2024年普通高等学校招生“圆梦杯”统一模拟考试(四)

数 学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合M={x|x²-2x≤3},N={y|y=2-*}, 则M∩N=

A.(-1,1)　　B.(0,+~)　　C.[0,3]　　D.(0,3)

2. 在复平面内，(1-i)(2+3i)对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3. 已知直线l:y=x+m(m>0) 与 OC:(x-1)²+y²=2 交 于A,B 两点，若 |AB|=2, 则m=

A.1　　B.√2　　C.√2-1　　D.√3-1

4. 已知命题p:“tana=2”, 命题q: “$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$”，则命题p 是命题q 的

A．充分必要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5. 已知a=log,3,b=log,5, $c=\frac{3}{2}$ 甲 则

A.a<b<c　　B.a<c<b　　*C.b<c<a*　　*D.c<b<a*

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^x+a}$ 的图象关于点(1, f(1)) 对称，则a=

A.1　　B.2　　C.e　　D.e?

7. 已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$与双曲线，$C_2:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (m>0)$)有公共焦点，记

C_1 与C_2 在x轴上方的两个交点为A,B,　过C 的右焦点作x轴的垂线交C_2 于M,

N 两点，若$\|AB|=\frac{4\sqrt{3}}{3}|MN|$，则$C_1$的离心率为

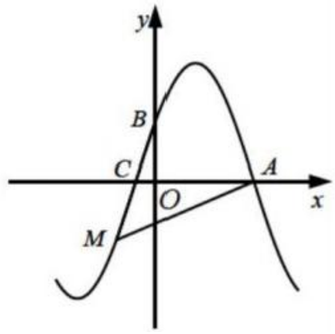
A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，如图， A,

B,C 是曲线y=f(x) 与坐标轴的三个交点，直线BC 交

曲线y=f(x) 于点M, 若直线AM,BM 的斜率分别为

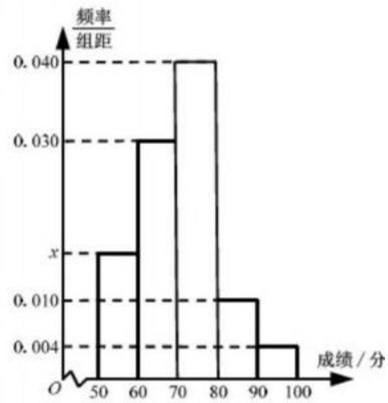
$\frac{3}{7}$ 3 ， 则o=



A. $\frac{\pi}{2}$　　B.π　　C.2π　　D.4π

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 在某市高三年级举行的一次数学期末考试中，为了解考生的成绩情况，随机抽取了50名考生的成绩，作出的频率分布直方图如图.成绩排在前10%的学生将获得“优秀学生”称号，则



A. 估计该市考生的成绩低于60分的比例为16%

B. 估计该市考生成绩的众数为60

C. 估计该市考生成绩的平均数为70.6

D. 估计该市82分以上的考生将获得“优秀学生”称号

10. 记函数f,(x) 的导函数为f(x),　已知f(x)=x²e,　若数列{a,},{b,}　满足

f,(x)=(x²+a₇x+b)e, 则

A.{a} 为等差数列　　B.{b,} 为等比数列

C. $\sum_{n=3}^{50}\frac{1}{b_n}=\frac{48}{49}$　　D.8b,≤2°

11. 已知抛物线E:$y^2=x$,O 为坐标原点，过A(1,0)作 x 轴的垂线交直线$y=kx$ 于 点B, 点C 满 足OB=2BC, 过 B 作 x 轴的平行线交E 于 点P(P 在 B 的 右 侧)，若 $\angle OPC=3\angle OBA$, 则

A.$|BC|=|CP|$　　　　B.$|BP|=|CP$

C. $\sin\angle COP=\frac{1}{4}$　　　　D.△OPC 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 已知向量a, b 的夹角》与$\frac{\pi}{3}$ 若 |b|=2, |a+b|=2 √7, 则 |a|= ________

13. 已知三棱锥P-ABC 的各顶点均在半径为2的球O 表面上，∠AOB=∠AOC=60° OB⊥OC, 则三棱锥O-ABC 的内切球半径为________ ; 若AP=2√2, 则三棱锥 0-PBC 体积的最大值为________

14. 已知数列{a,}满足a+₁=e⁴+, 函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$的极值点为x_0, 若$x_0(a_2+1)$=Ina$_4$ 则a_1+a,= ________

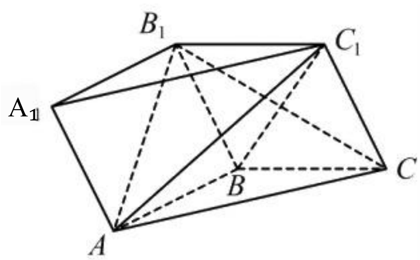
四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13分）

如图，在三棱柱ABC-AB$_1$C 中，$AA_1\perp A_1B_1$,AB⊥BC, 四边形BCC_1B_1是菱形.

(1)证明： $AC_1\perp B_1C$;

(2)若 $AB=BC=\frac{\sqrt{3}}{3}B_1C$, 求二面角B-AC$_1$-C 的正弦值.



