第二轮能力专题：

三种经典力学模型的分析

2023、3

专题讲解

三种模型及其概要

三种模型是指：碰撞模型、人船模型、子弹打木块模型

1．碰撞模型：

碰撞的分类

- 弹性碰撞
  - 碰撞过程中所产生的形变能够完全恢复的
  - 碰撞过程中没有机械能损失的
- 非弹性碰撞
  - 碰撞过程中所产生的形变不能够完全恢复的
  - 碰撞过程中有机械能损失的
- 完全非弹性碰撞
  - 碰撞过程中所产生的形变完全不能够恢复的
  - 碰撞过程中机械能损失最多的

按形变恢复情况分

按机械能损失情况

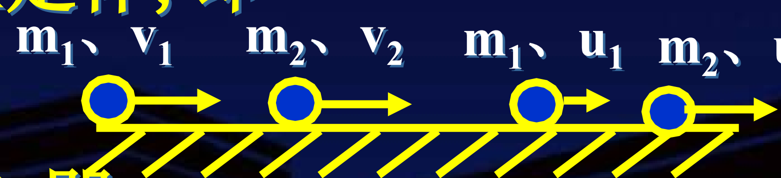
专题讲解 碰撞过程的力学特征：

经历的时间极短，所经历的时间在整个力学过程中能够忽视；碰撞双方相互作用的内力往往是远不小于外力，系统在碰撞前后遵从总动量守恒定律，且碰撞前后能量不会增长

弹性碰撞特例：

遵从碰撞前后系统的总动量守恒定律, 即

$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1u_1+m_2u_2$



遵从碰撞前后系统的总动能相等, 即

$½m_1u_1^2+½m_2u_2^2=½m_1u_1^2+½m_1u_2^2$

由此可得碰后的速度

$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \qquad u_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$

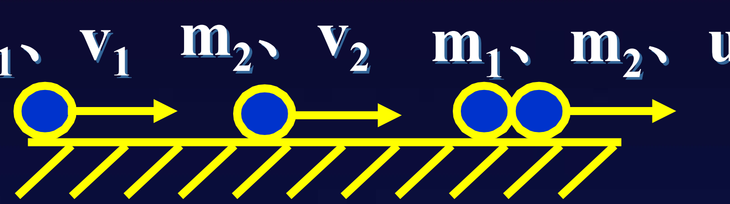
且碰撞前后,双方的相对速度大小相等,即$u_2-u_1=v_1-v_2$

专题讲解

完全非弹性碰撞特例：

遵从碰撞前后系统的总动量守恒定律，即

$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1u_1+m_2u_2$



具有碰撞双方碰后的速度相等的特征，即 $u_1=u_2=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

碰撞过程中机械能损失最大

$\triangle E=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m_1u_1^2-\frac{1}{2}m_2u_2^2$

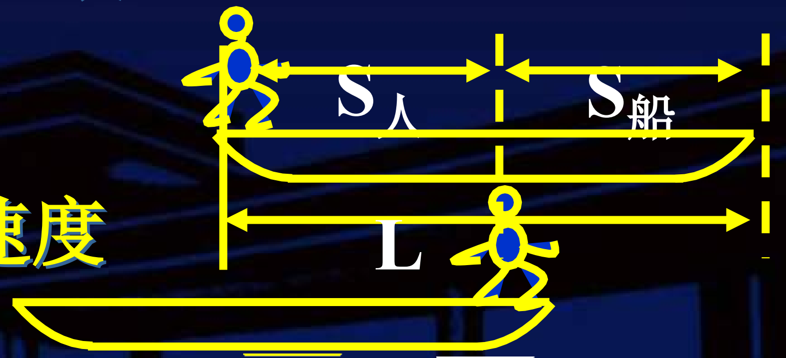
$=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-\dfrac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

2．人船模型

“人船模型”是由人和船两个物体构成的系统；该系统在人和船相互作用下各自运动，运动过程中该系统所受到的合外力为零，即系统在运动过程中总动量守恒。

专题讲解

原型：长为L、质量为M的小船停在静水中，一种质量为m的人立在船头。若不计水的阻力，当人从船头走到船尾的过程中，系统在水平方向不受外力作用，水平方向上动量守恒，人走动过程中的每时每刻它们的总动量都是零。设人的速度为$v_{人}$，船的速度为$v_{船}$，人经t秒从船头到船尾，人相对岸的位移为$s_{人}$，船相对岸的位移为$s_{船}$.



