

解直角三角形与函数综合



典例精析

【典例1】如图1，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 A, B ，与 y 轴交于点 C ，顶点为 $(1, 4)$ 。

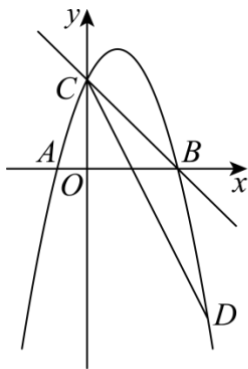


图1

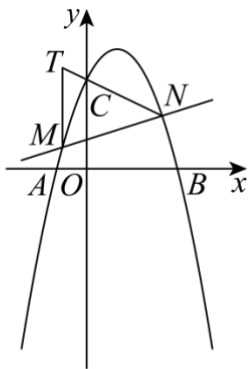


图2

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 若抛物线在第四象限上有一点 D ， $\angle ACO = \angle BCD$ ，求点 D 的坐标；
- (3) 如图2，直线 $y = kx + 1$ 交抛物线于 M, N 两点，直线 $MT \parallel y$ 轴，直线 NC 与 MT 交于点 T ，求 TB 的最小值。

【思路点拨】

- (1) 先把抛物线表示为顶点式 $y = a(x - 1)^2 + 4 = ax^2 - 2ax + a + 4$ ，再求 a 的值即可；
- (2) 设直线 CD 与 x 轴交于点 E ，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F ，设 $EF = BF = x$ ， $CF = 3\sqrt{2} - x$ ，根据三角函数 $\tan \angle ACO = \tan \angle BCD = \frac{OA}{OC} = \frac{EF}{CF} = \frac{x}{3\sqrt{2} - x} = \frac{1}{3}$ 即可；
- (3) 设 $M(m, km + 1), N(n, kn + 1), C(0, 3)$ ，先根据根与系数的关系，得 $m + n = -k + 2, mn = -2$ ，再求出点 M 在直线 $y = 2x + 5$ 上运动，设直线 $y = 2x + 5$ 与 x 轴交于点 G ，与 y 轴交于点 H ，过点 B 作 $BI \perp GH$ ，当点 T 与点 I 重合时， TB 有最小值即可。

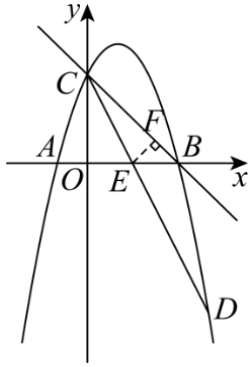
【解题过程】

- (1) 解：抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 的顶点为 $(1, 4)$ ，
 $\therefore y = a(x - 1)^2 + 4 = ax^2 - 2ax + a + 4$ ，
 $\therefore a + 4 = 3$ ，
 $\therefore a = -1$ ，
故抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ；
- (2) 解：抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ，
 $y = 0$ 时， $-x^2 + 2x + 3 = 0$ ，

解得： $x_1 = -1, x_2 = 3$,

$\therefore A(-1,0), B(3,0), C(0,3)$,

设直线 CD 与 x 轴交于点 E ，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F ，



$OA = 1, OC = 3, OC = OB = 3, BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle BOC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle OBC = \angle FEB = 45^\circ$,

$\therefore EF = BF$,

设 $EF = BF = x, CF = 3\sqrt{2} - x$,

$\because \angle ACO = \angle BCD$,

$\therefore \tan \angle ACO = \tan \angle BCD = \frac{OA}{OC} = \frac{EF}{CF} = \frac{x}{3\sqrt{2} - x} = \frac{1}{3}$,

$\therefore x = \frac{3}{4}\sqrt{2}, EF = BF = \frac{3}{4}\sqrt{2}$,

在 $\text{Rt} \triangle EFB$ 中， $BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = \frac{3}{2}, OE = OB - BE = \frac{3}{2}$,

$\therefore E(\frac{3}{2}, 0)$,

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$ ，过点 $E(\frac{3}{2}, 0), C(0, 3)$ ，

$$\begin{cases} \frac{3}{2}k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

解得： $k = -2$,

故直线 CD 的解析式为 $y = -2x + 3$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -5 \end{cases}$,

$\therefore$ 点 D 在第四象限，

故 $D(4, -5)$;

(3) 解: 设 $M(m, km + 1), N(n, kn + 1), C(0, 3)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{得 } x^2 + (k - 2)x - 2 = 0,$$

$$\therefore m + n = -k + 2, mn = -2,$$

$$\therefore k = -m - n + 2,$$

设直线 TN 的解析式为 $y = k_1x + b_1$, 代入 $N(n, kn + 1), C(0, 3)$,

$$\text{得} \begin{cases} b_1 = 3 \\ nk_1 + b_1 = kn + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b_1 = 3 \\ k_1 = k - \frac{2}{n} \end{cases},$$

故直线 TN 的解析式为 $y = (k - \frac{2}{n})x + 3$,

$$\because \text{直线 } MT \parallel y \text{ 轴}, \therefore M(m, km - \frac{2m}{n} + 3),$$

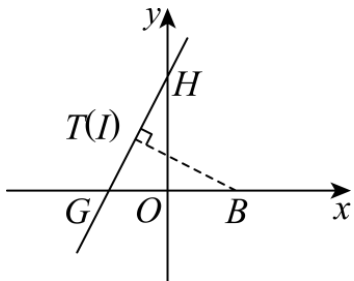
$$\therefore km - \frac{2m}{n} + 3 = (-m - n + 2)m - \frac{2m}{\frac{-2}{m}} + 3 = -mn + 2m + 3 = 2m + 5,$$

$$\therefore M(m, 2m + 5),$$

$$\text{设 } M(x, y), \text{ 则} \begin{cases} x = m \\ y = 2m + 5 \end{cases},$$

点 M 在直线 $y = 2x + 5$ 上运动,

设直线 $y = 2x + 5$ 与 x 轴交于点 G , 与 y 轴交于点 H , 过点 B 作 $BI \perp GH$,



当点 T 与点 I 重合时, TB 有最小值,

$$x = 0 \text{ 时}, y = 5, H(0, 5),$$

$$y = 0 \text{ 时}, x = -\frac{5}{2}, G(-\frac{5}{2}, 0),$$

$$BG = OB + OG = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2},$$

$$\text{在 Rt } \triangle GOH \text{ 中}, GH = \sqrt{OG^2 + OH^2} = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + 5^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5},$$

$$\sin \angle OGH = \frac{OH}{GH} = \frac{BT}{BG} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{5}{2}\sqrt{5}},$$

$$BT = \frac{11}{5}\sqrt{5}.$$



1. (21·22 下·长沙·开学考试) 已知抛物线 $y = kx^2 - 4kx + 3k$ ($k > 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D .

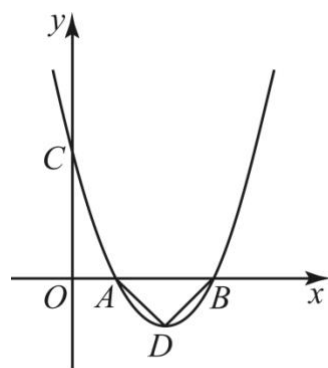


图1

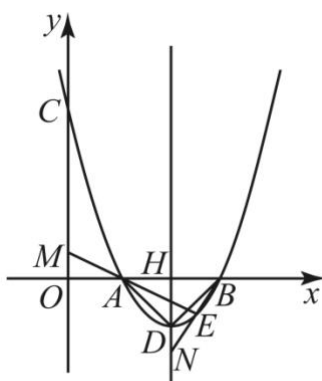


图2

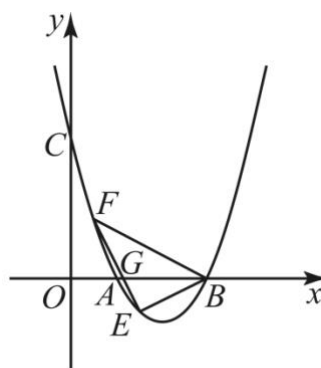


图3

(1) 如图 1, 请求出 A 、 B 、 C 三点的坐标;

(2) 点 E 为 x 轴下方抛物线 $y = kx^2 - 4kx + 3k$ ($k > 0$) 上一动点.

①如图 2, 若 $k = 1$ 时, 抛物线的对称轴 DH 交 x 轴于点 H , 直线 AE 交 y 轴于点 M , 直线 BE 交对称轴 DH 于点 N , 求 $MO + NH$ 的值;

②如图 3, 若 $k = 2$ 时, 点 F 在 x 轴上方的抛物线上运动, 连接 EF 交 x 轴于点 G , 且满足 $\angle FBA = \angle EBA$, 当线段 EF 运动时, $\angle FGO$ 的度数大小发生变化吗? 若不变, 请求出 $\tan \angle FGO$ 的值; 若变化, 请说明理由.

【思路点拨】

(1) 令 $x = 0$, 可求出点 C 的坐标, 令 $y = 0$, 可求出点 A 、 B 的坐标;

(2) 过点 E 作 $EK \perp x$ 轴于点 K , 证明 $\triangle BKE \sim \triangle BHN$, $\triangle AKE \sim \triangle AOM$, 根据相似三角形的性质列出比例关系, 求解即可; ②过 E 作 $EN \perp x$ 轴于点 N , 过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H , 过点 E 作 $EM \perp FH$, 交 FH 的延长线于点 M , 设点 $F(n, 2n^2 - 8n + 6)$, $E(a, 2a^2 - 8a + 6)$, 证明 $\triangle FHB \sim \triangle ENB$, 根据三角形相似列出比例关系, 求出相关线段之间的数量关系, 从而得出 $\tan \angle FGO$ 的值.

