浙江省台州市2023-2024学年高一上学期1月期末数学试题

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若幂函数$f(x)=x^{\alpha}$的图象过点$(4,2)$，则$f(3)$的值为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

〖答　案〗D

〖解　析〗由幂函数$f(x)=x^{\alpha}$的图象过点$(4,2)$，所以$f(4)=4^{\alpha}=2$，

解得$\alpha=\frac{1}{2}$，故$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，所以$f(3)=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

故选：D.

2. 函数$f(x)=\lg(x-1)$的定义域是（　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$　　D. **R**

〖答　案〗A

〖解　析〗由题意，在$f(x)=\lg(x-1)$中，$x-1>0$即$x>1$，所以$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$.

故选：A.

3. 下列函数在其定义域上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=-\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$　　C. $f(x)=\log_2 x$　　D. $f(x)=\tan x$

〖答　案〗C

〖解　析〗反比例函数$f(x)=-\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递增，在定义域上不单调，A选项不满足条件；

指数函数$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$在定义域上单调递减，B选项不满足条件；

对数函数$f(x)=\log_2 x$在其定义域上单调递增，C选项满足条件；

正切函数$f(x)=\tan x$在定义域上不单调，D选项不满足条件.

故选：C.

4. 若$a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 1$　　B. $4ab\le 1$

C. $a^2+b^2\ge 1$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 1$

〖答 案〗B

〖解 析〗若$a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1\ge 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$等号成立，A 选项错误；

$4ab\le 4\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$等号成立，B 选项正确；

$1=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\le 2(a^2+b^2)$，得$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$等号成立，C 选项错误；

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}\le 2(a+b)=2$，得$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$等号成立，D 选项错误.

故选：B.

5. 下列四组函数中，表示同一函数的是（　　）

A. $y=|x|$，$u=\sqrt{v^2}$　　B. $y=\ln x^2$，$s=2\ln t$

C. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，$m=n+1$　　D. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$y=-\cos x$

〖答 案〗A

〖解 析〗A 选项中，函数$y=|x|$与$u=\sqrt{v^2}=|v|$，定义域相同，对应关系也相同，

是同一函数；

B 选项中，函数$y=\ln x^2$定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，函数$s=2\ln t$定义域为$(0,+\infty)$，

定义域不同，不是同一函数；

C 选项中，函数$y=\frac{x^2-1}{x-1}$定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，函数$m=n+1$定义域为 R，

定义域不同，不是同一函数；

D 选项中，函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 与函数 $y=-\cos x$，对应关系不同，不是同一函数.

故选：A.

6. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=-2$，$\tan(\alpha-\beta)=7$，则 $\tan 2\alpha=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{9}{13}$　　D. $-\dfrac{9}{13}$

〖答 案〗A

〖解 析〗已知 $\tan(\alpha+\beta)=-2$，$\tan(\alpha-\beta)=7$，

则 $\tan 2\alpha=\tan\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{-2+7}{1-(-2)\times 7}=\dfrac{1}{3}$.

故选：A.

7. 已知 $\lg 2\approx 0.3010$，若 $2^n\left(n\in\mathbf{N}\right)$ 是 10 位数，则 n 的最小值是（　　）

A. 29　　B. 30　　C. 31　　D. 32

〖答 案〗B

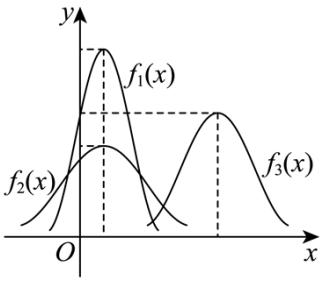
〖解 析〗若 2^n 是 10 位数，则 n 取最小值时，应满足 $2^n\geq 1\times 10^9$，

则有 $n\lg 2\geq 9$，$n\geq\dfrac{9}{\lg 2}\approx\dfrac{9}{0.3010}\approx 29.9$，

由 $n\in\mathbf{N}$，则 n 的最小值是 30.

故选：B.