16 .（15分）

已知数列{a,}的各项均为正数， a_1=1,a+$_2$a≥a_2

(1)若a_2=3, 证明：a≥3"-;

(2)若a_0=512, 证明：当a_4 取得最大值时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

17．（15分）

已知函数$f(x)=x^4-x(x>0,a\neq1)$.

(1)讨论$f(x)$ 的单调性；

(2)若$f(x)$ 存在极值点x_0，证明：x_0随着a 的增大而增大.

18．（17分）

某游戏设计者设计了一款游戏：玩家在一局游戏内，每点击一次屏幕可以获得一张卡片，共有“A” 和 “B”两种卡片.每位玩家的初始分数为0,每获得一张“A”加 1分，每获得一张“B” 减1分. 已知某位玩家在一局游戏内共点击屏幕i 次，设该玩家获 得“A”的次数为X,， 最终分数为Y.

(1)若玩家每次点击屏幕时，获得“A” 和“B” 的 概 率 均为$\frac{1}{2}$，求X_3的分布列 与数学期望，并直接写出$E(X_1)$的值；

(2)若该游戏系统通过一个计数器来控制玩家获得“A” 和“B” 的概率．计数器会记录玩家已经点击屏幕的次数n （ 初 始 值 为 0），若n 为偶数，则玩家下一次点击屏幕时，获得“A” 和“B” 的概率均为$\frac{1}{2}$；若n 为奇数，则玩家下一次点击屏幕时，获得“A” 的概率》与$\frac{2}{3}$ 获得“B” 的概率斗与$\frac{1}{3}$．求$D(Y)$.

附：若随机变量X_1和X_2的取值是相互独立的，则$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$.

19．（17分）

已知双曲线$C_1:x^2-\frac{y^2}{2}=1$与曲线C:2(x-m³+(0-M²=6有4个交点A,B,C,D （按逆时针排列）.

（1）当m=n =0 时，判断四边形ABCD 的形状；

(2)设O为坐标原点，证明： |OA|²+|OB|²+|OC|²+|ODβ 为定值；

(3)求四边形 ABCD面积的最大值.

附：若方程$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有4个实根x_1,x_2,x_3,x_4， 则

$X_1+x_2+X_3+X_4=-a,X_1X_2+X_1X_3+X_1X_4+X_2X_3+x_2X_4+x_3X_4=b$.

2024年普通高等学校招生“圆梦杯”统一模拟考试(四)

数　学

注意事项:

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合M={x|x²-2x≤3},N={y|y=2-*}, 则M∩N=

A.(-1,1)　　B.(0,+~)　　C.[0,3]　　D.(0,3)

2. 在复平面内，(1-i)(2+3i)对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知直线l:y=x+m(m>0) 与 OC:(x-1)²+y²=2 交 于A,B 两点，若 |AB|=2, 则m=

A.1　　B.√2　　C.√2-1　　D.√3-1

4. 已知命题p:“tana=2”, 命题q: “$\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$”, 则命题p 是命题q 的

A. 充分必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

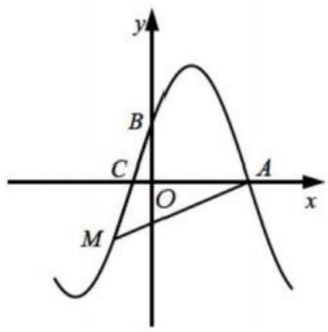
5. 已知a=log,3,b=log,5, $c=\frac{3}{2}$ 甲 则

A.a<b<c　　B.a<c<b　　*C.b<c<a*　　*D.c<b<a*

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^{x}+a}$ 的图象关于点(1, f(1)) 对称，则a=

A.1　　B.2　　C.e　　D.e?

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，如图， A, B,C 是曲线y=f(x) 与坐标轴的三个交点，直线BC交曲线y=f(x) 于点M, 若直线AM,BM 的斜率分别为 $\frac{3}{7}$,, 3，则ω=



A. $\frac{\pi}{2}$　　B.π　　C.2π　　D.4π

8. 已知三棱锥P-ABC 的各顶点均在半径为2的球O 表面上，∠AOB=∠AOC=60°, OB⊥OC, 若AP=2√2, 则三棱锥O-PBC 体积的最大值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知正四棱锥P-ABCD 的表面积为12,AB=2, 则

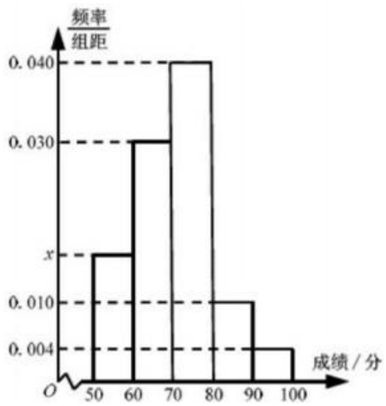
$A.AP\perp BD$

$B.AP\perp CP$

C. 点C 到平面ABP的距离为√2

D. 直线 DP 与平面ABP 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

10. 在某市高三年级举行的一次数学期末考试中，为了解考生的成绩情况，随机抽取了50名考生的成绩，作出的频率分布直方图如图. 成绩排在前10%的学生将获得“优秀学生”称号，则