【解题过程】

(1) 解: 令 $kx^2 - 4kx + 3k = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 3$,

$\therefore A(1, 0)$, $B(3, 0)$,

令 $x = 0$, 则有 $y = 3k$,

$\therefore C(0,3k)$;

(2) ①当 $k = 1$ 时, 抛物线的解析式 $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$,

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为 $x = 2$,

如图 1, 过点 E 作 $EK \perp x$ 轴于点 K ,

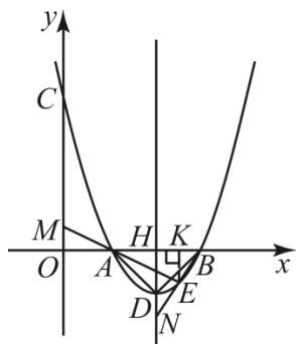


图1

$\because OM \perp x$ 轴, $DH \perp x$ 轴, $EK \perp x$ 轴,

$\therefore OM \parallel DH \parallel EK$,

$\therefore \triangle BKE \sim \triangle BHN$, $\triangle AKE \sim \triangle AOM$,

设点 $E(m, m^2 - 4m + 3)$,

$$\therefore \frac{KB}{HB} = \frac{KE}{HN}, \frac{KE}{MO} = \frac{AK}{AO},$$

$$\text{即 } \frac{3-m}{3-2} = \frac{-m^2+4m-3}{HN}, \frac{-m^2+4m-3}{MO} = \frac{m-1}{1-0},$$

整理可得 $HN = m - 1$, $MO = -m + 3$,

$\therefore MO + NH = m - 1 + (-m + 3) = 2$.

② 不会变化.

如图 2 所示, 过点 E 作 $EN \perp x$ 轴于点 N , 过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H , 过点 E 作 $EM \perp FH$, 交 FH 的延长线于点 M ,

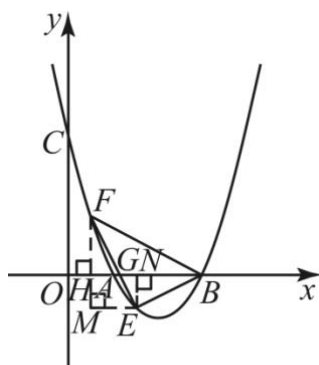


图2

设点 $F(n, 2n^2 - 8n + 6)$, $E(a, 2a^2 - 8a + 6)$,

当 $n > 3$ 时, 不能满足 $\angle FBA = \angle EBA$,

$\therefore n < 1$,

$\therefore \angle FBA = \angle EBA$, $\angle FHB = \angle ENB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle FHB \sim \triangle ENB$,

$$\therefore \frac{FH}{EN} = \frac{HB}{NB},$$

$$\therefore \frac{2n^2 - 8n + 6}{-2a^2 + 8a - 6} = \frac{3 - n}{3 - a}, \text{ 整理可得 } n + a = 2,$$

$\therefore FH \perp x$ 轴, $EM \perp FH$,

$\therefore \angle FHG = \angle FME = 90^\circ$,

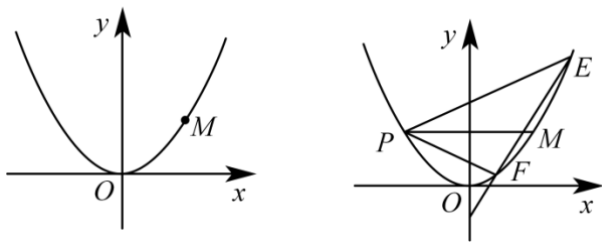
$\therefore HG \parallel ME$,

$\therefore \angle FGO = \angle FEM$,

$$\therefore \tan \angle FGO = \tan \angle FEM = \frac{FM}{EM} = \frac{2n^2 - 8n + 6 - (2a^2 - 8a + 6)}{a - n} = 4.$$

综上所述, 当点 F 和点 E 在抛物线上运动时, $\tan \angle FGO$ 的值不会发生变化, 且 $\tan \angle FGO = 4$.

2. (22·23 下·武汉·模拟预测) 抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 过点 $M(2, 8a^2 + \frac{1}{2})$, N 是抛物线上第二象限一动点,



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若 $\tan \angle OMN = 2$, MN 交 y 轴于 A , 求 $\frac{MA}{NA}$ 的值;

(3) 过点 M 的不与 y 轴平行直线 l_1 与抛物线只有一个公共点, 点 P 与点 M 关于 y 轴对称, 平移直线 l_1 交抛物线于 E 、 F , 求证 PM 平分 $\angle EPF$.

【思路点拨】

(1) 用待定系数法求函数的解析式即可;

(2) 由已知可得 $\tan \angle MOA = \tan \angle OMN = 2$, 所以 $AO = AM$, 设 $A(0, t)$, 可得方程 $t = \sqrt{4 + (t - 1)^2}$, 求出 t 的值可知 A 点坐标, 求出直线 MA 与抛物线的交点即为 N 点, 再由两点间距离公式分别求出 MA 、 NA , 即可求解;

(3) 设过直线 l_1 的解析式为 $y = mx - 2m + 1$ ，由题意可知 $\frac{1}{4}x^2 = mx - 2m + 1$ 的方程只有一个实数根，利用判别式 $\Delta = 0$ ，求出 $m = 1$ ，则直线 l_1 的解析式为 $y = x - 1$ ，设直线 l_1 向左平移 n 个单位，则直线 EF 的解析式为 $y = x + n - 1$ ，可知 $x + n - 1 = \frac{1}{4}x^2$ 的方程有两个实数根，则 $x_E + x_F = 4$ ， $x_E \cdot x_F = 4 - 4n$ ，过点 E 作 $EG \perp PM$ 交于 G 点，过点 F 作 $FH \perp PM$ 交于 H 点，分别求得 $\tan \angle EPM = \frac{EG}{PG} = \frac{\frac{1}{4}x_E^2 - 1}{x_E + 2}$ ， $\tan \angle MPF = \frac{FH}{PH} = \frac{1 - \frac{1}{4}x_F^2}{x_F + 2}$ ，由作差法可得 $\frac{\frac{1}{4}x_E^2 - 1}{x_E + 2} - \frac{1 - \frac{1}{4}x_F^2}{x_F + 2} = \frac{(1-n)(x_E + x_F) - 8 + 4 + 4n}{(x_E + 2)(x_F + 2)} = 0$ ，即可证明 $\angle EPM = \angle MPF$ 。

【解题过程】

(1) 解：将点 $M(2, 8a^2 + \frac{1}{2})$ 代入 $y = ax^2$ ，

$$\therefore 8a^2 + \frac{1}{2} = 4a,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2;$$

(2) 解： $\because a = \frac{1}{4}$,

$$\therefore M(2, 1),$$

$$\therefore \tan \angle MOA = 2,$$

$$\therefore \tan \angle OMN = 2,$$

$$\therefore AO = AM,$$

$$\text{设 } A(0, t),$$

$$\therefore t = \sqrt{4 + (t - 1)^2},$$

$$\text{解得 } t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore A(0, \frac{5}{2}),$$

$$\text{设直线 } MA \text{ 的解析式为 } y = kx + \frac{5}{2},$$

$$\therefore 2k + \frac{5}{2} = 1,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{直线 } MA \text{ 的解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}x^2 \text{ 时, } x = 2 \text{ 或 } x = -5,$$

$$\therefore N(-5, \frac{25}{4}),$$

$$\therefore MA = \frac{5}{2}, NA = \frac{25}{4},$$

$$\therefore \frac{MA}{NA} = \frac{2}{5};$$

(3) 证明：设过直线 l_1 的解析式为 $y = mx - 2m + 1$,

$\because$ 过点 M 的不与 y 轴平行直线 l_1 与抛物线只有一个公共点,

$$\therefore \frac{1}{4}x^2 = mx - 2m + 1 \text{ 的方程只有一个实数根,}$$

$$\therefore \Delta = m^2 - 2m + 1 = 0,$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的解析式为 } y = x - 1,$$

$\because$ 点 P 与点 M 关于 y 轴对称,

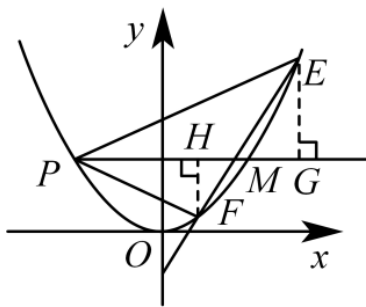
$$\therefore P(-2, 1),$$

设直线 l_1 向左平移 n 个单位, 则直线 EF 的解析式为 $y = x + n - 1$,

$$\therefore x + n - 1 = \frac{1}{4}x^2 \text{ 的方程有两个实数根,}$$

$$\therefore x_E + x_F = 4, x_E \cdot x_F = 4 - 4n,$$

过点 E 作 $EG \perp PM$ 交于 G 点, 过点 F 作 $FH \perp PM$ 交于 H 点,



$$\therefore EG = y_E - 1 = \frac{1}{4}x_E^2 - 1, PG = x_E + 2, FH = 1 - y_F = 1 - \frac{1}{4}x_F^2, HP = x_F + 2,$$

$$\therefore \tan \angle EPM = \frac{EG}{PG} = \frac{\frac{1}{4}x_E^2 - 1}{x_E + 2}, \tan \angle MPF = \frac{FH}{PH} = \frac{1 - \frac{1}{4}x_F^2}{x_F + 2},$$

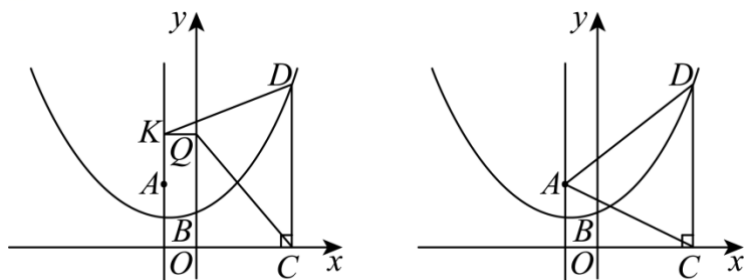
$$\therefore \frac{\frac{1}{4}x_E^2 - 1}{x_E + 2} - \frac{1 - \frac{1}{4}x_F^2}{x_F + 2} = \frac{(1-n)(x_E + x_F) - 8 + 4 + 4n}{(x_E + 2)(x_F + 2)} = 0,$$

$$\therefore \tan \angle EPM = \tan \angle MPF,$$

$$\therefore \angle EPM = \angle MPF,$$

$$\therefore PM \text{ 平分 } \angle EPF.$$

3. (21·22 下·恩施·模拟预测) 如图, 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}(x+h)^2 + k$. 点 $A(-1, 2)$ 在抛物线的对称轴上, $B(0, \frac{5}{4})$ 是抛物线与 y 轴的交点, D 为抛物线上一动点, 过点 D 作 x 轴的垂线, 垂足为点 C .



(1) 直接写出 h, k 的值;

(2) 如图, 若点 D 的坐标为 $(3, m)$, 点 Q 为 y 轴上一动点, 直线 QK 与抛物线对称轴垂直, 垂足为点 K . 探求 $DK + KQ + QC$ 的值是否存在最小值, 若存在, 求出这个最小值及点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图, 连接 AD, AC , 若 $\angle DAC = 60^\circ$, 求点 D 的坐标.

