

广东省揭阳一中、潮州金山中学 2025 届高三数学四模试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

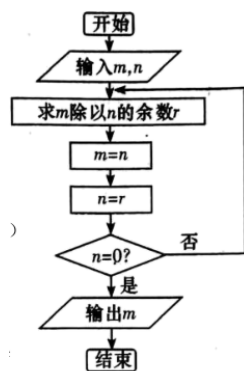
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，这是某校高三年级甲、乙两班在上学期的 5 次数学测试的班级平均分的茎叶图，则下列说法不正确的是（ ）

甲班		乙班
7	9	5 8
7 3 1	10	1 3
2	11	3

- A. 甲班的数学成绩平均分的平均水平高于乙班
- B. 甲班的数学成绩的平均分比乙班稳定
- C. 甲班的数学成绩平均分的中位数高于乙班
- D. 甲、乙两班这 5 次数学测试的总平均分是 103

2. 执行下面的程序框图，如果输入 $m = 1995$ ， $n = 228$ ，则计算机输出的数是（ ）



- A. 58
- B. 57
- C. 56
- D. 55

3. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ，且满足 $f(x + \varphi) = f(\varphi - x)$ ，则要得到函数

数 $f(x)$ 的图像，可将函数 $g(x) = \sin \omega x$ 的图像（ ）

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
- C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度
- D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

4. 已知函数 $f(x) = x \left(x - \ln \frac{x^2}{a} \right)$, 关于 x 的方程 $f(x) = a$ 存在四个不同实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1) \cup (1, e)$ B. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
- C. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ D. $(0, 1)$

5. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 满足 ()

- A. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上为增函数
- B. 函数最大值为 2, 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
- C. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 1
- D. 最小正周期为 π , $g(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 有两个根

6. 已知曲线 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 过定点 (k, b) , 若 $m + n = b$ 且 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ().

- A. $\frac{9}{2}$ B. 9 C. 5 D. $\frac{5}{2}$

7. 已知 l, m 是两条不同的直线, $m \perp$ 平面 α , 则“ $l // \alpha$ ”是“ $l \perp m$ ”的 ()

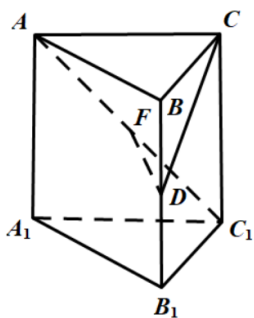
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 如果直线 $ax + by = 1$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相交, 则点 $M(a, b)$ 与圆 C 的位置关系是 ()

- A. 点 M 在圆 C 上 B. 点 M 在圆 C 外
- C. 点 M 在圆 C 内 D. 上述三种情况都有可能

9. 在棱长均相等的正三棱柱 $ABC = A_1B_1C_1$ 中, D 为 BB_1 的中点, F 在 AC_1 上, 且 $DF \perp AC_1$, 则下述结论: ①

$AC_1 \perp BC$; ② $AF = FC_1$; ③ 平面 $DAC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 ; ④ 异面直线 AC_1 与 CD 所成角为 60° 其中正确命题的个数为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率是 3, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则双曲线 C 的焦距为 ()

- A. 3 B. $3\sqrt{2}$ C. 6 D. $6\sqrt{2}$

11. 已知 $a \in R, b \in R$, 则“直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $(a+1)x - 2ay + 1 = 0$ 垂直”是“ $a = 3$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = x \cdot 2^{|x|}$, $a = f(\log_3 \sqrt{5})$, $b = -f(\log_3 \frac{1}{2})$, $c = f(\ln 3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 99$, $a_2 + a_5 + a_8 = 93$, 若对任意 $n \in N^*$ 都有 $S_n \leq S_k$ 成立, 则 k 的值为_____.

14. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

15. 函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ 的极大值为_____.

16. 若关于 x 的不等式 $\frac{mx^2}{1 + \ln x} \geq 2e^{n-1}$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上恒成立, 则 $\frac{n}{m}$ 的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3x+6}$, $g(x) = \sqrt{14-x}$, 若存在实数 x 使 $f(x) + g(x) > a$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-1| - 2|x+3|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 1$ 的解集;

(2) 若存在实数 x , 使得不等式 $m^2 - 3m - f(x) < 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = na_n + n$, $n \in \mathbf{N}_+$, $a_2 = 2$,

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 并求其通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}}$, 求证: $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n < 1$.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x$.

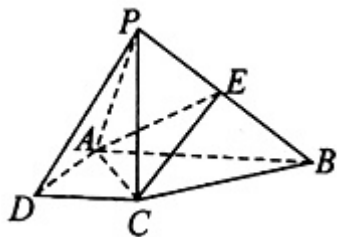
(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若对任意的 $m \in \mathbf{R}$, 当 $x > 0$ 时, 都有 $m^2 \left(2f(x) + \frac{1}{x} \right) > 2\sqrt{2km} - 1$ 恒成立, 求最大的整数 k .

(参考数据: $e^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \approx 1.78$)

21. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $PC \perp$ 底面 $ABCD$

$AB = 2AD = 2CD = 4$, $PC = 2a$, E 是 PB 的中点.