8. 已知函数 $f_i(x)=\dfrac{1}{m_i\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-n_i)^2}{2m_i^2}}\left(m_i,\ n_i\in\mathbf{R},\ i\in\{1,2,3\}\right)$ 部分图象如图所示，则（　　）



A. $m_1=m_2$，$n_1>n_2$　　B. $m_1>m_2$，$n_1=n_2$

C. $m_3>m_1$，$n_3>n_1$　　D. $m_3>m_2$，$n_3>n_2$

〖答 案〗C

〖解 析〗由函数 $f_i\left(x\right)=\dfrac{1}{m_i\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-n_i\right)^2}{2m_i^2}}$，令 $g_i\left(x\right)=-\dfrac{\left(x-n_i\right)^2}{2m_i^2}$，

由二次函数性质可知：$g_i\left(x\right)$ 图象关于 $x=n_i$ 对称，$x<n_i$ 时，$g_i\left(x\right)$ 单调递增，

$x>n_i$ 时，$g_i\left(x\right)$ 单调递减，在 $x=n_i$ 处达到最大值，

由图象得：$f_i\left(n_i\right)>0$，则 $m_i>0$，

根据复合函数的性质可得：$f_i\left(x\right)$ 图象关于 $x=n_i$ 对称，

$x<n_i$ 时，$f_i\left(x\right)$ 单调递增，$x>n_i$ 时，$f_i\left(x\right)$ 单调递减，

在 $x=n_i$ 处达到最大值，则 $n_3>n_1=n_2$，且最大值为 $f_i\left(n_i\right)=\dfrac{1}{m_i\sqrt{2\pi}}$，

结合图象可知 $f_1\left(n_1\right)>f_3\left(n_3\right)>f_2\left(n_2\right)$，所以 $m_1<m_3<m_2$.

故选：C.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>b>c>0$，则（　　）

A. $a+c>b+c$　　B. $ac>bc$　　C. $\dfrac{a}{a+c}>\dfrac{b}{b+c}$　　D. $a^c<b^c$

〖答 案〗ABC

〖解 析〗由 $a>b>c>0$，得 $a+c>b+c$，$ac>bc$，AB 正确；

显然 $\dfrac{a}{a+c}-\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{ac-bc}{(a+c)(b+c)}>0$，即 $\dfrac{a}{a+c}>\dfrac{b}{b+c}$，C 正确；

函数 $y=x^c$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $a^c>b^c$，D 错误.

故选：ABC.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin x\cos x$，则（　　）

A. 函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 2π

B. 点 $\left(-\dfrac{\pi}{8},0\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心

C. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$ 上单调递减

D. 函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 1

〖答 案〗BC

〖解 析〗结合题意：

$f\left(x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin 2x$，

即 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

对于选项 A: 由 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 可得 $\omega=2$，所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，故选项 A 错误；

对于选项 B:将 $x=-\frac{\pi}{8}$ 代入 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 得：

$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 0=0$，

所以点 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心，故选项 B 正确；

对于选项 C:对于 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $t=2x+\frac{\pi}{4}$，则 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$，

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$，所以 $t=2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，而 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$ 上单调递减，故选项 C 正确；

对于选项 D: 对于 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，当 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$，

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathrm{Z}$，$f\left(x\right)_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选项 D 错误.

故选：BC.

11. 定义域均为 R 的奇函数 $f\left(x\right)$ 和偶函数 $g\left(x\right)$，满足 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=2^x+\cos x$，

则（　　）

A. $\exists x_0 \in \mathrm{R}$，使得 $f\left(x_0\right)=m$，$m \in \mathrm{R}$

B. $\exists x_0 \in \mathrm{R}$，使得 $g\left(x_0\right)=0$

C. $\forall x \in \mathrm{R}$，都有 $f(x)-g(x)<1$

D. $\forall x \in \mathrm{R}$，都有 $f(x) g(x)+f(-x) g(-x)=0$

〖答 案〗ACD

〖解 析〗因为 $f(x)+g(x)=2^x+\cos x$，则 $f(-x)+g(-x)=2^{-x}+\cos (-x)$，

因为 $f(x)$ 为奇函数和 $g(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=-f(x), g(-x)=g(x)$，

所以 $-f(x)+g(x)=2^{-x}+\cos (-x)$，

联立 $\begin{cases} f(x)+g(x)=2^x+\cos x \\ -f(x)+g(x)=2^{-x}+\cos x \end{cases}$，

可得 $f(x)=\frac{1}{2}\left(2^x-2^{-x}\right)$，$g(x)=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)+\cos x$，