【思路点拨】

(1) 根据二次函数性质进行分析, 即可得到答案;

(2) 由 (1) 可知 $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 1$, 求得 $D(3, 5)$, 作 C 点关于直线 $x = -\frac{1}{2}$ 的对称点 C' , 连接 $C'D$ 交抛物线对称轴于点 K , 连接 CQ , 当 C', K, D 三点共线时, $C'D$ 有最小值, 即 $DK + KQ + QC$ 的值最小, 利用坐标点的距离公式, 得到 $C'D = \sqrt{74}$, 即可求出 $DK + KQ + QC$ 的最小值, 再利用待定系数法求出直线 $C'D$ 的解析式为 $y = \frac{5}{7}x + \frac{20}{7}$, 进而得到点 K 的坐标, 即可求得点 Q 的坐标.

(3) 如图, 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E , 设 $D(m, \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{5}{4})$, 则 $C(m, 0)$, 可得 $CD^2 = (\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{5}{4})^2$, $DE^2 = \frac{3}{4}AD^2 - CE^2 = AC^2 - AC \cdot AD + \frac{1}{4}AD^2$, $DE^2 + CE^2 = AD^2 + AC^2 - AC \cdot AD$, 而 $CD^2 = DE^2 + CE^2$, 再建立方程求解即可.

【解题过程】

(1) 解: $\because$ 点 $A(-1, 2)$ 在抛物线的对称轴上,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore h = 1$,

$\therefore y = \frac{1}{4}(x+1)^2 + k$,

$\because B(0, \frac{5}{4})$ 是抛物线与 y 轴的交点,

$\therefore \frac{1}{4} + k = \frac{5}{4}$,

$$\therefore k = 1;$$

(2) 解：存在最小值，理由如下：

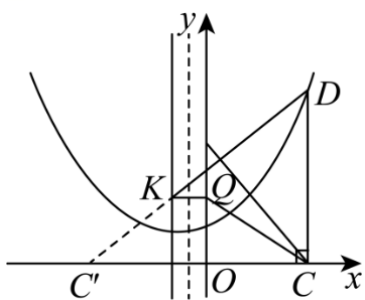
$$\text{由 (1) 可知, } y = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 1,$$

$\because$ 点 D 是抛物线上一点，坐标为 $(3, m)$,

$$\therefore m = \frac{1}{4} \times (3+1)^2 + 1 = 5,$$

$$\therefore D(3, 5),$$

作 C 点关于直线 $x = -\frac{1}{2}$ 的对称点 C' ，连接 $C'D$ 交抛物线对称轴于点 K ，连接 CQ ，



由对称性可知， $C'K = CQ$ ，

$$\therefore DK + KQ + QC = DK + KQ + C'K \geq C'D + KQ,$$

当 C' 、 K 、 D 三点共线时， $C'D$ 有最小值，即 $DK + KQ + QC$ 的值最小，

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ， QK 与抛物线对称轴垂直，

$$\therefore KQ = 1,$$

$$\because D(3, 5), CD \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore C(3, 0),$$

$$\therefore C'(-4, 0),$$

$$\therefore C'D = \sqrt{(3+4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{74},$$

$$\therefore DK + KQ + QC \text{ 的最小值为 } \sqrt{74} + 1,$$

设直线 $C'D$ 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = 0 \\ 3k + b = 5 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{5}{7} \\ b = \frac{20}{7} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } C'D \text{ 的解析式为 } y = \frac{5}{7}x + \frac{20}{7},$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 则 } y = -\frac{5}{7} + \frac{20}{7} = \frac{15}{7},$$

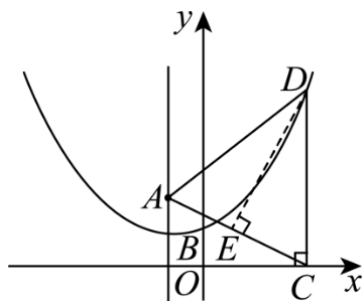
$$\therefore K\left(-1, \frac{15}{7}\right),$$

$$\therefore Q\left(0, \frac{15}{7}\right).$$

$$(3) \because y = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 1 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$$

如图，过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E ，设 $D\left(m, \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{5}{4}\right)$ ，则 $C(m, 0)$ ，

$$\therefore CD^2 = \left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{5}{4}\right)^2,$$



$$\because \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore DE^2 = (AD \cdot \sin 60^\circ)^2 = \frac{3}{4}AD^2, \quad CE^2 = (AC - AD \cdot \cos 60^\circ)^2 = AC^2 - AC \cdot AD + \frac{1}{4}AD^2,$$

$$\therefore DE^2 + CE^2 = AD^2 + AC^2 - AC \cdot AD$$

$$= (m+1)^2 + 4 + \left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{5}{4} - 2\right)^2 + (m+1)^2 - \sqrt{(m+1)^2 + \left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{(m+1)^2 + 4},$$

$$\text{而 } CD^2 = DE^2 + CE^2,$$

$$\text{解得: } m = \pm 2\sqrt{3} - 1,$$

$$\because D \text{ 在第二象限, 则 } m > 0,$$

$$\therefore m = 2\sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore D(2\sqrt{3} - 1, 4).$$

4. (2022·黑龙江哈尔滨·一模) 已知：在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴的负半轴上，直线 $y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3}$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 C 、 B 两点，直线 AB 与 x 轴交于点 A ，且点 C 与点 A 关于 y 轴对称。

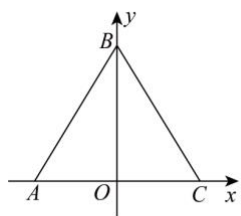


图1

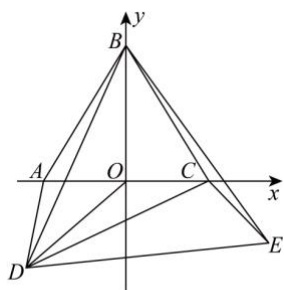


图2

(1) 如图 1, 求点 A 的坐标;

(2) 如图 2, 点 D 为第三象限一点, 以 BD 为边作等边 $\triangle BDE$, 连接 BD 、 OD 、 CD 、 AD 、 CE , 设点 D 的纵坐标为 t , $\triangle BCD$ 的面积与 $\triangle BCE$ 的面积和为 $S (S \neq 0)$, 求 S 与 t 之间的函数关系式 (不要求写出自变量的取值范围);

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $\angle CAD$ 为钝角, $\triangle ABD$ 的面积 $= -\frac{7}{2}t - \frac{15\sqrt{3}}{4}$, $BD = 2OD$, 求点 D 坐标.

【思路点拨】

(1) 首先令 $y = 0$, 解得 $x = \frac{7}{2}$, 即可确定点 C 坐标, 结合轴对称的性质可得点 A 坐标;

(2) 首先证明 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 然后证明 $\triangle ABD \cong \triangle CBE (SAS)$, 易得 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBE}$, 然后根据 $S = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CBE} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$, 即可获得答案;

(3) 由面积关系可求出 t 的值, 由两点间距离公式可列方程, 结合题意 $\angle CAD$ 为钝角, 即可获得答案.

【解题过程】

(1) 解: 对于直线 $y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3}$,

令 $y = 0$, 可得 $-\sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3} = 0$,

解得 $x = \frac{7}{2}$, 即 $C(\frac{7}{2}, 0)$,

$\because$ 点 C 与点 A 关于 y 轴对称,

$\therefore$ 点 $A(-\frac{7}{2}, 0)$;

(2) $\because A(-\frac{7}{2}, 0)$, $C(\frac{7}{2}, 0)$,

$\therefore AC = \frac{7}{2} - (-\frac{7}{2}) = 7$,

对于直线 $y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3}$,

令 $x = 0$, 可得 $y = \frac{7\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore B(0, \frac{7\sqrt{3}}{2})$,

$\therefore OB = \frac{7\sqrt{3}}{2}$,

在 $Rt \triangle BOC$ 中,

$\because \tan \angle BCO = \frac{OB}{OC} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{\frac{7}{2}} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle BCO = \angle BAO = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB = BC, \angle ABC = 60^\circ,$

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形,

$\therefore BD = BE, \angle DBE = 60^\circ,$

$\therefore \angle ABD + \angle DBC = \angle DBC + \angle CBE,$

$\therefore \angle ABD = \angle CBE,$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBE (\text{SAS}),$

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBE},$

$\therefore \triangle BCD$ 的面积与为 $\triangle BCE$ 的面积和 $S = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CBE}$

$$= S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD}$$

$$= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot OB + \frac{1}{2} AC \cdot y_D$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 7 \times t$$

$$= -\frac{7}{2}t + \frac{49\sqrt{3}}{4},$$

即 S 与 t 之间的函数关系式为 $S = -\frac{7}{2}t + \frac{49\sqrt{3}}{4}$;

(3) 设点 $D(a, t)$,

由 (2) 可知, $S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD} = -\frac{7}{2}t + \frac{49\sqrt{3}}{4}$,

$$\text{又} \because S_{\triangle ABD} = -\frac{7}{2}t - \frac{15\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = 16\sqrt{3}, \text{ 即 } S_{\triangle BOC} + S_{\triangle BOD} + S_{\triangle OCD} = 16\sqrt{3},$$

$$\therefore 16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{2} \times (-a) + \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times (-t),$$

整理可得 $128\sqrt{3} = 49\sqrt{3} - 14\sqrt{3}a - 14t$,

$$\therefore t = \frac{-79\sqrt{3} - 14\sqrt{3}a}{14},$$

$$\therefore BD = 2OD,$$

$$\therefore BD^2 = 4OD^2,$$

$$\therefore a^2 + \left(t - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4(a^2 + t^2),$$

$$\therefore \frac{147}{4} - 7\sqrt{3}t = 3a^2 + 3t^2,$$

$$\therefore (28a + 94)^2 = 256,$$

$$\text{解得 } a_1 = -4, a_2 = -\frac{20}{7},$$

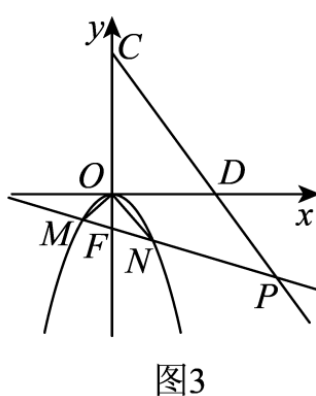
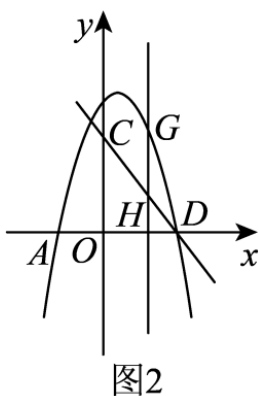
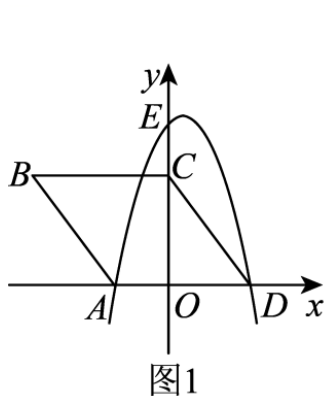
$\because \angle CAD$ 为钝角,

$$\therefore a = -4,$$

$$\therefore t = -\frac{135\sqrt{3}}{14},$$

$$\therefore D(-4, -\frac{135\sqrt{3}}{14}).$$

5. (21·22 九年级下·湖北武汉·自主招生) 如图 1 在平面直角坐标系 xOy 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 顶点 A 、 C 、 D 均在坐标轴上, 且 $AB = 5$, $2CE = OC$, $\sin B = \frac{4}{5}$.



