“寻”思考缘
由
“悟”思维能
力

题目展示

对于数列$\{a_n\}$若对任意正整数n, $\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，令$b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$对应的一阶等差数列.

(1) 若数列$\{a_n\}$为二阶等差数列, 且$a_1=1$, 其对应的一阶等差数列$\{b_n\}$首项与公差都为1.

① 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

② 在数列$\{b_n\}$的前100项中随机选取三项, 求这三项能构成递增等差数列的概率;

(2) 设数列$\{b_n\}$为公差为2且项数不小于4的等差数列, 从中选取m项组成一个新数列$\{c_m\}$.

若$m=2k+1(k\in N^+)$, 且对于任意的$i(i=1,2,\cdots,m-2)$，均有$\dfrac{c_i-c_{i+1}}{c_i-c_{i+2}}<0$，

证明：$|c_m-c_1|\geq 2k$.

目录

01 考点分析

试题立意

对于数列$\{a_n\}$，若对任意正整数n，$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，令$b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$对应的一阶等差数列.

（1）若数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，且$a_1=1$，其对应的一阶等差数列$\{b_n\}$首项与公差都为1.

① 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

② 在数列$\{b_n\}$的前100项中随机选取三项，求这三项能构成递增等差数列的概率；

（2）设数列$\{b_n\}$为公差为2且项数不小于4的等差数列，从中选取m项组成一个新数列$\{c_m\}$.若$m=2k+1(k\in N^+)$，且对于任意的$i(i=1,2,\cdots,m-2)$，均有$\frac{c_i-c_{i+1}}{c_i-c_{i+2}}<0$，证明：$|c_m-c_1|\geq 2k$.

1、第一问的第一小问考查了等差数列的定义、通项公式以及数列累加求和方法；
2、第一问的第二小问考查了概率、组合数与数列的知识交汇；
3、第二问考查了学生对新定义数列性质的理解应用能力；
4、本题问题设置难度逐步推进,有效体现了试题各问的区分度.

02 解题思路

过程梳理

对于数列 $\{a_n\}$, 若对任意正整数 n, $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 对应的一阶等差数列.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列, 且 $a_1=1$, 其对应的一阶等差数列 $\{b_n\}$ 首项与公差都为1.

① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

思路展开：

1、一阶等差数列 $\{b_n\}$ 首项与公差都为1，则 $\{b_n\}$ 的通项公式可求，且为带n的一次式；

2、想到用累加求和的方法求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

02 解题思路

过程展示

对于数列$\{a_n\}$，若对任意正整数n，$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，令$b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$对应的一阶等差数列.

（1）若数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，且$a_1=1$，其对应的一阶等差数列$\{b_n\}$首项与公差都为1.

① 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

解：(1)．① 依题意得：$b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$ ……………………1 分

由$b_n=a_{n+1}-a_n=n$，

得$a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1$

$=\dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2}+1$

$=\dfrac{n^2-n}{2}+1$，$\boxed{n\ge 2}$ ……………………3 分

学生容易疏忽对n=1时的验证

因为$a_1=1$满足上式，所以$\boxed{a_n=\dfrac{n^2-n}{2}+1,\ n\ge 1}$

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n^2-n}{2}+1$ ……………………4 分

02 解题思路

过程梳理

对于数列 $\{a_n\}$，若对任意正整数 n，$\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 对应的一阶等差数列.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列，且 $a_1=1$，其对应的一阶等差数列 $\{b_n\}$ 首项与公差都为1.

① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

② 在数列 $\{b_n\}$ 的前100项中随机选取三项，求这三项能构成递增等差数列的概率；

思路展开：

1、对数列 $\{b_n\}$，先确定公差d，则选取的三项可用 a，$a+d$，$a+2d$ 来表示；

2、由于总项数为100，则 $a+2d\le 100$ 且 $d\le 49$；

3、对于确定的d，a 可以取 $1,2,\cdots,100-2d$；故这三项成递增等差数列的个数为 $\sum_{d=1}^{49}(100-2d)=49\times 50$；

4、所以这三项能构成递增等差数列的概率为 $p(A)=\frac{49\times 50}{C_{100}^{3}}=\frac{1}{66}$.

02 解题思路

过程展示

对于数列$\{a_n\}$，若对任意正整数n，$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，令$b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$对应的一阶等差数列.

(1) 若数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，且$a_1=1$，其对应的一阶等差数列$\{b_n\}$首项与公差都为1.