对于选项 A：由 $f(x)=\frac{1}{2}\left(2^x-2^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)$，易判断函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

且值域为 R，故 $\exists x_0 \in \mathrm{R}$，使得 $f\left(x_0\right)=m$，$m \in \mathrm{R}$，故选项 A 正确；

对于选项 B：由 $g(x)=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)+\cos x$，因为 $2^x>0, 2^{-x}>0$，

所以 $\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{2^x \times 2^{-x}}=1$，当且仅当 $2^x=2^{-x}$，

即 $x=0$ 时，$\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)$ 取得最小值 1，

而 $\cos x \in[-1,1]$，当且仅当 $x=2k\pi+\pi, k \in \mathrm{Z}$ 时取到 -1，

故 $g(x)=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)+\cos x>0$（不能同时取等），

故不存在 $x_0 \in \mathrm{R}$，使得 $g\left(x_0\right)=0$，故选项 B 错误；

对于选项 C：由 $f(x)=\frac{1}{2}\left(2^x-2^{-x}\right)$，$g(x)=\frac{1}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)+\cos x$，

可得 $f(x)-g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x-\cos x$，而 $-\left(\frac{1}{2}\right)^x<0$，$-\cos x \in[-1,1]$，

所以 $f(x)-g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x-\cos x<1$，故 $\forall x\in\mathrm{R}$，都有 $f(x)-g(x)<1$，

故选项 C 正确；

对于选项D：因为 $f(x)$ 为奇函数和 $g(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=-f(x),g(-x)=g(x)$，

$f(x)g(x)+f(-x)g(-x)=f(x)g(x)-f(x)g(x)=0$，

故 $\forall x\in\mathrm{R}$，都有 $f(x)g(x)+f(-x)g(-x)=0$，故选项 D 正确.

故选：ACD.

12. 设 n 是正整数，集合 $A=\{\alpha|\ \alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ x_i\in\{-1,1\},\ i=1,2,\cdots,n\}$ 对于集合 A 中任意元素 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和 $\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，记 $P(\beta,\gamma)=y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n$，$M(\beta,\gamma)=\frac{1}{2}\left(y_1+z_1+|y_1-z_1|+y_2+z_2+|y_2-z_2|+\cdots+y_n+z_n+|y_n-z_n|\right)$.则（　　）

A. 当 $n=3$ 时，若 $\beta=(1,1,1)$，$\gamma=(1,-1,-1)$，则 $M(\beta,\gamma)=2$

B. 当 $n=3$ 时，$P(\beta,r)$ 的最小值为 -3

C. 当 $n=6$ 时，$M(\beta,\gamma)\geq P(\beta,\gamma)$ 恒成立

D. 当 $n=6$ 时，若集合 $B\subseteq A$，任取 B 中 2 个不同的元素 β,γ，$P(\beta,\gamma)\geq 2$，则集合 B 中元素至多 7 个

〖答 案〗BD

〖解 析〗对于 A，当 $\beta=(1,1,1),\gamma=(1,-1,-1)$ 时，

$M(\beta,\gamma)=\frac{1}{2}\left[1+1+1+1-1-1+|1-1|+|1-(-1)|+|1-(-1)|\right]=3$，故 A 错误；

对于 B，$P(\beta,\gamma)=y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3$，而 $y_iz_i\in\{-1,1\},i=1,2,3$，故当 $y_iz_i=-1$ 时，

此时 $P(\beta,\gamma)=y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3$ 取最小值 -3，

比如 $\beta=(1,1,1),\gamma=(-1,-1,-1)$ 时，$P(\beta,r)=-3$，故 B 正确；

对于 C，$n=6$ 时，$\beta=(-1,-1,-1,-1,-1,-1),\gamma=(-1,-1,-1,-1,-1,1)$，

$M(\beta,\gamma)=\frac{1}{2}\left(y_1+z_1+|y_1-z_1|+y_2+z_2+|y_2-z_2|+\cdots+y_6+z_6+|y_6-z_6|\right)=-4$，

$P(\beta,\gamma)=y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_6z_6=4$，不符合 $M(\beta,\gamma)\geq P(\beta,\gamma)$，故 C 错误；

对于 D，不妨设 B 中一个元素 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_6),y_i\in\{-1,1\}$，$i=1,2,3,4,5,6$，