由动量守恒定律得： $mv_{人}=Mv_{船}$

因为运动过程中任一时刻人，船速度大小v人和v船均满足上述关系，

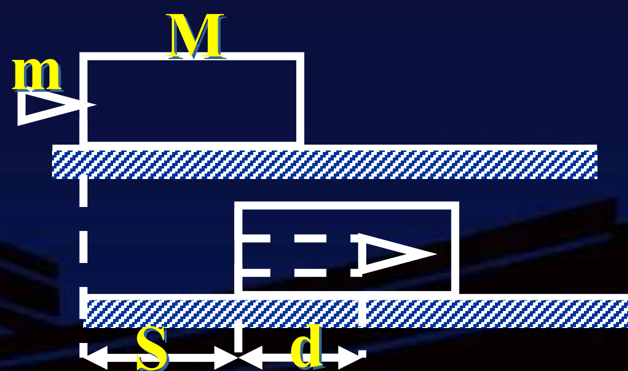
所以运动过程中，人、船平均速度大小，$\overline{v}_{人}$ 和 $\overline{v}_{船}$ 也应满足相同的关系。即 $m\overline{v}_{人}=M\overline{v}_{船}$

两边同乘以运动时间t，则 $m\overline{v}_{人}t=M\overline{v}_{船}t$　即 $ms_{人}=Ms_{船}$

而 $s_{人}+s_{船}=L$，所以有：$s_{人}=\frac{M}{M+m}L$　$s_{船}=\frac{m}{M+m}L$

专题讲解 3．子弹打木块模型

原型:如图所示，一颗质量为m的子弹以速度v_0射入静止在光滑水平面上的木块M中且未穿出。设子弹与木块间的摩擦为f。子弹打进深度d相对木块静止，此时木块迈进位移为s。



对系统，由动量守恒有：

$$mv_0=(M+m)v \quad ①$$

对子弹由动能定理有：

$$-f(s+d)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad ②$$

对木块由动能定理：$fs=\frac{1}{2}Mv^2$ ③

将②③相加可得 $fd=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}(M+m)v^2$ ④

相互作用的力f与相时位移的大小d的乘积，等于子弹与木块构成的系统的动能的降低许，亦即产生的内能。

专题讲解

由①和④可得动能的损失值: $\Delta E_k = fd = \frac{M}{M+m}\times\frac{1}{2}mv_0^2$

故打入深度 $d=\frac{\Delta E_k}{f}=\frac{M}{f(M+m)}\times\frac{1}{2}mv_0^2$

明确:当构成系统的双方相对运动出现往复的情况时,公式中的d应就了解为“相对旅程”而不是“相对位移的大小”.

专题聚焦

1. 碰撞模型

例1　甲、乙两球在光滑水平轨道上向同方向运动，已知它们的动量分别是$p_{甲}$=5kg·m/s，$p_{乙}$=7 kg·m/s。甲从背面追上乙并发生碰撞，碰后乙球的动量变为10kg·m/s，则两球质量$m_{甲}$与$m_{乙}$的关系可能是下面的哪几种？　（　）