① 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

② 在数列$\{b_n\}$的前100项中随机选取三项，求这三项能构成递增等差数列的概率；

②记选取的三项能够构成递增等差数列为事件A，设该等差数列的公差为d，则这三项可设为$a, a+d, a+2d$，按题意必须满足$a+2d\le 100$且$\boxed{d\le 49}$ ……………………5分

所以对于确定的d，a可以取$1,2,\cdots,100-2d$，故这三项成递增等差数列的个数为

学生容易忽略d的范围

$$\sum_{d=1}^{49}(100-2d)=49\times 50$$ ……………………7分

所以这三项能构成递增等差数列的概率为$p(A)=\dfrac{49\times 50}{C_{100}^{3}}=\dfrac{1}{66}$ ……………………9分

02 解题思路

一题多解

对于数列 $\{a_n\}$，若对任意正整数 n，$\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 对应的一阶等差数列.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列，且 $a_1=1$，其对应的一阶等差数列 $\{b_n\}$ 首项与公差都为1.

① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

② 在数列 $\{b_n\}$ 的前100项中随机选取三项，求这三项能构成递增等差数列的概率；

思路展开：

1、设该三项分别为 b_m, b_k, b_t，则必有 $b_m+b_t=2b_k$；

2、由 $b_k\in N^+$ 可知 $2b_k$ 必为正偶数，则 b_m 与 b_t 必定同为奇数或同为偶数，则只需在数列 $\{b_n\}$ 的奇数项或偶数项中任选两项即可满足题意；

3、所以这三项能构成递增等差数列的概率为 $p(A)=\dfrac{2C_{50}^2}{C_{100}^3}=\dfrac{1}{66}$.

02

解题思路

一题多解

对于数列 $\{a_n\}$，若对任意正整数n，$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$对应的一阶等差数列.

(1) 若数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，且$a_1=1$，其对应的一阶等差数列$\{b_n\}$首项与公差都为1.

① 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

② 在数列$\{b_n\}$的前100项中随机选取三项，求这三项能构成递增等差数列的概率；

②记选取的三项能够构成递增等差数列为事件 A，设该三项分别为 b_m, b_k, b_t，则必有

$\boxed{b_m+b_t=2b_k}$ → 等差中项性质的运用 ……………………………………5 分

由 $b_k\in N^+$ 可知$2b_k$必为正偶数，则 b_m与b_t 必定同为奇数或同为偶数，则只需在 50 项奇数项或 50 项偶数项中任选两项作为 b_m和b_t 即可满足题意 ……………………………………7 分

所以这三项能构成递增等差数列的概率为 $p(A)=\dfrac{2C_{50}^2}{C_{100}^3}=\dfrac{1}{66}$ ……………………………………9 分

02 解题思路

过程梳理

对于数列 $\{a_n\}$, 若对任意正整数 n, $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 对应的一阶等差数列.

（2） 设数列 $\{b_n\}$ 为公差为2且项数不小于4的等差数列, 从中选取m项组成一个新数列 $\{c_m\}$.

若 $m=2k+1(k\in N^+)$, 且对于任意的 $i(i=1,2,\cdots,m-2)$，均有 $\dfrac{c_i-c_{i+1}}{c_i-c_{i+2}}<0$，

证明：$|c_m-c_1|\ge 2k$.

思路展开：

1、由题意, 对于任意的 $i(i=1,2,\cdots,m-2)$ $\dfrac{c_i-c_{i+1}}{c_i-c_{i+2}}<0$, 均有 $\min\{c_{i+1}, c_{i+2}\}<c_i<\max\{c_{i+1}, c_{i+2}\}$，则 ；

2、由 c_i 的任意性可知 c_{m-1} c_m 必然有一个是最大项，另一个为最小项 ；

3、改变项数，考虑 $\{c_m\}$ 中去掉 c_{m-1}，c_m 后的数列，同理可知 c_{m-3} c_{m-2} 必然有一个是最大项, 另一个为最小项;

以此类推，当 $m=2k+1(k\in N^+)$ 时，若 c_m 为最大项，c_{m-1} 为最小项，

$c_m>c_{m-2}>\cdots>c_3>c_1>c_2>c_4>\cdots>c_{m-3}>c_{m-1}$，

$|c_m-c_1|=(c_m-c_{m-2})+(c_{m-2}-c_{m-4})+\cdots+(c_3-c_1)\ge \underbrace{2+2+\cdots+2}_{k个}=2k$；