(1) 求证: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC ;

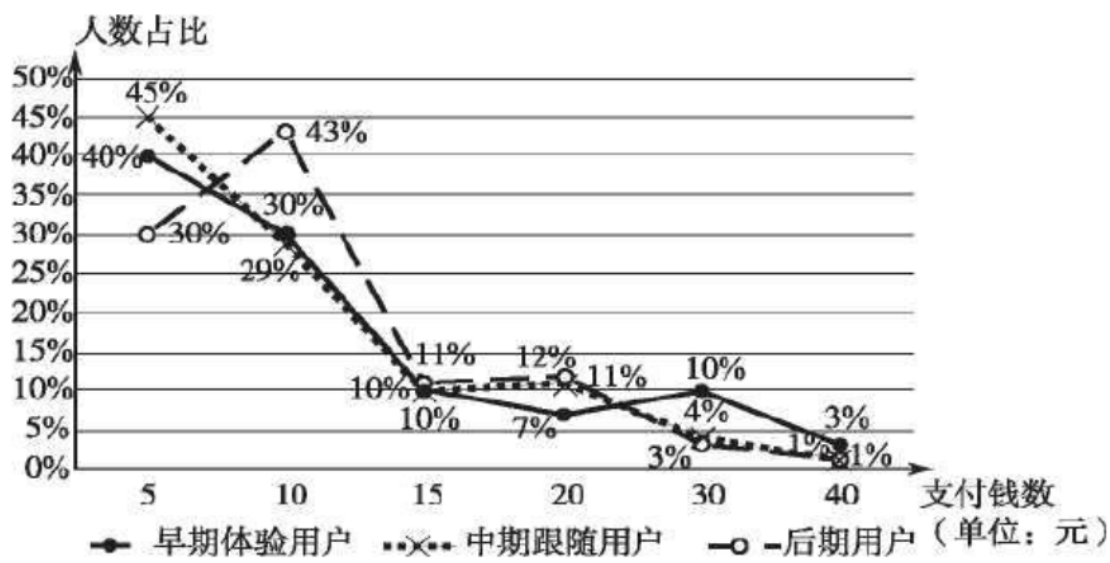
(2) 若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

22. (10 分) 2019 年 6 月, 国内的 5G 运营牌照开始发放. 从 2G 到 5G, 我们国家的移动通信业务用了不到 20 年的时间, 完成了技术上的飞跃, 跻身世界先进水平. 为了解高校学生对 5G 的消费意愿, 2019 年 8 月, 从某地在校大学生中随机抽取了 1000 人进行调查, 样本中各类用户分布情况如下:

用户分类	预计升级到 5G 的时段	人数
早期体验用户	2019 年 8 月至 2019 年 12 月	270 人
中期跟随用户	2020 年 1 月至 2021 年 12 月	530 人
后期用户	2022 年 1 月及以后	200 人

我们将大学生升级 5G 时间的早晚与大学生愿意为 5G

套餐支付更多的费用作比较，可得出下图的关系（例如早期体验用户中愿意为5G套餐多支付5元的人数占有所有早期体验用户的40%）。



- (1) 从该地高校大学生中随机抽取1人，估计该学生愿意在2021年或2021年之前升级到5G的概率；
- (2) 从样本的早期体验用户和中期跟随用户中各随机抽取1人，以 X 表示这2人中愿意为升级5G多支付10元或10元以上的人数，求 X 的分布列和数学期望；
- (3) 2019年底，从这1000人的样本中随机抽取3人，这三位学生都已签约5G套餐，能否认为样本中早期体验用户的人数有变化？说明理由。

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

计算两班的平均值，中位数，方差得到ABC正确，两班人数不知道，所以两班的总平均分无法计算，D错误，得到答案。

【详解】

由题意可得甲班的平均分是104，中位数是103，方差是26.4；

乙班的平均分是102，中位数是101，方差是37.6，则A，B，C正确。

因为甲、乙两班的人数不知道，所以两班的总平均分无法计算，故D错误。

故选：D.

【点睛】

本题考查了茎叶图，平均值，中位数，方差，意在考查学生的计算能力和应用能力.

2、B

【解析】

先明确该程序框图的功能是计算两个数的最大公约数，再利用辗转相除法计算即可.

【详解】

本程序框图的功能是计算 m ， n 中的最大公约数，所以 $1995 = 228 \times 8 + 171$ ，

$228 = 171 \times 1 + 57$ ， $171 = 3 \times 57 + 0$ ，故当输入 $m = 1995$ ， $n = 228$ ，则计算机输出的数是 57.

故选：B.

【点睛】

本题考查程序框图的功能，做此类题一定要注意明确程序框图的功能是什么，本题是一道基础题.

3、C

【解析】

依题意可得 $\omega = 2$ ，且 $x = \varphi$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，即可求出 φ 的值，再根据三角函数的平移规则计算可得；

【详解】

解：由已知得 $\omega = 2$ ， $x = \varphi$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，且使 $f(x)$ 取得最值，则 $3\varphi = k\pi$ ， $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{2}\right], \quad g(x) = \sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$$

故选：C.