A. $m_{甲}=m_{乙}$　B. $m_{乙}=2m_{甲}$　C. $m_{乙}=4m_{甲}$　D. $m_{乙}=6m_{甲}$

专题聚焦

解析：从题中给出的选项看，$m_{甲}$、$m_{乙}$是倍数关系，这么可用$km_{甲}$来表达$m_{乙}$，

设碰前甲、乙两球的速度为$v_{甲}$、$v_{乙}$，碰后甲、乙两球的速度为$v'_{甲}$、$v'_{乙}$。

因甲从背面追上乙发生碰撞，则在碰前甲的速度应不小于乙的速度，即$v_{甲}>v_{乙}$。

由已知$m_{甲}v_{甲}=5$，$m_{乙}v_{乙}=7$，则有 $\dfrac{5}{m_{甲}} > \dfrac{7}{km_{甲}}$ ①

由动量守恒定律可知，碰后甲的动量为2kg·m/s，又因碰后，乙的速度不小于等于甲的速度，$v'_{乙} \geqq v'_{甲}$，

则同理也有 $\dfrac{10}{km_{甲}} \geqq \dfrac{2}{m_{甲}}$ ②

在碰撞的过程中，未说动能有无损失，这么可列出动能的不等式为 $\frac{1}{2}m_{甲}v_{甲}^2+\frac{1}{2}km_{甲}v_{乙}^2 \geq \frac{1}{2}m_{甲}v'^2_{甲}+\frac{1}{2}km_{甲}v'^2_{乙}$

专题聚焦

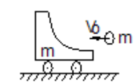
将已知量代入，并分别解上述不等式；

由
$$\begin{cases} \dfrac{5}{m_甲} > \dfrac{7}{km_甲} & 式得k>7/5 \\ \dfrac{10}{km_甲} \geq \dfrac{2}{m_甲} & 式得k\leq5 \\ \dfrac{1}{2}m_甲v_甲^2+\dfrac{1}{2}km_甲v_乙^2 \geq \dfrac{1}{2}m_甲v'^2_甲+\dfrac{1}{2}km_甲v'^2_乙 & 式得k>51/21 \end{cases}$$

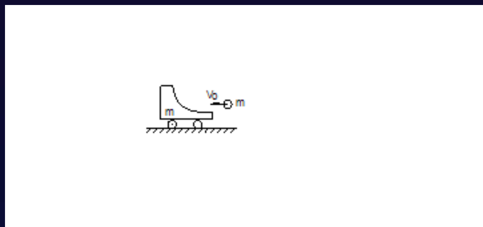
A. $m_甲 = m_乙$
B. $m_乙 = 2m_甲$
C. $m_乙 = 4m_甲$
D. $m_乙 = 6m_甲$

由此可知，只有选项C正确。

例2 如图所示．质量为m的滑块静止在光滑的水平桌面上，滑块的光滑弧面底部与桌面相切，一种质量为m的小球以速度v_0向滑块飞来，设小球不会越过滑块，求滑块能取得的最大速度？今后小球做什么运动?



专题聚焦



解析： 小球m在滑块M上先上升再下落，整个过程中M一直在加速，故M的最大速率出目前m与M分离时刻，整个相互作用的过程中系统动量守恒、机械能守恒。即

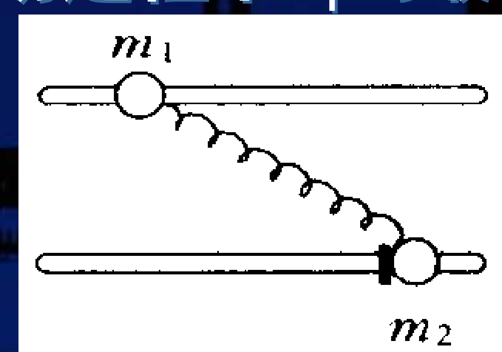
$$mv_0=mv_1+mv_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$$

由方程能够看出，属于弹性碰撞模型，故 $v_2=\frac{2m}{m+m}v_0=v_0$

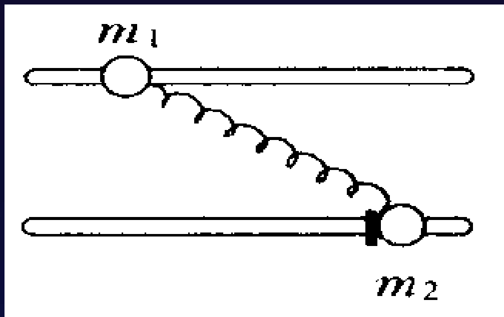
$V_1=0$,小球做自由落体运动

例3 如图所示，水平光滑轨道宽和弹簧自然长度均为d。m_2的左边有一固定挡板。m_1由图示位置静止释放，当m_1与m_2相距近来时m_1速度为v_1，求在后来的运动过程中m_1的最小速度和m_2的最大速度。