由于 $P(\beta,\gamma)\geq 2$，则 β,γ 中相同位置上的数字最多有两对互为相反数，

其他相同位置上的数字对应相同，

若 β,γ 中相同位置中有一对的数字互为相反数，其他相同位置上的数字对应相同，

不妨设 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,Y_6)$，此时 $P(\beta,\gamma)=4\geq 2$，

那么与 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,Y_6)$ 相同位置中有一对的数字互为相反数，

其他相同位置上的数字对应相同的元素有 $\gamma_1=(y_1,y_2,\cdots Y_5,Y_6)$，$\gamma_2=(y_1,y_2,\cdots Y_4,y_5,Y_6)$，

$\gamma_3=(y_1,y_2,Y_3,y_4,y_5,Y_6)$，$\gamma_4=(y_1,Y_2,y_3,y_4,y_5,Y_6)$，$\gamma_5=(Y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,Y_6)$，

此时 $P(\gamma_i,\gamma)=4\geq 2$，其中 $i=1,2,3,4,5$，$P(\gamma_i,\gamma_j)=2\geq 2,i\neq j,i,j=1,2,3,4,5$，

而 γ_i，$i=1,2,3,4,5$ 与 β 中相同位置上的数字有两对是不相同的，此时 $P(\gamma_i,\beta)=2\geq 2$，

满足，

若与 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,Y_6)$ 相同位置中有 2 对的数字互为相反数，

那么就与 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_6),y_i\in\{-1,1\}$ 有 3 对相同位置上的元素互为相反数，不符合，

因此此时 B 中满足条件的元素有 7 个，

若 β,γ 中相同位置中有两对的数字互为相反数，其他相同位置上的数字对应相同，

不妨设 $\gamma'=(Y_1,y_2,\cdots,Y_6)$，$P(\gamma',\gamma)=4\geq 2$，

此时 $\gamma'=(Y_1,y_2,\cdots,Y_6)$ 与元素 $\gamma_5=(Y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,Y_6)$ 重复，

综上可知 B 中元素最多 7 个，D 正确.

故选：BD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 120°角是第_____象限角.

〖答 案〗二

〖解 析〗由象限角的定义可知，120°的角是第二象限角.

故〖答 案〗为：二.

14. 已知函数 $f(x)=a^x+1$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象过定点，则该定点的坐标是_____.

〖答 案〗$(0,2)$

〖解 析〗在函数 $f(x)=a^x+1$（$a>0$，且 $a\neq 1$）中，

令 $x=0$，则 $f(0)=a^0+1=2$，所以该定点的坐标是 $(0,2)$.

故〖答 案〗为：$(0,2)$.

15. 已知 $\tan\alpha=3$，$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值为_____.

〖答 案〗2

〖解 析〗因为 $\tan\alpha=3$，

所以 $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{-\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{-1+\tan\alpha}=\dfrac{3+1}{-1+3}=2$.

故〖答 案〗为：2.

16. 若函数 $f(x)=x^2-2x+|x-a|(a>0)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值为 1，则正实数 a 的值为_____.

〖答 案〗$\dfrac{13}{4}$

〖解 析〗由题可得 $f(x)=x^2-2x+|x-a|=\begin{cases}x^2-x-a, x\geq a\\ x^2-3x+a, x<a\end{cases}$，

因为函数 $f(x)=x^2-2x+|x-a|(a>0)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值为 1，

当 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，在 $[0,2]$ 上，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 单调递减，$\left(\frac{1}{2},2\right]$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-1-a=1$，解得 $a=\dfrac{7}{4}$（舍）；

当$\frac{1}{2}<a\le\frac{3}{2}$时，在$[0,2]$上$f(x)$在$[0,a]$单调递减，$(a,2]$单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f(a)=a^2-2a=1$，解得$a=1\pm\sqrt{2}$（舍）；

当$a>\frac{3}{2}$时，在$[0,2]$上，$f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\right]$单调递减，$\left(\frac{3}{2},2\right]$单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+a=1$，解得$a=\frac{13}{4}$.

故〖答 案〗为：$\frac{13}{4}$.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算：

（1）$\sqrt[3]{(\pi-3)^3}+8^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}$；

（2）$\lg4+\lg25-\log_23\times\log_34$.

解：（1）$\sqrt[3]{(\pi-3)^3}+8^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}=\pi-3+\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}-2^0=\pi-3+4-1=\pi$.