(1) 求过 A 、 D 、 E 三点的抛物线 C_1 的解析式;

(2) 如图 2, 平行于 y 轴的直线 $x = 2$ 交抛物线 C_1 于点 G , 交直线 CD 于点 H , 平行于 y 轴的直线 $x = a$, 在抛物线 C_1 的对称轴左侧, 交抛物线 C_1 于 S , 交直线 AB 于 T , 若 $GH:ST = 4:3$, 求 a 的值;

(3) 如图 3, 将抛物线 C_1 平移使顶点落在原点上, 在射线 CD 上确定一点 P , 过点 P 作直线 PF , 交 y 轴于点 F , 交抛物线于 M , N , 若 $\triangle MON$ 的外心在边 MN 上, 且 $\angle NPC = \angle OCP$, 求点 P 的坐标.

【思路点拨】

(1) 根据菱形的性质求得 $AD = CD = 5$ 、 $\angle B = \angle ADC$, 解 $\text{Rt} \triangle OCD$ 求得 OC , OD , 然后用待定系数法即可解答;

(2) 先求出抛物线的对称轴可得 $a < \frac{1}{2}$, 再求出直线 CD 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 、直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$, 然后再求得 $GH = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ 、 $ST = \left| -a^2 + \frac{7}{3}a + \frac{26}{3} \right|$, 再根据 $GH:ST = 4:3$ 列绝对值方程即可解答;

(3) 由平移的性质可得平移后抛物线的解析式为 $y = -x^2$, 设 $M(m, -m^2)$, $N(n, -n^2)$,

再根据题意可得 $\triangle MON$ 是以 MN 为斜边的直角三角形, 运用勾股定理列式化简可得 $mn = -\frac{1}{m}$, 即

$M(m, -m^2), N\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m^2}\right)$; 再运用待定系数法可得 $y = \frac{1-m^4}{m^3+m}x - 1$, 进而确定 F 的坐标, 进而确定 CF 的长;

再根据等腰三角形可得 $PF = FC$, 然后根据两点间的距离公式列方程解答即可.

【解题过程】

(1) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 5 的菱形,

$$\therefore AB = AD = CD = BC = 5, \angle B = \angle ADC,$$

$$\because \sin B = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \angle ADC = \sin B = \frac{4}{5};$$

$$\text{在 Rt } \triangle OCD \text{ 中, } OC = CD \cdot \sin \angle ADC = 4, OD = \sqrt{DC^2 - OC^2} = 3; OA = AD - OD = 2,$$

$$\because 2CE = OC,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}OC = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore OE = OC + CE = 4 + 2 = 6,$$

$$\text{即: } A(-2, 0)、B(-5, 4)、C(0, 4)、D(3, 0), E(0, 6);$$

设抛物线的解析式为: $y = a(x+2)(x-3)$, 即: $2 \times (-3)a = 6$, 解得: $a = -1$.

$$\therefore \text{抛物线 } y = -x^2 + x + 6.$$

$$(2) \text{ 解: } \because y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为 } x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a < \frac{1}{2},$$

如图: 设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$

$$\because C(0, 4)、D(3, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} 4 = b \\ 0 = 3k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 4 \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x + 4, \text{ 同理可得: 直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3};$$

$\because$ 平行于 y 轴的直线 $x = 2$ 交抛物线 C_1 于点 G , 交直线 CD 于点 H ,

$$\therefore \text{点 } G(2, 4), H\left(2, \frac{4}{3}\right),$$

$$\therefore GH = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3};$$

$$\text{同理: } ST = \left| -a^2 + a + 6 - \left(-\frac{4}{3}a - \frac{8}{3}\right) \right| = \left| -a^2 + \frac{7}{3}a + \frac{26}{3} \right|,$$

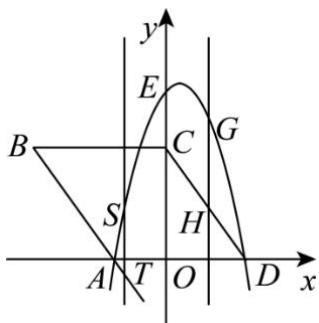
$$\because GH:ST = 4:3,$$

$$\therefore ST = \frac{3}{4}GH = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = 2,$$

$$\therefore \left| -a^2 + \frac{7}{3}a + \frac{26}{3} \right| = 2, \text{ 解得: } a = -\frac{5}{3} \text{ 或 } a = 4 \text{ 或 } a = \frac{7-\sqrt{433}}{6} \text{ 或 } a = \frac{7+\sqrt{433}}{6}$$

$$\because a = 4 > \frac{1}{2}, \quad a = \frac{7+\sqrt{433}}{6} > \frac{1}{2}, \text{ 故舍去,}$$

$$\therefore a = -\frac{5}{3} \text{ 或 } a = \frac{7-\sqrt{433}}{6}.$$



(3) 解: 由平移的性质可得: 平移后抛物线的解析式为: $y = -x^2$,

设 $M(m, -m^2), N(n, -n^2)$,

$\because \triangle MON$ 的外心在边 MN 上,

$\therefore \triangle MON$ 是以 MN 为斜边的直角三角形,

$$\therefore MN^2 = OM^2 + ON^2$$

$$\therefore (m-n)^2 + [-m^2 - (-n^2)]^2 = (-m)^2 + (-m^2)^2 + (-n)^2 + (-n^2)^2, \text{ 整理得: } mn = -1, \text{ 即 } n = -\frac{1}{m};$$

$$\therefore M(m, -m^2), N\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m^2}\right),$$

由待定系数法可得直线 MN 的解析式为: $y = \frac{1-m^4}{m^3+m}x - 1$,

当 $x = 0$ 时, $y = -1$, 即 $F(0, -1)$, 则 $CF = OC + OF = 4 + 1 = 5$

设 P 点坐标为 $\left(a, -\frac{4}{3}a + 4\right)$, 则 $PF^2 = (a-0)^2 + \left(-\frac{4}{3}a + 4 + 1\right)^2 = \frac{25}{9}a^2 - \frac{40}{3}a + 25$,

$$\because \angle NPC = \angle OCP,$$

$$\therefore PF = FC,$$

$$\therefore PF^2 = FC^2 = 25,$$

$$\therefore \frac{25}{9}a^2 - \frac{40}{3}a + 25 = 25, \text{ 解得: } a = \frac{24}{5} \text{ 或 } a = 0 \text{ (不合题意舍去)}$$

$$\therefore P \text{ 点坐标为 } \left(\frac{24}{5}, -\frac{36}{15}\right).$$

6. (21·22 下·武汉·一模) 已知抛物线 $y = ax^2 - (5a + \frac{1}{2})x + 4a + 2 (a < 0)$.

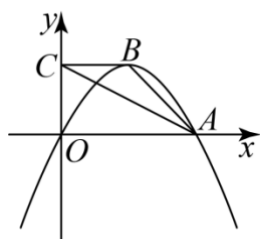


图1

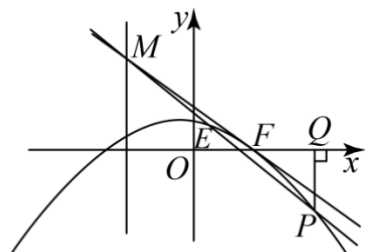


图2

(1) 若抛物线的对称轴为 $x = 2$, 求该抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 在 (1) 的条件下, 抛物线与 x 轴交于 O, A 两点, 顶点为 B , 已知点 $C(0, 2)$, 连 AB, AC, BC , 若点 P 为抛物线上一点, 且满足 $\angle OAC + \angle POA = \angle BAO$, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 抛物线过两个定点, 其中一个定点为第一象限内的点 E , 另一个定点为 x 轴上的点 F , 过点 F 作直线 l 与抛物线有且只有一个交点 (l 不与 x 轴垂直), 直线 l 与直线 $x = -5$ 交于点 M . 直线 ME 交抛物线于另一点 P . 过点 P 作线段 $PQ \perp x$ 轴于点 Q , 求证: 线段 FQ 的长为定值.

【思路点拨】

(1) 用待定系数法求函数关系式即可解题;

(2) 先求出直线 AB 的解析式 $y = -x + 4$, 延长 AB 交轴于点 K , 过 C 作 $CH \perp AK$ 于 H , $CK = 2, KH = CH = \sqrt{2}$, 得到 $\tan \angle CAK = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$, 即 $\tan \angle POA = \frac{1}{3}$, 代入解题即可;

(3) 求出定点坐标 $E(1, \frac{3}{2}), F(4, 0)$, 求出直线 MF, ME 的解析式, 然后求出 $x_P = x_Q = \frac{17}{2}$, 代入解题即可.