【点睛】

本题考查三角函数的性质以及三角函数的变换规则，属于基础题.

4、D

【解析】

原问题转化为 $\frac{x^2}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} \ln \frac{x^2}{a} = 1$ 有四个不同的实根，换元处理令 $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$ ，对 $g(t) = \ln t^2 - \sqrt{a}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ 进行零点个数讨论.

【详解】

由题意， $a > 2$ ，令 $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$ ，

$$\text{则 } f(x) = a \Leftrightarrow x \left(x - \ln \frac{x^2}{a} \right) = a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} \ln \frac{x^2}{a} = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{\sqrt{a}} t \ln t^2 = 1 \Leftrightarrow \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right) = 0.$$

$$\text{记 } g(t) = \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

当 $t < 2$ 时, $g(t) = 2\ln(-t) - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right)$ 单调递减, 且 $g(-2) = 2$,

又 $g(2) = 2$, $\therefore$ 只需 $g(t) = 2$ 在 $(2, +\infty)$ 上有两个不等于 2 的不等根.

$$\text{则 } \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{2t \ln t}{t^2 - 1},$$

$$\text{记 } h(t) = \frac{2t \ln t}{t^2 - 1} \quad (t > 2 \text{ 且 } t \neq 2),$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{(2 \ln t + 2)(t^2 - 1) - 4t^2 \ln t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{2(t^2 + 1) \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t \right)}{(t^2 - 1)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t, \text{ 则 } \varphi'(t) = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} < 2.$$

$$\because \varphi(2) = 2, \therefore \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t \text{ 在 } (2, 2) \text{ 大于 } 2, \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上小于 } 2.$$

$\therefore h'(t)$ 在 $(2, 2)$ 上大于 2, 在 $(2, +\infty)$ 上小于 2,

则 $h(t)$ 在 $(2, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{由 } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t \ln t}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 \ln t + 2}{2} = 1, \text{ 可得 } \sqrt{a} < 1, \text{ 即 } a < 2.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(2, 2)$.

故选: D.

【点睛】

此题考查方程的根与函数零点问题, 关键在于等价转化, 将问题转化为通过导函数讨论函数单调性解决问题.

5、C

【解析】

由辅助角公式化简三角函数式, 结合三角函数图象平移变换即可求得 $g(x)$ 的解析式, 结合正弦函数的图象与性质即可判断各选项.

【详解】

函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$,

$$\text{则 } f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

将 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,

$$\text{可得 } g(x) = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

由正弦函数的性质可知, $g(x)$ 的对称中心满足 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 A、B 选项中的对称中心错误;

对于 C, $g(x)$ 的对称轴满足 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称; 当

$x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 由正弦函数性质可知 $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [1, 2]$, 所以在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值为

1, 所以 C 正确;

对于 D, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 由正弦函数的图象与性质可知,

$2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 时仅有一个解为 $x = 0$, 所以 D 错误;

综上所述, 正确的为 C,

故选: C.

【点睛】

本题考查了三角函数式的化简, 三角函数图象平移变换, 正弦函数图象与性质的综合应用, 属于中档题.

6、A

【解析】

根据指数型函数所过的定点, 确定 $k=1, b=2$, 再根据条件 $m+n=2$, 利用基本不等式求 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值.

【详解】

Q 定点为 $(1, 2)$,

$$\therefore k=1, b=2,$$

$$\therefore m+n=2$$

$$\therefore \frac{4}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \right) \dots \frac{9}{2}$$

当且仅当 $\frac{m}{n} = \frac{4n}{m}$ 时等号成立,

即 $m = \frac{4}{3}, n = \frac{2}{3}$ 时取得最小值 $\frac{9}{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查指数型函数的性质, 以及基本不等式求最值, 意在考查转化与变形, 基本计算能力, 属于基础题型.

7、A

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义, 结合线面垂直的性质进行判断即可.

【详解】

当 $m \perp$ 平面 α 时, 若 $l \parallel \alpha$ 则 “ $l \perp m$ ” 成立, 即充分性成立,

若 $l \perp m$, 则 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$, 即必要性不成立,

则 “ $l \parallel \alpha$ ” 是 “ $l \perp m$ ” 充分不必要条件,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合线面垂直的性质和定义是解决本题的关键. 难度不大, 属于基础题

8、B

【解析】

根据圆心到直线的距离小于半径可得 a, b 满足的条件, 利用 $M(a, b)$ 与圆心的距离判断即可.

【详解】

Q 直线 $ax + by = 1$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相交,

$\therefore$ 圆心 $(0, 0)$ 到直线 $ax + by = 1$ 的距离 $d = \frac{|-1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$,

即 $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$.

也就是点 $M(a, b)$ 到圆 C 的圆心的距离大于半径.

即点 $M(a, b)$ 与圆 C 的位置关系是点 M 在圆 C 外.

故选: B

【点睛】

本题主要考查直线与圆相交的性质, 考查点到直线距离公式的应用, 属于中档题.

9、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/698076140031007040>