（2）$\lg4+\lg25-\log_23\times\log_34=\lg(4\times25)-\log_23\times\log_32^2$

$=\lg100-2\log_23\times\log_32=2-2=0$.

18. 已知$A=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，$B=\{x|\ x>m\}$.

（1）若$m=2$，求 $A\cap B$；

（2）若$x\in A$是$x\in B$的充分不必要条件，求实数m的取值范围.

解：（1）若$m=2$，则$A=\{x\in\mathbf{R}|1<x<3\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|\ x>2\}$，

所以$A\cap B=\{x\in\mathbf{R}|2<x<3\}$.

（2）若$x\in A$是$x\in B$的充分不必要条件，则A$\varnothing B$，

得$m\le1$，故m的取值范围是$(-\infty,1]$.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\cos^2\frac{x}{2}+m$的最大值为 2.

（1）求常数m的值；

（2）先将函数$f\left(x\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$g\left(x\right)$的图象，求$g\left(x\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的取值范围.

解：（1）$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\cos^2\frac{x}{2}+m=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}+m=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}+m$，

因为$f\left(x\right)$的最大值为2，所以$1+\frac{1}{2}+m=2$，故$m=\frac{1}{2}$.

（2）$f\left(x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

函数$f\left(x\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），

得函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$的图象，再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，

得$g\left(x\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+1=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，

由$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，得$-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以$-\frac{1}{2}\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$，$\frac{1}{2}\le 1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 2$，

故$g\left(x\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的取值范围是$\left[\frac{1}{2},2\right]$.

20. 从①$f(\log_3 2)=-\frac{1}{3}$；②函数$f\left(x\right)$为奇函数；③$f\left(x\right)$的值域是$\left(-1,1\right)$，这三个条件中选一个条件补充在下面问题中，并解答下面的问题.问题：已知函数$f(x)=\frac{a}{3^x+1}-1,a\in\mathrm{R}$，且_____.

（1）求函数$f\left(x\right)$的〖解 析〗式；

（2）若$f(a\cdot 3^x+2)+f(9^x+m)\le 0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，求实数$m$的最小值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：（1）若填①：由$f(\log_3 2)=-\frac{1}{3}$，

可得 $f(\log_3 2)=\frac{a}{3^{\log_3 2}+1}-1=\frac{a}{2+1}-1=-\frac{1}{3}$，解得 $a=2$，所以 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}-1$.

若填②：由函数 $f(x)=\frac{a}{3^x+1}-1$，

因为函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，故 $f\left(0\right)=1$，可得 $f(0)=\frac{a}{3^0+1}-1=0$，

解得 $a=2$，所以 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}-1$，即 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}-1=\frac{1-3^x}{3^x+1}$，

经验证： $f(-x)=\frac{1-3^{-x}}{3^{-x}+1}=\frac{3^x-1}{3^x+1}=-f(x)$，符合题意，所以 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}-1$.

若填③：由 $y=\frac{a}{3^x+1}-1$，可得 $y+1=\frac{a}{3^x+1}$，

则 $3^x=\frac{a}{y+1}-1=\frac{a-y-1}{y+1}>0$，即 $\frac{y-(a-1)}{y+1}<0$，

又由 $f\left(x\right)$ 的值域是 $\left(-1,1\right)$，可得 $a-1=1$，故 $a=2$，所以 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}-1$.

（2）$\forall x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2(3^{x_2}-3^{x_1})}{\left(3^{x_1}+1\right)\left(3^{x_2}+1\right)}>0$，

所以函数 $f\left(x\right)=\frac{2}{3^x+1}-1$ 在 R 上单调递减，

又因为 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}-1=\frac{1-3^x}{3^x+1}$，满足 $f(-x)=\frac{1-3^{-x}}{3^{-x}+1}=\frac{3^x-1}{3^x+1}=-f(x)$，

所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

由不等式 $f(a\cdot 3^x+2)+f(9^x+m)\le 0$，可得 $f(2\cdot 3^x+2)\le f(-9^x-m)$，

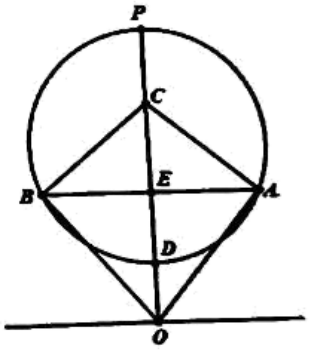
则 $2\cdot 3^x+2\ge -9^x-m$，所以 $m\ge -9^x-2\cdot 3^x-2$，

令 $3^x=t>0$，记 $y=-9^x-2\cdot 3^x-2=-t^2-2t-2=-(t+1)^2-1$，

所以 $y\le -2$，所以 $m\ge -2$，所以 m 的最小值为 -2.