A. 估计该市考生的成绩低于60分的比例为16%

B. 估计该市考生成绩的众数为60

C. 估计该市考生成绩的平均数为70.6

D. 估计该市82分以上的考生将获得“优秀学生”称号

11．记函数f,(x) 的导函数为f(x), 已知f(x)=x²e*, 若数列{a},{b,} 满足

$f_1(x)=(x^2+a,X+b_7)e$, 则

A. $\{a_1\}$ 为等差数列 B. {b,} 为等比数列

C. $\sum_{n=3}^{50}\frac{1}{b_n}=\frac{48}{49}$ D.8b,≤2⁴

12. 已知抛物线E:y²=x,O 为坐标原点，过A(1,0)作 x 轴的垂线交直线y=kx 于 点B, 点C 满 足OB=2BC, 过 B 作 x 轴的平行线交E 于 点P(P 在 B 的 右 侧 ），若 ∠OPC=3∠OBA, 则

A.|BC|=|CPI B.|BP|=|CP|

C. $\sin\angle COP=\frac{1}{4}$ D.△OPC 的面积为$\frac{\sqrt{15}}{6}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在$(2x^2+x+1)^4$ 的展开式中， x^5 的系数为________（用数字作答）.

14. 已知向量a, b, c 满足a+b+c=0, 若$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$, |b|=2, |c|=2 √7, 则 cos(b,c)= ________

15. 已知椭圆C;$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$与双曲线C₂:$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (m>0)$有公共焦点，记 C_1与C_2在x 轴上方的两个交点为A,B, 过C_1的右焦点作x 轴的垂线交C_2于M, N 两点，若| , 则C_1 的离心率为________.

16. 设函数$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$的极值点为x_0, 则xof(xn)= ________;数列{a, }满足a=e⁴₂+1, 若$x_0(a,+1)=\ln a_4$, 则 $a_1+a,=$ ________

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

记△ABC的内角A,B,C 所对的边分别为a,b,c, 已知acosC+(√2b+c)cosA=0.

（1）求A:

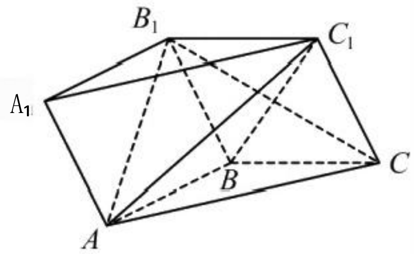
(2)设△ABC的面积为S, 若 a²=10S, 习求$\frac{b}{c}$.

18. （12分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中 ，$AA_1 \perp A_1B_1, AB \perp BC$,
四边形BCC_1B_1是菱形.

(1)证明：

(2)若 $AB = BC = \frac{\sqrt{3}}{3} B_1C$, 求二面角$B-AC_1-C$ 的正弦值.



19. （12分）

已知数列{a,}的各项均为正数， $a_1=1, a+2A \geq a2_4$·

(1)若$a_2=3$, 证明： $a \geq 3'$-;

(2)若$a_{10}=512$, 证明：当a_4 取得最大值时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

20. （12分）

已知函数$f(x)=x^4-x(x>0,a\neq 1)$.

(1)讨论$f(x)$ 的单调性；

(2)若$f(x)$ 存在极值点x_0, 证明：x_0 随着a 的增大而增大.

21. （12分）

某游戏设计者设计了一款游戏：玩家在一局游戏内，每点击一次屏幕可以获得一张卡片，共有“A” 和“B” 两种卡片.每位玩家的初始分数为0,每获得一张“A” 加 1分，每获得一张“B” 减1分. 已知某位玩家在一局游戏内共点击屏幕i 次，设该玩家获得“A” 的次数为X, 最终分数为Y.

(1)若玩家每次点击屏幕时，获得“A” 和“B” 的概率均斗与$\frac{1}{2}$, 求X_3 的分布列与数学期望，并直接写出$E(X_1)$ 的值；

(2)若该游戏系统通过一个计数器来控制玩家获得“A” 和“B” 的概率 . 计数器会记录玩家已经点击屏幕的次数n （初始值为0），若n 为偶数，则玩家下一次点击屏幕时，获得 “A” 和“B” 的概率均头与$\frac{1}{2}$，若n 为奇数，则玩家下一次点击屏幕时，获得 “A”的概率为 $\frac{2}{3}$ 甲 获得“B” 的概率头与$\frac{1}{3}$. 求$D(Y_1)$.

附：若随机变量X_1 和X_2 的取值是相互独立的，则$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$

22. （12分）

已知椭四 $C_1:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$，直线1与$C_1$有且只有一个公共点A($x_0$, y_0)，点P 在C 上.

（1）当x_0=1 时，求1的方程；

（2）求P 到I 距离的最大值(用y。表 示）；

(3)设/与精圆 $C_2:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$交于M,N 两点，若 $|MP|+|NP|=\frac{4\sqrt{3}}{3}|AP|$，求△MPN 面积的最大值.