解析： m_1与m_2相距近来时m_1的速度v_1为其最大速度，在后来的运动中，m_1先减速，m_2先加速；

专题聚焦



当两者速度相等时，相距最远，今后m_1将继续减速，而m_2将继续加速。当它们距再次相距d时，m_1减速结束，而m_2加速结束，此时m_1与m_2的速度v_1'、v_2'即为所求。后来m_2将减速运动，而m_1将加速运动，……

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

此即弹性碰撞模型，则

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

例4： 如图，弧形斜面质量为M，静止于光滑水平上，一质量为m的小球以速度V_0向左运动，小球最多能升高到离水平面h处，求该系统产生的热量。

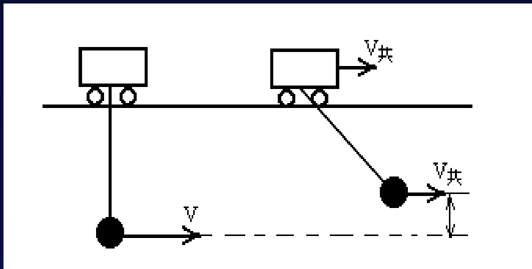
解： 小球降低的动能转化为小球的重力势能和产生的热量，即$\Delta E_K = Q +$ mgh

由完全非弹性碰撞模型知$\Delta E_K = \dfrac{M}{M+m}E_{k0}$

所以$Q = \Delta E_K - mgh = \dfrac{Mm}{2(M+m)}v_0^2 - mgh$.

专题聚焦

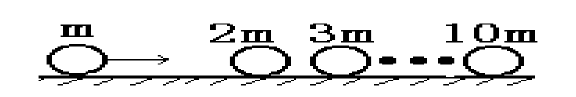
例5: 如图. 质量为m的小车静止在光滑的水平轨道上, 长为L的细线一端固定在小车上, 另一端拴一质量也为m的小球. 现给小球一初速度V, 求其能上升的最大高度为多少?



解: 当小球上升到最高点时, 两者具有共同速度, 符合上述模型的条件. 系统降低的动能 ΔE_K 全部转化为小球的重力势能 $\Delta E_P=m_{球}gh$,

$$\Delta E_k = \frac{m_{车}}{m_{车}+m_{球}}\times\frac{1}{2}m_{球}v^2 = m_{球}gh \quad 得 h = \frac{v^2}{4g}$$

例6: 如图, 在光滑的水平上, 依次有质量分别为m、2m、3m、…10m的10个小球, 排成一直线, 彼此有一定的距离. 开始时, 背面的9个小球是静止的, 第一种小球以初速度V_0向着第二小球碰去, 成果它们先后全部粘合在一起向前运动, 因为连续地碰撞, 系统损失的机械能为多少?