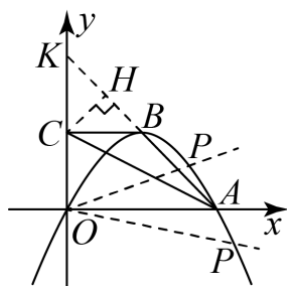
【解题过程】

(1) $\because$ 若抛物线的对称轴为 $x = 2$,

$$\therefore \frac{5a + \frac{1}{2}}{2a} = 2, \text{ 解得: } a = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{该抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

(2) $\because$ 抛物线的解为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$,



令 $y=0$, 则 $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, 解得: $x = 0$ 或 $x = 4$,

$$\therefore A(4,0),$$

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2,$$

$$\therefore B(2,2),$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 4k + b = 0 \\ 2k + b = 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 4,$$

令 $x = 0$, 则 $y = 4$,

延长 AB 交 y 轴于点 K , 过 C 作 $CH \perp AK$ 于 H , 则 $OC = 2$, $OA = 4$, $K(0, 4)$,

$$\therefore AK = \sqrt{OA^2 + OK^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore CK = 2, KH = CH = \sqrt{2},$$

$$\therefore AH = AK - HK = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle CAK = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\because \angle OAC + \angle POA = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle POA = \angle CAK,$$

$$\therefore \tan \angle POA = \frac{1}{3},$$

$$\text{设 } P\left(p, -\frac{1}{2}p^2 + 2p\right),$$

$$\therefore \frac{\left|-\frac{1}{2}p^2 + 2p\right|}{p} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得: } p = \frac{10}{3} \text{ 或 } p = \frac{14}{3},$$

$$\therefore P_1\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{9}\right), P_2\left(\frac{14}{3}, -\frac{14}{9}\right);$$

$$(3) \because y = ax^2 - \left(5a + \frac{1}{2}\right)x + 4a + 2$$

$$y = a(x^2 - 5x + 4) + \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)$$

$\therefore$ 过定点,

$$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, x_2 = 4,$$

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{3}{2}$, 当 $x = 4$ 时, $y = 0$,

$\therefore E\left(1, \frac{3}{2}\right), F(4, 0)$,

设直线 MF 的解析式为 $y = mx + n$,

将 $F(4, 0)$ 代入得 $4m + n = 0$, 解得 $n = -4m$,

$\therefore y = mx - 4m$,

$\therefore$ 直线 l 与抛物线有且只有一个交点可求

$\therefore ax^2 - \left(5a + \frac{1}{2}\right)x + 4a + 2 = mx - 4m$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = \left(5a + \frac{1}{2} + m\right)^2 - 4a(4a + 2 + 4m) = 0$,

$\therefore m = 3a - \frac{1}{2}$,

$\therefore y = \left(3a - \frac{1}{2}\right)x + 2 - 12a$,

令 $x = 5$, 得 $y = 5\left(3a - \frac{1}{2}\right) + 2 - 12a = -27a + \frac{9}{2}$,

$\therefore M\left(-5, -27a + \frac{9}{2}\right)$,

又 $\therefore E\left(1, \frac{3}{2}\right)$,

同理可得直线 ME 的解析式为: $y = \left(\frac{9}{2}a - \frac{1}{2}\right)x + 2 - \frac{9}{2}a$

由 $ax^2 - \left(5a + \frac{1}{2}\right)x + 4a + 2 = \left(\frac{9}{2}a - \frac{1}{2}\right)x + 2 - \frac{9}{2}a$,

解得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{17}{2}$,

解得: $x_P = x_Q = \frac{17}{2}$,

$\therefore FQ = \frac{17}{2} - 4 = 4.5$ 为定值.

7. (22·23·河源·三模) 如图 1, 抛物线 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 过 $B(3, 0)$, $C(0, -3\sqrt{3})$ 两点, 动点 M 从点 B 出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿 BC 方向运动, 设运动的时间为 t 秒.

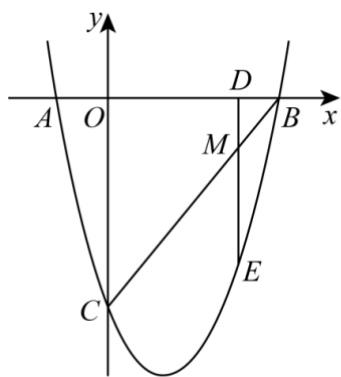


图 1

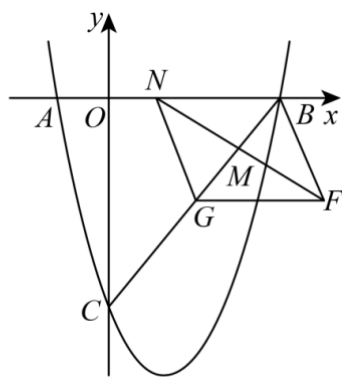


图 2

(1) 求抛物线 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 的表达式;

(2) 如图 1, 过点 M 作 $DE \perp x$ 轴于点 D , 交抛物线于点 E , 当 $t = 1$ 时, 求四边形 $OBEC$ 的面积;

(3) 如图 2, 动点 N 同时从点 O 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿 OB 方向运动, 将 $\triangle BMN$ 绕点 M 逆时针旋转 180° 得到 $\triangle GMF$.

①当点 N 运动到多少秒时, 四边形 $NBFG$ 是菱形;

②当四边形 $NBFG$ 是矩形时, 将矩形 $NBFG$ 沿 x 轴方向平移使得点 F 落在抛物线上时, 直接写出此时点 F 的坐标.

【思路点拨】

(1) 利用待定系数法将 B 、 C 两点坐标代入抛物线 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 求解即可;

(2) 当 $t = 1$ 时求得 BC 长度, 并且利用平行线分线段成比例求得 E 点横坐标, 代入抛物线解析式即可求得 E 点纵坐标, 再根据 $S_{\text{四边形}OBEC} = S_{\text{梯形}ODEC} + S_{\triangle BDE}$ 求解即可;

(3) ①根据题意可求出 $ON = t$, $BN = 3 - t$, $BM = 2t$. 再根据旋转的性质易证四边形 $NBFG$ 是平行四边形, 则四边形 $NBFG$ 是菱形, 只需 $BG \perp NF$ 即可, 又可求出 $\cos \angle MBN = \frac{BM}{BN} = \frac{2t}{3-t}$, $\cos \angle CBO = \frac{OB}{BC} = \frac{1}{2}$, 则

$\frac{2t}{3-t} = \frac{1}{2}$, 解出 t 的值即可; ②当四边形 $NBFG$ 是矩形时, 只需 $\angle BNG = 90^\circ$. 由 $\angle BNG = \angle BOC = 90^\circ$, 得出

$NG \parallel OC$, 利用平行线分线段成比例, 求得 $t = 1$; 将矩形 $NBFM$ 沿 x 轴方向平移时, 点 F 落在抛物线的图象上, 即 $y_F = -2\sqrt{3}$, 再代入解析式即可求得点 F 的坐标.

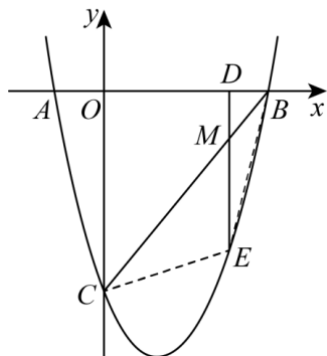
【解题过程】

(1) 解: $\because$ 抛物线 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 的图象过 $B(3, 0)$, $C(0, -3\sqrt{3})$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 9 + 3b + c = 0 \\ -3\sqrt{3} = c \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = -\sqrt{3} \\ c = -3\sqrt{3} \end{cases},$$

∴ 抛物线的表达式为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$;

(2) 解：如图：



$$\because B(3,0), C(0,-3\sqrt{3}),$$

$$\therefore OB = 3, OC = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 6.$$

$$\text{当 } t = 1 \text{ 时, } BM = 2t = 2.$$

$$\because DM \perp AB, OC \perp AB,$$

$$\therefore DM \parallel OC,$$

$$\therefore \frac{BD}{OB} = \frac{BM}{BC}, \text{ 即 } \frac{BD}{3} = \frac{2}{6},$$

$$\therefore BD = 1,$$

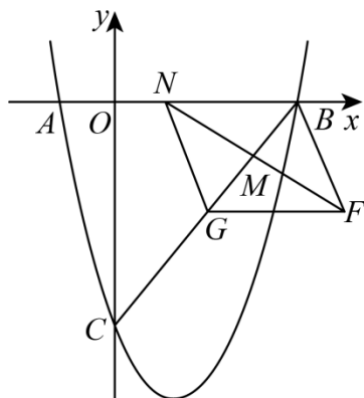
$$\therefore OD = OB - BD = 3 - 1 = 2.$$

$$\text{在 } y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} \text{ 中, 令 } x = 2, \text{ 得: } y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2^2 - \sqrt{3} \times 2 - 3\sqrt{3} = -\frac{7\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore E\left(2, -\frac{7\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OBEC} = S_{\text{梯形}ODEC} + S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{7\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3}\right) \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{13\sqrt{3}}{2};$$

(3) 解：①如图：



根据题意得： $ON = t$ ， $BN = 3 - t$ ， $BM = 2t$ ．

∵将 $\triangle BMN$ 绕点 M 逆时针旋转 180° 得到 $\triangle GMF$ ，

∴ $BM = GM$ ， $NM = FM$ ，

∴四边形 $NBFG$ 是平行四边形，

若四边形 $NBFG$ 是菱形， 只需 $BG \perp NF$ ， 即 $\angle BMN = 90^\circ$ ，

此时 $\cos \angle MBN = \frac{BM}{BN} = \frac{2t}{3-t}$ ．

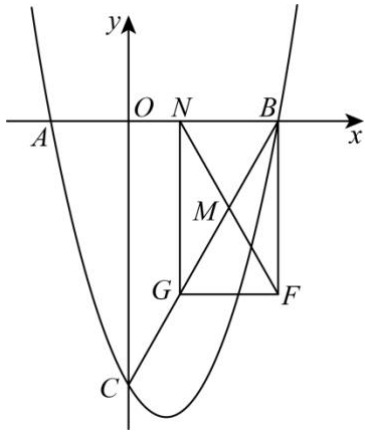
在 $\text{Rt} \triangle BOC$ 中， $\cos \angle CBO = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ，

∴ $\frac{2t}{3-t} = \frac{1}{2}$ ，

解得： $t = \frac{3}{5}$ ，

答： 当点 N 运动到 $\frac{3}{5}$ 秒时， 四边形 $NBFG$ 是菱形；

②如图：



由①得四边形 $NBFG$ 是平行四边形．

当四边形 $NBFG$ 是矩形时， 只需 $\angle BNG = 90^\circ$ ．

∴ $\angle BNG = \angle BOC = 90^\circ$ ，

∴ $NG \parallel OC$ ，

∴ $\frac{BN}{OB} = \frac{BG}{BC}$ ， 即 $\frac{3-t}{3} = \frac{4t}{6}$ ，

解得： $t = 1$ ．

∴当点 N 运动 1 秒时， 四边形 $NBFM$ 是矩形．

∴ $NB = 3 - 1 = 2$ ， $BG = 4$ ，

∴ $NG = \sqrt{BG^2 - NB^2} = 2\sqrt{3}$ ．

将矩形 $NBFM$ 沿 x 轴方向平移时,点 F 落在抛物线的图象上,即 $y_F = -2\sqrt{3}$.