21. 如图是一种升降装置结构图，支柱 OP 垂直水平地面，半径为 1的圆形轨道固定在支柱

OP 上，轨道最低点 D，$PD=2$，$OD=\dfrac{1}{2}$.液压杆 OA、OB，牵引杆 CA、CB，水平横杆 AB 均可根据长度自由伸缩，且牵引杆 CA、CB 分别与液压杆 OA、OB 垂直.当液压杆 OA、OB 同步伸缩时，铰点 A、B 在圆形轨道上滑动，铰点 C、E 在支柱 OP 上滑动，水平横杆 AB 作升降运动（铰点指机械设备中铰链或者装置臂的连接位置，通常用一根销轴将相邻零件连接起来，使零件之间可围绕铰点转动）.



（1）设劣弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长为 x，求水平横杆 AB 的长和 AB 离水平地面的高度 OE（用 x 表示）；

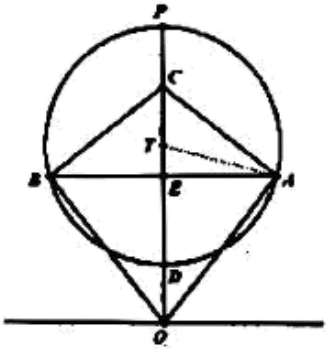
（2）在升降过程中，求铰点 C、E 距离的最大值.

解：（1）记轨道圆心为 T，则 $AT=1$，

设劣弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长为 x，则 $\angle ATD=x$，

得 $AB=2AE=2\sin x$，

$OE=OT-ET=OT-\cos x=\dfrac{3}{2}-\cos x$.



（2）由已知，$AB\perp OP$，$CA\perp OA$，$\angle CAE+\angle ACE=\angle CAE+\angle OAE=90°$，

则 $\angle ACE=\angle OAE$，又 $\angle CEA=\angle OEA=90°$，所以 $\triangle AEC\sim\triangle OEA$，

则 $CE=\dfrac{AE^2}{OE}=\dfrac{\sin^2 x}{\dfrac{3}{2}-\cos x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\dfrac{3}{2}-\cos x}$，

令 $\dfrac{3}{2}-\cos x=t$，有 $t\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，

则 $CE=\dfrac{3t-t^2-\dfrac{5}{4}}{t}=3-\left(t+\dfrac{5}{4t}\right)$，$t\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，

因为 $t+\dfrac{5}{4t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{5}{4t}}=\sqrt{5}$，当且仅当 $t=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，取到等号，

所以铰点 C、E 距离的最大值为 $3-\sqrt{5}$.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\left(x+1\right)^2+5, & x<1\\ x^2+\dfrac{2}{x}, & x\geq 1\end{cases}$.

（1）用单调性定义证明：$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递增；

（2）若函数 $y=f\left(x\right)-m\left(m\in\mathrm{R}\right)$ 有 3 个零点 x_1，x_2，x_3，满足 $x_1<x_2<x_3$，且 $\dfrac{x_3-x_2}{x_2-x_1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

①求证：$\left(x_3+1\right)^2=20-4m$；

②求 $\left[10x_3\right]$ 的值（$\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

解：（1）$\forall x_1,x_2\in\left[1,+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，

有 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1^2-x_2^2+\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{2}{x_2}=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)x_1x_2-2\right]}{x_1x_2}$，

由 $x_1,x_2\in\left[1,+\infty\right)$，得 $x_1+x_2>2$，$x_1\cdot x_2>1$，

所以 $\left(x_1+x_2\right)x_1x_2>2$，得 $\left(x_1+x_2\right)x_1x_2-2>0$，

又由 $x_1<x_2$，得 $x_1-x_2<0$.于是 $\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)x_1x_2-2\right]}{x_1x_2}<0$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/698117011133006054