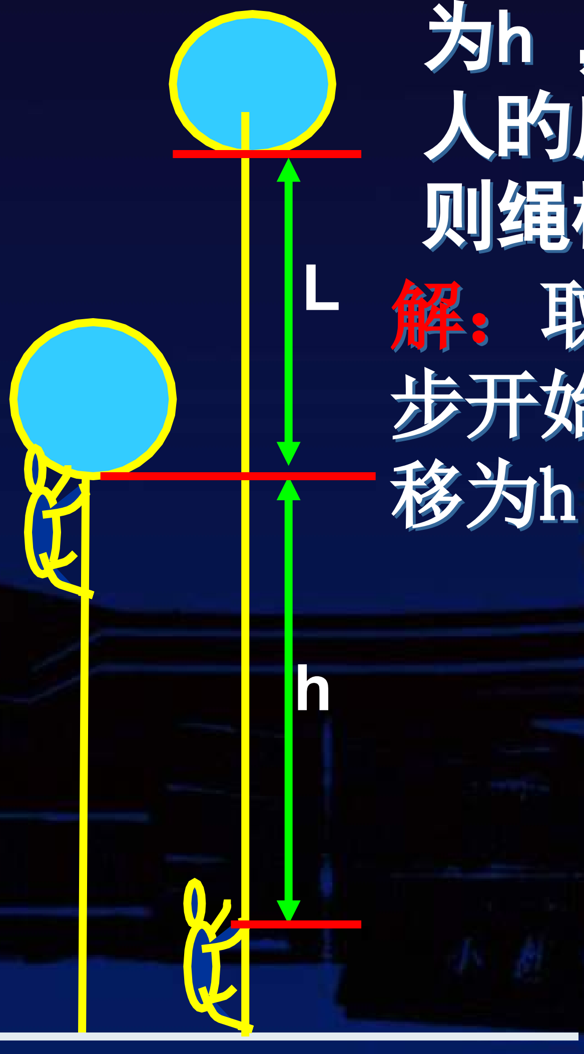
图四

解: 把背面的9个小球看成一种整体, 由完全非弹性碰撞模型,有

$$\Delta E_k = \frac{(2m+3m+\cdots+10m)}{(m+2m+\cdots+10m)}\times\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{27mv_0^2}{55}$$

专题聚焦　2．人船模型

例7:载人气球原来静止在空中，与地面距离为h，已知人的质量为m，气球质量（不含人的质量）为M。若人要沿轻绳梯返回地面，则绳梯的长度至少为多长？



解：取人和气球为对象，系统开始静止且同步开始运动，人下到地面时，人相对地的位移为h，设气球对地位移L，则根据推论有

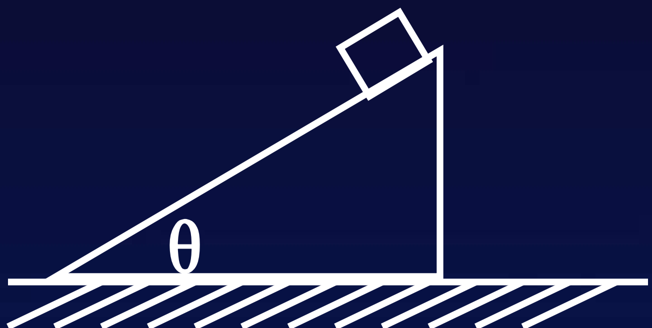
$$ML=mh$$

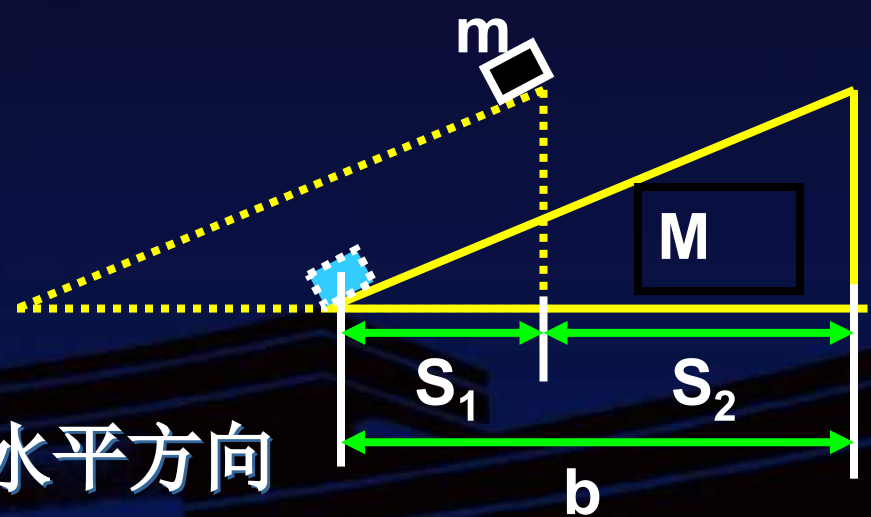
得$L=\frac{m}{M}h$

所以绳的长度至少为$L+h=\frac{(M+m)h}{M}$

专题聚焦

例8. 一种质量为M,底面边长为 b 的劈静止在光滑的水平面上，见左图，有一质量为 m 的物块由斜面顶部无初速滑究竟部时，劈移动的距离是多少？





解： 劈和小球构成的系统水平方向不受外力，故水平方向动量守恒，且初始时两物均静止，故由推论知$ms_1=Ms_2$,其中s_1和s_2是m和M对地的位移，由上图很轻易看出：$s_1=b-s_2$代入上式得，$m(b-s_2)=Ms_2$，所以　　$s_2=mb/(M+m)$即为M发生的位移。