当 $y_F = -2\sqrt{3}$ 时,即 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$,

解得: $x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$,

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(\frac{3+\sqrt{33}}{4}, -2\sqrt{3})$ 或 $(\frac{3-\sqrt{33}}{4}, -2\sqrt{3})$.

8. (21·22 上·哈尔滨·期末)如图,在平面直角坐标系中,抛物线 $y = ax^2 + 3ax - 4a(a \neq 0)$ 与 x 轴交与 A, B 两点,与 y 轴交于点 C ,连接 BC , $\tan \angle CBO = 2$.

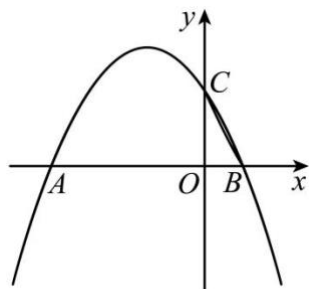


图1

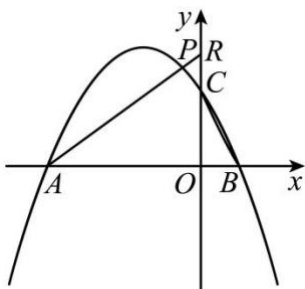


图2

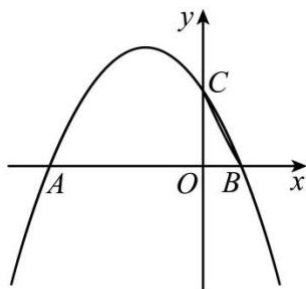


图3

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 为第二象限抛物线上一点,连接 AP 并延长交 y 轴于点 R ,设点 P 的横坐标为 t , OR 的长为 d ,求 d 与 t 的函数关系式;

(3) 在(2)的条件下,当 $d = 8$ 时,过点 P 作 $PH \perp AB$ 于点 H ,过点 H 作 $HD \perp AP$ 于点 D ,过点 B 作 $BE \perp BA$ 交 DH 的延长线于点 E ,连接 PE 交 x 轴于点 F ,连接 CF , G 为线段 BC 上一点,连接 FG ,若 $\angle BFG + \angle CFO = 90^\circ$,求 $\triangle CFG$ 的面积.

【思路点拨】

(1) 根据抛物线与 x 的交点,可求点 A, B 的坐标,根据二次函数与 y 相交,可用含 a 的式子表示点 C 的坐标,根据 $\tan \angle CBO = 2$,即可求解;

(2) 点 P 为第二象限抛物线上一点,设 $P(t, -\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2)$ ($t < 0$),则 $R(0, d)$,如图所示,过 P 作 $PP' \perp x$ 轴于点 P' ,可证 $\triangle APP' \sim \triangle ARO$,由此即可求解;

(3) 根据题意作图,可求出点 P, H 的坐标,根据正切的值的计算可求出 BE 的长,确定点 E 的坐标,由此可求出 PE 所在直线的解析式,确定点 F 的坐标,根据 $\angle BFG + \angle CFO = 90^\circ$ 可证 $\triangle BFG \sim \triangle BCO$,由此可求出 CG, FG 的值,根据三角形的面积计算公式即可求解.

【解题过程】

(1) 解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 3ax - 4a(a \neq 0)$ 与 x 轴交与 A, B 两点,

∴令 $y = 0$ 得, $ax^2 + 3ax - 4a = 0$, 且 $a \neq 0$,

∴ $x^2 + 3x - 4 = 0$, 解得, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$,

∴ $A(-4, 0)$, $B(1, 0)$, 则 $OA = 4$, $OB = 1$,

∵抛物线 $y = ax^2 + 3ax - 4a$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 C ,

∴ $C(0, -4a)$, 则 $OC = -4a$,

在 $\text{Rt} \triangle BOC$ 中, $\tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = 2$,

∴ $\frac{-4a}{1} = 2$, 解得, $a = -\frac{1}{2}$,

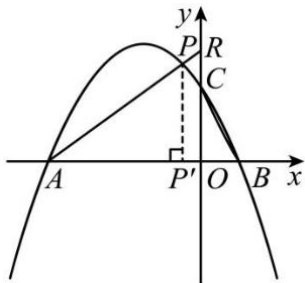
把 $a = -\frac{1}{2}$ 代入抛物线 $y = ax^2 + 3ax - 4a$ ($a \neq 0$) 得, $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$,

∴抛物线的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$.

(2) 解: 由(1)可知, 抛物线的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$, 点 P 为第二象限抛物线上一点,

∴设 $P\left(t, -\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2\right)$ ($t < 0$), 则 $R(0, d)$, 且 $A(-4, 0)$,

如图所示, 过 P 作 $PP' \perp x$ 轴于点 P' ,



∴ $PP' = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2$, $AP' = t - (-4) = t + 4$, $RO = d$, $OA = 4$,

∴ $PP' \parallel OR$,

∴ $\triangle APP' \sim \triangle ARO$,

∴ $\frac{AP'}{AO} = \frac{PP'}{RO} = \frac{AP}{AR}$, 即 $\frac{|t+4|}{4} = \frac{\left|-\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2\right|}{|d|}$,

∵点 P 在第二象限,

∴ $-\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2 > 0$, $d > 0$, $-4 < t < 0$,

∴ $\frac{t+4}{4} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 2}{d}$, 整理得, $d(t+4) = (-2t+2)(t+4)$,

∴ $d = -2t + 2$,

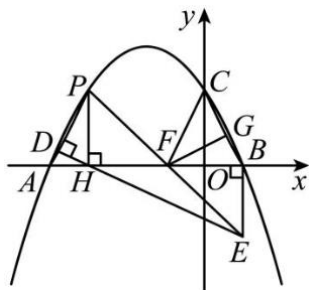
∴ d 与 t 的函数关系式为: $d = -2t + 2$ ($-4 < t < 0$).

(3) 解: 由 (2) 可知, $d = -2t + 2 (-4 < t < 0)$,

$\therefore$ 当 $d = 8$ 时, $t = -3$, 则 $-\frac{1}{2} \times (-3)^2 - \frac{3}{2} \times (-3) + 2 = 2$,

$$\therefore P(-3, 2),$$

根据题意，作图如下，



$\therefore PH \perp x$ 轴,

$$\therefore H(-3,0), \text{ 且 } A(-4,0),$$

$$\therefore PH = 2, AH = -3 - (-4) = 1, \text{ 即 } PH = 2AH,$$

$$\therefore \tan \angle APH = \frac{AH}{PH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DH \perp AP,$$

$$\therefore \angle PAH + \angle APH = 90^\circ = \angle PAH + \angle AHD,$$

$$\therefore \angle APH = \angle AHD, \text{ 且 } \angle AHD = \angle BHE \text{ (对顶角相等),}$$

$\therefore \tan \angle BHE = \tan \angle APH = \frac{1}{2}$, 且 $B(1,0)$, $H(-3,0)$, 则 $BH = 1 - (-3) = 4$,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore E(1, -2), \text{ 且 } P(-3, 2),$$

设过点 P, E 的直线的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\therefore \begin{cases} k+b=-2 \\ -3k+b=2 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k=-1 \\ b=-1 \end{cases},$$

$\therefore PE$ 所在直线的解析式为 $y = -x - 1$,

令 $y = 0$, 则 $x = -1$,

$\therefore F(-1,0)$, 则 $OF = 1 = OB$,

$$\therefore CF = CB,$$

$$\therefore B(1,0), \quad C(0,2),$$

$\therefore$ 设 BC 所在直线的解析式为 $y = mx + n (m \neq 0)$,

(1) 求点 B 坐标及二次函数的表达式;

(2) 如图1, 平移线段 AC , 点 A 的对应点 D 落在二次函数在第四象限的图像上, 点 C 的对应点 E 落在直线 AB 上, 直接写出四边形 $ACED$ 的形状, 并求出此时点 D 的坐标;

(3) 如图2, 在(2)的条件下, 连接 CD , 交 x 轴于点 M , 点 P 为直线 CD 上方抛物线上一个动点, 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴, 交 CD 于点 F , 连接 PC , 是否存在点 P , 使得以 P 、 C 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle COM$ 相似? 若存在, 求出线段 PF 的长度; 若不存在, 请说明理由.

【思路点拨】

(1) 依据一次函数与坐标轴交点特征可求 A 点、 B 点坐标, 将 A 、 C 点坐标代入抛物线可求二次函数表达式;

(2) 由平移性质可知, $DE \parallel AC$ 且 $DE = AC$, 故四边形 $ACED$ 是平行四边形, 由平行四边形顶点坐标的相对位置关系, 可以设 D 点坐标并表示 E 点坐标, 将 E 点坐标代入所在直线解析式建立方程即可求解, 即可获得答案;

(3) 依题意, $\angle PFC = \angle OCM$, 要使得两三角形相似, 只需再找另一组角相等. 可找 $\angle CPF = \angle COM = 90^\circ$ 或 $\angle PCF = \angle COM = 90^\circ$, 分别求解即可.

【解题过程】

(1) 解: 根据题意, 对于一次函数 $y = x - 3$,

令 $y = 0$, 得 $x = 3$,

$\therefore A(3, 0)$,

令 $x = 0$, 得 $y = -3$,

$\therefore B(0, -3)$,

将 $A(3, 0)$, $C(0, 3)$ 代入抛物线解析式 $y = -x^2 + bx + c$,

得 $\begin{cases} -9 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$;

(2) 根据题意, 由平移的性质可得 $DE \parallel AC$ 且 $DE = AC$,

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形,

设点 $D(a, -a^2 + 2a + 3)$,

则点 $E(a - 3, -a^2 + 2a + 6)$,

将点 E 代入 $y = x - 3$ 得 $-a^2 + 2a + 6 = a - 3 - 3$,

整理, 可得 $a^2 - a - 12 = 0$,

解得 $a_1 = -3$ (舍去), $a_2 = 4$,

$$\therefore D(4, -5);$$

(3) 存在.

