选项， $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ ，不是对称中心，错误

D 选项，图象向左平移需 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到 $y=\sqrt{2}\sin(2(x+\frac{\pi}{8})-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin 2x$ ，正确

故答案选 D

【点睛】

本题考查了三角函数的单调性，对称轴，对称中心，平移，意在考查学生对于三角函数性质的综合应用，其中化简三角函数是解题的关键.

3、A

【解析】

根据 O 是 CD 中点这一条件，将棱锥的高转化为球心到平面的距离，即可用勾股定理求解.

【详解】

解：设 D 点到平面 ABC 的距离为 h ，因为 O 是 CD 中点，

所以 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{h}{2}$ ，

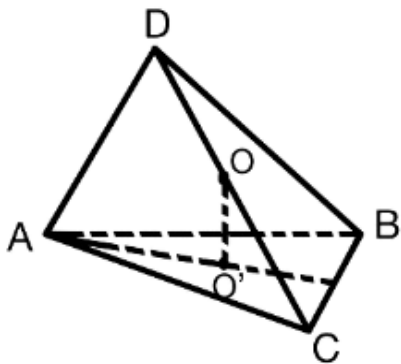
三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \cdot h = 2$ ，解得 $h = 2\sqrt{3}$ ，

作 $OO' \perp$ 平面 ABC ，垂足 O' 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $CO' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，且 $OO' = \frac{h}{2} = \sqrt{3}$ ，

所以在 $Rt\triangle CO'O$ 中， $OC = \sqrt{CO'^2 + O'O^2} = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ，此为球的半径，

$$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{13}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

故选：A.



【点睛】

本题考查球的表面积，考查点到平面的距离，属于中档题.

4、C

【解析】

由图象变换的原则可得 $g(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ ，由 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 1]$ 可求得值域，利用代入检验法判断②③；

对 $g(x)$ 求导，并得到导函数的值域，即可判断④.

【详解】

由题， $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ，

则向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位可得， $g(x) = \frac{1 - \cos 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}{2} = -\frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 1]$ ， $\therefore g(x)$ 的值域为 $[0, 1]$ ，①错误；

当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} = 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 的一条对称轴, ②正确;

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $g(x)$ 的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$, ③正确;

$g'(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-1, 1]$, 则 $\exists x_1, x_2 \in R, g'(x_1) = -1, g'(x_2) = 1$, 使得 $g'(x_1) \cdot g'(x_2) = -1$, 则 $g(x)$ 在 $x = x_1$ 和

$x = x_2$ 处的切线互相垂直, ④正确.

即 ②③④ 正确, 共 3 个.

故选: C

【点睛】

本题考查三角函数的图像变换, 考查代入检验法判断余弦型函数的对称轴和对称中心, 考查导函数的几何意义的应用.

5、A

【解析】

过 M 作 MP 与准线垂直, 垂足为 P , 利用抛物线的定义可得 $\left| \frac{MA}{MF} \right| = \left| \frac{MA}{MP} \right| = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle MAF}$, 要使 $\left| \frac{MA}{MF} \right|$

最大, 则 $\angle MAF$ 应最大, 此时 AM 与抛物线 C 相切, 再用判别式或导数计算即可.

【详解】

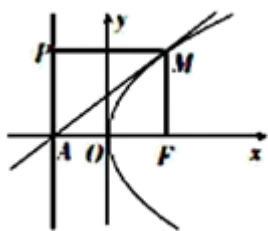
过 M 作 MP 与准线垂直, 垂足为 P , $\left| \frac{MA}{MF} \right| = \left| \frac{MA}{MP} \right| = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle MAF}$,

则当 $\left| \frac{MA}{MF} \right|$ 取得最大值时, $\angle MAF$ 最大, 此时 AM 与抛物线 C 相切,

易知此时直线 AM 的斜率存在, 设切线方程为 $y = k(x+1)$,

则 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$. 则 $\Delta = 16 - 16k^2 = 0, k^2 = 1, k = \pm 1$,

则直线 AM 的方程为 $y = \pm (x+1)$.



故选: A.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系，涉及到抛物线的定义，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

6、B

【解析】

考虑当 $x > 0$ 时， $kx - 1 = \ln x$ 有两个不同的实数解，令 $h(x) = \ln x - kx + 1$ ，则 $h(x)$ 有两个不同的零点，利用导数和零点存在定理可得实数 k 的取值范围.

【详解】

因为 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点有 2 对，

所以 $x > 0$ 时， $kx - 1 = \ln x$ 有两个不同的实数解.

令 $h(x) = \ln x - kx + 1$ ，则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的零点.

$$\text{又 } h'(x) = \frac{1-kx}{x},$$

当 $k \leq 0$ 时， $h'(x) > 0$ ，故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

$h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至多一个零点，舍.

当 $k > 0$ 时，

若 $x \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ ，则 $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 上为增函数；

若 $x \in \left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ ，则 $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上为减函数；

$$\text{故 } h(x)_{\max} = h\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k},$$

因为 $h(x)$ 有两个不同的零点，所以 $\ln \frac{1}{k} > 0$ ，解得 $0 < k < 1$.

又当 $0 < k < 1$ 时， $\frac{1}{e} < \frac{1}{k}$ 且 $h\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{k}{e} < 0$ ，故 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 上存在一个零点.

$$\text{又 } h\left(\frac{e}{k^2}\right) = \ln \frac{e}{k^2} - \frac{e}{k} + 1 = 2 + 2 \ln t - et, \text{ 其中 } t = \frac{1}{k} > 1.$$

$$\text{令 } g(t) = 2 + 2 \ln t - et, \text{ 则 } g'(t) = \frac{2-et}{t},$$

当 $t > 1$ 时， $g'(t) < 0$ ，故 $g(t)$ 为 $(1, +\infty)$ 减函数，

所以 $g(t) < g(1) = 2 - e < 0$ 即 $h\left(\frac{e}{k^2}\right) < 0$.

因为 $\frac{e}{k^2} > \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k}$, 所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上也存在一个零点.

综上, 当 $0 < k < 1$ 时, $h(x)$ 有两个不同的零点.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数的零点, 一般地, 较为复杂的函数的零点, 必须先利用导数研究函数的单调性, 再结合零点存在定理说明零点的存在性, 本题属于难题.

7、A

【解析】

利用切割线定理求得 $|PA|, |AB|$, 利用勾股定理求得圆心到弦 AB 的距离, 从而求得 $\angle APO = 30^\circ$, 结合 $\angle POx = 45^\circ$, 求得直线 l 的倾斜角为 15° , 进而求得 l 的斜率.

【详解】

曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 为圆 $x^2 + y^2 = 13$ 的上半部分, 圆心为 $(0, 0)$, 半径为 $\sqrt{13}$.

设 PQ 与曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 相切于点 Q ,

$$\text{则 } |PQ|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PA| \cdot (|PA| + |AB|) = \frac{7}{5} |PA|^2 = |PO|^2 - |OQ|^2 = 35$$

所以 $|PA| = 5, |AB| = 2$,

O 到弦 AB 的距离为 $\sqrt{13 - 1} = 2\sqrt{3}$, $\sin \angle APO = \frac{2\sqrt{3}}{|OP|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle APO = 30^\circ$, 由于 $\angle POx = 45^\circ$,

所以直线 l 的倾斜角为 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, 斜率为 $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \times \tan 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$.

故选: A

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/698074113137006055>