根据题意, $PF \parallel y$ 轴, 则 $\angle PFC = \angle OCM$,

$\therefore \angle CPF = \angle COM = 90^\circ$ 或 $\angle PCF = \angle COM = 90^\circ$ 时, 以 P 、 C 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle COM$ 相似;

① 当 $\angle CPF = \angle COM = 90^\circ$,

$\therefore PF \parallel y$ 轴,

$\therefore PC \perp y$ 轴,

则点 P 与点 C 关于抛物线对称,

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为 $x = 1$,

由二次函数图像的轴对称性得 $PC = 2$,

又 $\therefore D(4, -5)$, 如图 1, 作 $DG \perp y$ 轴于点 G , 则 $DG = 4$, $OG = 5$,

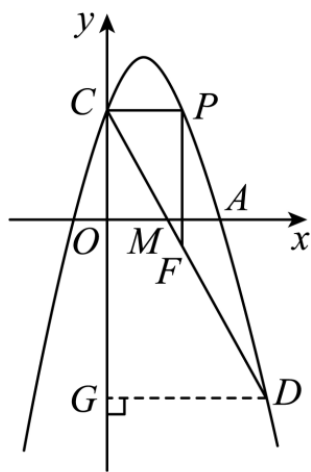


图1

$$\therefore \tan \angle DCG = \frac{DG}{CG} = \frac{4}{5+3} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle PFC = \tan \angle DCG = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{CP}{PF} = \frac{1}{2},$$

又 $\therefore CP = 2$,

$$\therefore PF = 4;$$

② 当 $\angle PCF = \angle COM = 90^\circ$ 时,

如图 2, 作 $CH \perp PF$ 于点 H , 则 $\angle OCH = 90^\circ$,

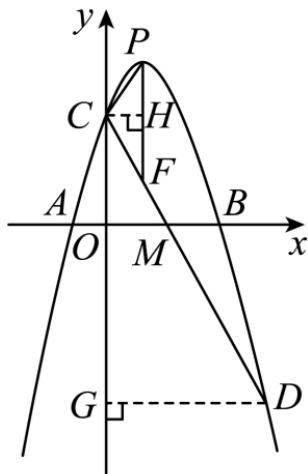


图2

即 $\angle DCG + \angle FCH = 90^\circ$,

又 $\because \angle PCH + \angle FCH = 90^\circ$,

$\therefore \angle DCG = \angle PCH$,

$\therefore \tan \angle PCH = \tan \angle DCG = \frac{1}{2}$,

即 $\frac{PH}{CH} = \frac{1}{2}$,

设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,

则点 $H(m, 3)$,

$\therefore PH = -m^2 + 2m + 3 - 3 = -m^2 + 2m$, $CH = m$,

$\therefore \frac{-m^2 + 2m}{m} = \frac{1}{2}$,

解得 $m = \frac{3}{2}$,

$\therefore CH = \frac{3}{2}$, $PH = \frac{3}{4}$,

又 $\because \tan \angle CFH = \tan \angle DCG = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{CH}{HF} = \frac{1}{2}$,

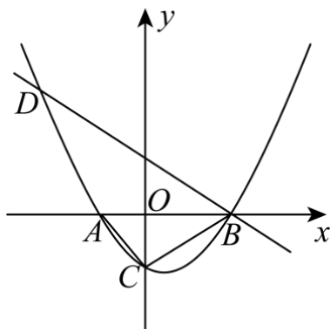
$\therefore FH = 3$,

$\therefore PF = PH + HF = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}$,

综上, 存在这样的点 P 使得以 P 、 C 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle COM$ 相似,

此时 $PF = 4$ 或 $\frac{15}{4}$.

10. (22·23 上·浙江·周测) 如图, 已知抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$ (k 为常数, 且 $k > 0$) 与 x 轴从左至右依次交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 经过点 B 的直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 与抛物线的另一交点为 D .



- (1) 若点 D 的横坐标为 -5 , 求抛物线的函数表达式;
- (2) 若在第一象限的抛物线上有点 P , 使得 $\triangle PAB \sim \triangle ABC$ 相似, 求 k 的值;
- (3) 在 (1) 的条件下, 设 F 为线段 BD 上一点 (不含端点), 连接 AF , 一动点 M 从点 A 出发, 沿线段 AF 以每秒 1 个单位的速度运动到 F , 再沿线段 FD 以每秒 2 个单位的速度运动到 D 后停止. 当点 F 的坐标是多少时, 点 M 在整个运动过程中用时最少?

【思路点拨】

- (1) 首先求出点 A, B 坐标, 然后求出直线 BD 的解析式, 求得点 D 坐标, 代入抛物线解析式, 求得 k 的值;
- (2) 设 $P(x, y)$, 过点 P 作 $PN \perp x$ 轴于点 N , 则 $ON = x$, $PN = y$, 列方程求出 $P(6, 2k)$, 再由 $\triangle ABC \sim \triangle PAB$ 可得 $\frac{AB}{AP} = \frac{CB}{AB}$, 代入数据列出方程求解即可;
- (3) 由题意, 动点 M 运动的路径为折线 $AF + DF$, 运动时间: $t = AF + \frac{1}{2}DF$. 作辅助线, 将 $AF + \frac{1}{2}DF$ 转化为 $AF + FG$; 再由垂线段最短, 得到垂线段 AH 与直线 BD 的交点, 即为所求的 F 点.

【解题过程】

(1) 抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$,

令 $y = 0$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 4$,

$\therefore A(-2, 0), B(4, 0)$.

$\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 经过点 $B(4, 0)$,

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 4 + b = 0$, 解得 $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 直线 BD 解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $x = -5$ 时, $y = 3\sqrt{3}$,

$$\therefore D(-5, 3\sqrt{3}),$$

$\because$ 点 $D(-5, 3\sqrt{3})$ 在抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$ 上,

$$\therefore \frac{k}{8} \times (-5+2) \times (-5-4) = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore k = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为: $y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x+2)(x-4)$.

$$\text{即 } y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}x - \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

(2) 由抛物线解析式, 令 $x = 0$, 得 $y = -k$,

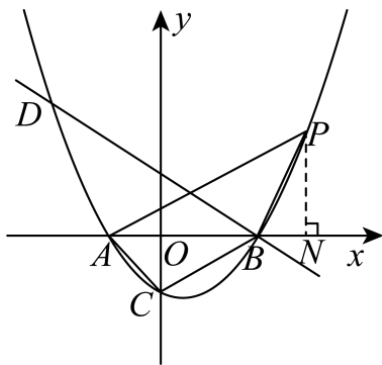
$$\therefore C(0, -k), OC = k.$$

$\because$ 点 P 在第一象限内的抛物线上,

$\therefore \angle ABP$ 为钝角.

若 $\triangle PAB \sim \triangle ABC$, 则有 $\angle ABC = \angle PAB$, 如图所示.

设 $P(x, y)$, 过点 P 作 $PN \perp x$ 轴于点 N , 则 $ON = x$, $PN = y$.



$$\tan \angle ABC = \tan \angle PAB, \text{ 即: } \frac{k}{4} = \frac{y}{x+2},$$

$$\therefore y = \frac{k}{4}x + \frac{k}{2}.$$

$\therefore P\left(x, \frac{k}{4}x + \frac{k}{2}\right)$, 代入抛物线解析式 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$,

$$\text{得 } \frac{k}{8}(x+2)(x-4) = \frac{k}{4}x + \frac{k}{2},$$

$$\text{整理得: } x^2 - 4x - 12 = 0,$$

解得: $x = 6$ 或 $x = -2$ (与点 A 重合, 舍去),

$$\therefore P(6, 2k).$$

$\because \triangle ABC \sim \triangle PAB$,

$$\frac{AB}{AP} = \frac{CB}{AB},$$

$$\therefore \frac{6}{\sqrt{64+4k^2}} = \frac{\sqrt{16+k^2}}{6},$$

解得 $k = \pm\sqrt{2}$,

$\because k > 0$,

$\therefore k = \sqrt{2}$,

综上所述, $k = \sqrt{2}$.

(3) 如图, 过点 D 作 $DN \perp x$ 轴于点 N ,

由 (1) 知: $D(-5, 3\sqrt{3})$,

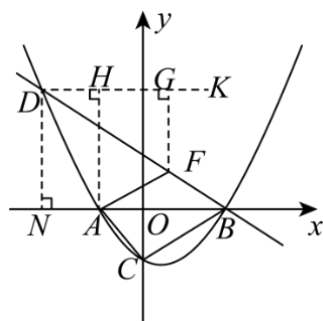
则 $DN = 3\sqrt{3}$, $ON = 5$, $BN = 4 + 5 = 9$,

$$\therefore \tan \angle DBA = \frac{DN}{BN} = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \angle DBA = 30^\circ$.

过点 D 作 $DK \parallel x$ 轴, 则 $\angle KDF = \angle DBA = 30^\circ$.

过点 F 作 $FG \perp DK$ 于点 G , 则 $FG = \frac{1}{2}DF$.



由题意, 动点 M 运动的路径为折线 $AF + DF$, 运动时间: $t = AF + \frac{1}{2}DF$,

$\therefore t = AF + FG$, 即运动的时间值等于折线 $AF + FG$ 的长度值.

由垂线段最短可知, 折线 $AF + FG$ 的长度的最小值为 DK 与 x 轴之间的垂线段.

过点 A 作 $AH \perp DK$ 于点 H , 则 $t_{\text{最小}} = AH$, AH 与直线 BD 的交点, 即为所求之 F 点.

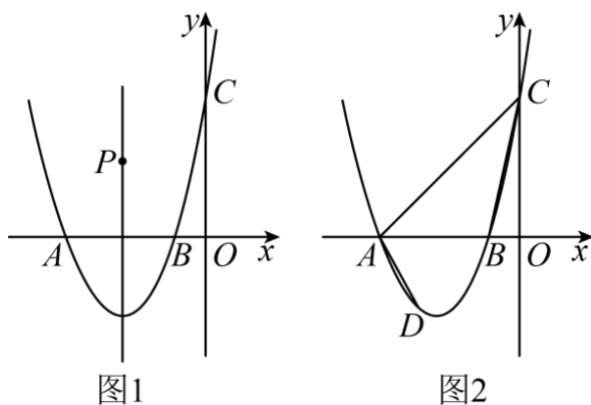
$$\because A \text{ 点横坐标为 } -2, \text{ 直线 } BD \text{ 解析式为: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore F(-2, 2\sqrt{3}),$$

综上所述, 当点 F 坐标为 $(-2, 2\sqrt{3})$ 时, 点 M 在整个运动过程中用时最少.

11. (2023 九年级·山东·专题练习) 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象经过点 $A(-4,0)$, $B(-1,0)$, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求二次函数的表达式;

(2) 如图 1, 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P , 使 $\triangle BCP$ 面积为 5, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图 2, 小明经过探究发现: 位于 x 轴下方的抛物线上, 存在一点 D , 使 $\angle DAB$ 与 $\angle ACB$ 互为余角; 你认为他探究出的结论是否正确? 若正确, 求出点 D 的坐标; 若不正确, 请说明理由.

【思路点拨】

(1) 设抛物线的解析式为: $y = a(x+4)(x+1)$, 代入点 $C(0,4)$, 进一步得出结果;

(2) 过点 P 作 $PT \parallel BC$, 交 x 轴于点 T , 作 $BQ \perp PT$ 于 Q , 可得 $\triangle TBQ \sim \triangle BCO$, 从而 $\frac{BQ}{OC} = \frac{TB}{BC}$, 变形得出 $TB \cdot OC = BC \cdot BQ$, 由 $S_{\triangle PBC} = 5$ 得, $\frac{1}{2}BC \cdot BQ = 5$, 从而 $BC \cdot BQ = 10$, 从而求得 TB , 从而得出点 T 坐标, 进而求得 PT 的解析式, 进一步得出结果, 同样求得另一种情形;

(3) 作 $BF \perp AC$ 于 F , 设 AD 与 y 轴交于点 E , 可推出 $\angle DAB = \angle CBF$, 解斜三角形 ABC , 求得 AF 和 CF , 根据 $\tan \angle DAB = \tan \angle CBF = \frac{CF}{BF} = \frac{5}{3}$, 得出 $\frac{OE}{OA} = \frac{5}{3}$, 从而求得 OE , 进而求出 AD 的解析式, 将其和抛物线的解析式联立, 从而求的点 D 坐标.

【解题过程】

(1) 解: 由题意得: $C(0,4)$,

设抛物线的解析式为: $y = a(x+4)(x+1)$,

$$\therefore 4 = a \cdot 4 \times 1,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore y = (x+4)(x+1) = x^2 + 5x + 4;$$

(2) 如图 1,

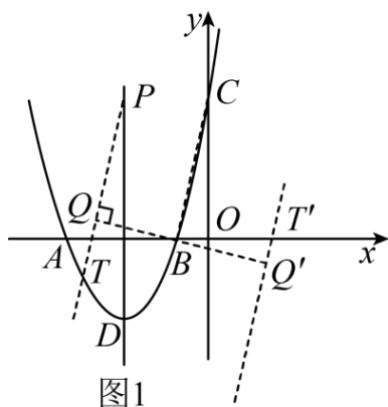


图1

过点 P 作 $PT \parallel BC$, 交 x 轴于点 T , 作 $BQ \perp PT$ 于 Q ,

$$\therefore \angle QTB = \angle CBO, \angle TQB = \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle TBQ \sim \triangle BCO,$$

$$\therefore \frac{TB}{BC} = \frac{BQ}{OC},$$

$$\therefore TB \cdot OC = BC \cdot BQ,$$

$$\because B(-1,0), C(0,4), A(-4,0),$$

$$\therefore OC = 4, OB = 1,$$

设直线 BC 的解析式为: $y = kx + 4$, 把 $B(-1,0)$ 代入, 得: $k = 4$,

$$\therefore y = 4x + 4$$

$$\because PT \parallel BC,$$

$$\therefore k_{PT} = k_{BC} = 4,$$

$$\text{由 } S_{\triangle PBC} = 5 \text{ 得, } \frac{1}{2} BC \cdot BQ = 5,$$

$$\therefore BC \cdot BQ = 10,$$

$$\therefore 4TB = 10,$$

$$\therefore TB = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OT = OB + TB = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\therefore T\left(-\frac{7}{2}, 0\right),$$

设直线 PT 的解析式为 $y = 4x + m$, 把 $T\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$, 代入, 得: $m = 14$,

$$\therefore \text{直线 } PT \text{ 的解析式为 } y = 4x + 14,$$

∵抛物线的对称轴为： $x = -\frac{5}{2}$,

∴当 $x = -\frac{5}{2}$ 时， $y = 4 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 14 = 4$,

∴ $P_1\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$,

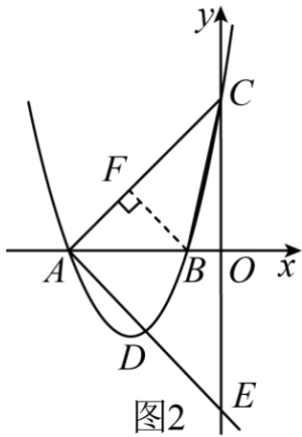
同理可得：直线 $T'Q'$ 的解析式为： $y = 4x - 6$,

∴当 $x = -\frac{5}{2}$ 时， $y = -16$,

∴ $P_2\left(-\frac{5}{2}, -16\right)$,

∴ $P\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$ 或 $\left(-\frac{5}{2}, -16\right)$;

(3) 如图 2,



存在 $D\left(-\frac{8}{3}, -\frac{20}{9}\right)$, 使 $\angle DAB + \angle ACB = 90^\circ$, 理由如下:

作 $BF \perp AC$ 于 F , 设 AD 与 y 轴交于点 E ,

∴ $\angle BFA = \angle BFC = 90^\circ$,

∴ $\angle ACB + \angle CBF = 90^\circ$,

∵ $\angle ACB + \angle DAB = 90^\circ$,

∴ $\angle DAB = \angle CBF$,

∵ $\angle AOC = 90^\circ, OA = OC = 4$,

∴ $\angle CAO = 45^\circ, AC = 4\sqrt{2}$,

∵ $AB = 3$,

∴ $AF = BF = AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

∴ $CF = AC - AF = 4\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \tan \angle DAB = \tan \angle CBD = \frac{CF}{BF} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \frac{OE}{4} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore OE = \frac{20}{3},$$

$$\therefore E\left(0, -\frac{20}{3}\right),$$

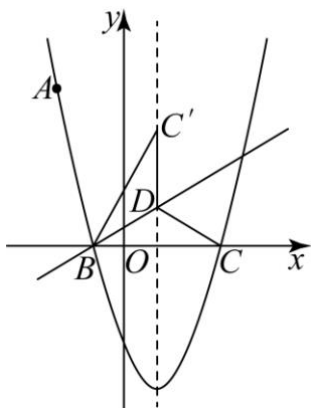
设直线AD的解析式为: $y = nx - \frac{20}{3}$, 把 $A(-4, 0)$, 代入, 得: $n = -\frac{5}{3}$,

$$\therefore \text{直线AD的解析式为: } y = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{3},$$

$$\text{由} \begin{cases} y = x^2 + 5x + 4 \\ y = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{3} \end{cases} \text{得, } \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2 = -\frac{8}{3} \\ y_2 = -\frac{20}{9} \end{cases},$$

$$\therefore D\left(-\frac{8}{3}, -\frac{20}{9}\right).$$

12. (21·22 下·广州·二模)如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 5)$, 与 x 轴相交于 $B(-1, 0)$, $C(3, 0)$ 两点.



(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 点 D 在抛物线的对称轴上, 且位于 x 轴的上方, 将 $\triangle BCD$ 沿直线 BD 翻折得到 $\triangle BC'D$, 若点 C' 恰好落在抛物线的对称轴上, 求点 C' 和点 D 的坐标;

(3) 设 P 是抛物线上位于对称轴右侧的一点, 点 Q 在抛物线的对称轴上, 当 $\triangle CPQ$ 为等边三角形时, 求直线 BP 的函数表达式.

【思路点拨】

(1) 根据待定系数法, 把点 $A(-2, 5)$, $B(-1, 0)$, $C(3, 0)$ 的坐标代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得到方程组求解即可;

(2) 设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 H , 则 H 点的坐标为 $(1, 0)$, $BH = 2$, 由翻折得 $C'B = CB = 4$, 求出 $C'H$ 的长, 可得 $\angle C'BH = 60^\circ$, 求出 DH 的长, 则 D 坐标可求;

(3) 由题意可知 $\triangle C'CB$ 为等边三角形, 分两种情况讨论: ①当点 P 在 x 轴的上方时, 点 Q 在 x 轴上方, 连接 BQ , $C'P$, 证出 $\triangle BCQ \cong \triangle C'CP$, 可得 BP 垂直平分 CC' , 则 D 点在直线 BP 上, 可求出直线 BP 的解析式; ②当点 P 在轴的下方时点 Q 在轴下方, 同理可求出另一直线解析式.

【解题过程】

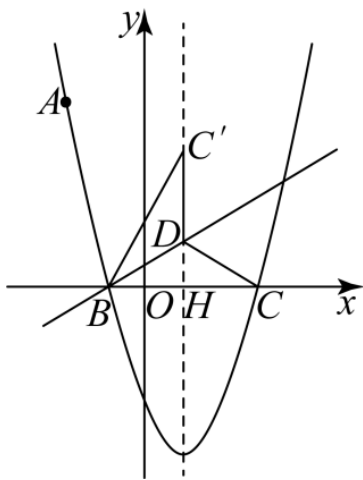
(1) 解: 由题意得:
$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 5 \\ a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$;

(2) $\because$ 抛物线与 x 轴交于 $B(-1, 0)$, $C(3, 0)$,

$\therefore BC = 4$, 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

如图, 设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 H , 则 H 点的坐标为 $(1, 0)$, $BH = 2$,



由翻折得 $C'B = CB = 4$,

在 $\text{Rt} \triangle BHC'$ 中, 由勾股定理, 得 $C'H = \sqrt{C'B^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 C' 的坐标为 $(1, 2\sqrt{3})$, $\tan \angle C'BH = \frac{C'H}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle C'BH = 60^\circ$,

由翻折得 $\angle DBH = \frac{1}{2} \angle C'BH = 30^\circ$,

在 $\text{Rt} \triangle BHD$ 中, $DH = BH \cdot \tan \angle DBH = 2 \cdot \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/705144130143011141>