

2.2: 直线与圆的位置关系

【考点梳理】

考点一：直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系及判断

位置关系		相交	相切	相离
公共点个数		<u>2</u> 个	<u>1</u> 个	<u>0</u> 个
判断方法	几何法: 设圆心到直线的距离为 $d = \frac{ Aa + Bb + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	<u>$d < r$</u>	<u>$d = r$</u>	<u>$d > r$</u>
	代数法: 由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \end{cases}$ 消元得到一元二次方程, 可得方程的判别式 Δ	<u>$\Delta > 0$</u>	<u>$\Delta = 0$</u>	<u>$\Delta < 0$</u>

考点二：直线与圆的方程解决实际问题

仔细读题(审题)→建立数学模型→解答数学模型→检验, 给出实际问题的答案.

【题型归纳】

题型一：判断直线与圆的位置关系

1. (2023·江苏·高二) 直线 $3x+4y+12=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=9$ 的位置关系是 ()
- A. 过圆心
B. 相切
C. 相离
D. 相交但不过圆心

【答案】D

【分析】先求出圆的圆心和半径，再求出圆心到直线的距离，与半径比较可得结论.

【详解】圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ 的圆心为 $(1, -1)$ ，半径 $r = 3$ ，

则圆心到直线 $3x+4y+12=0$ 的距离 $d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times (-1) + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}$,

因为 $0 < d < r$ ，所以直线与圆相交但不过圆心，

故选：D

2. (2022 秋·高二单元测试) 已知点 $M(1,2)$ 是圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ 内一点, 直线 l 是以 M 为中点的弦所在的直线, 直线 m 的方程为 $2x - y = r^2$, 那么 ()
- A. $l \perp m$ 且 m 与圆 C 相切
- B. $l // m$ 且 m 与圆 C 相切
- C. $l \perp m$ 且 m 与圆 C 相离
- D. $l // m$ 且 m 与圆 C 相离

【答案】 C

【分析】由题意可得 $r^2 > 5$ ，从而可求得圆心 $C(0,0)$ 到直线 $m: 2x - y = r^2$ 的距离 $d > r$ ，则可得直线 m 与圆 C 相离，
 求出直线 CM 的斜率，可得 $CM \parallel m$ ，而 $CM \perp l$ ，从而可得结论

【详解】由点 $M(1,2)$ 是圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ 内一点得 $r^2 > 5$ 。

所以圆心 $C(0,0)$ 到直线 $m: 2x - y = r^2$ 的距离为 $d = \frac{r^2}{\sqrt{5}} > \frac{r^2}{\sqrt{r^2}} = r$ 。

故直线 m 与圆 C 相离。

另一方面，直线 CM 的斜率为 $\frac{2-0}{1-0} = 2$ ，而直线 l 以 M 为中点，故直线 $CM \perp l$ 。

又直线 m 的斜率也是 2，所以 $CM \parallel m$ ，所以 $l \perp m$ 。

故选：C。

3. (2022·高二课时练习) 已知直线 $l: (m^2 + m + 1)x + (3 - 2m)y - 2m^2 - 5 = 0$ ，圆 $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ ，则直线 l 与圆 C 的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定

【答案】D

【分析】求出直线 l 过的定点，再判断此定点与圆 C 的位置关系即可作答。

【详解】直线 $l: (m^2 + m + 1)x + (3 - 2m)y - 2m^2 - 5 = 0$ ，即 $(x - 2)m^2 + (x - 2y)m + (x + 3y - 5) = 0$ ，

由 $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ，因此，直线 l 恒过定点 $A(2,1)$ ，

又圆 $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ ，即 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ，显然点 A 在圆 C 外，

所以直线 l 与圆 C 可能相离，可能相切，也可能相交，A，B，C 都不正确，D 正确。

故选：D

题型二：由直线与圆的位置关系求参数

4. (2023 秋·高二课时练习) 已知直线 $l: mx + y - m = 0 (m \in \mathbf{R})$ 和圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ，则“ $m = 0$ ”是“直线 l 与圆 C 相切”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【分析】根据充分条件和必要条件的判断方法，结合直线与圆的位置关系即可求解。

【详解】圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 的方程可化为 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ ，

其圆心坐标为 $(1, -2)$ ，半径为 $r = 2$ ，

当 $m = 0$ 时，直线 $l: y = 0$ ，圆心到直线的距离 $d = 2 = r$ ，此时直线 l 与圆 C 相切，故充分性成立；

当直线 l 与圆 C 相切时，圆心到直线的距离 $d = \frac{|m - 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = r = 2$ ，所以 $m = 0$ ，故必要性成立，

所以“ $m = 0$ ”是“直线 l 与圆 C 相切”的充要条件.

故选：C.

5. (2023 秋·江苏宿迁·高二校考阶段练习) 若直线 $y = kx - 1$ 与曲线 $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ 恰有两个公共点，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[1, \frac{4}{3}\right)$ C. $\left[1, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

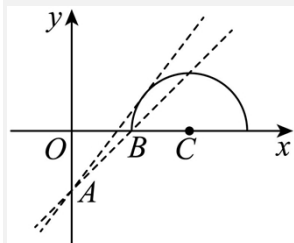
【答案】B

【分析】根据题意得： $y = kx - 1$ 为恒过定点 $A(0, -1)$ 的直线，曲线表示圆心为 $(2, 0)$ ，半径为1的上半圆，由此利用数形结合思想能求出 k 的取值范围.

【详解】根据题意得 $y = kx - 1$ 为恒过定点 $A(0, -1)$ 的直线，

由曲线 $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ ，可得 $(x - 2)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ ，

所以曲线表示圆心为 $C(2, 0)$ ，半径为1的上半圆，如图所示，



当直线与圆 C 相切时，有 $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ ，解得 $k = 0$ （舍去）或 $k = \frac{4}{3}$ ，

把 $B(1, 0)$ 代入 $y = kx - 1$ 得 $k - 1 = 0$ ，解得 $k = 1$ ，

因为直线 $y = kx - 1$ 与曲线 $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ 恰有两个公共点，

由图可得 $1 \leq k < \frac{4}{3}$ ，即 k 的取值范围是 $\left[1, \frac{4}{3}\right)$.

故选：B.

6. (2023 秋·江苏盐城·高二盐城中学校考期末) 已知直线 l 过点 $A(a, 0)$ ，且斜率为 -1 ，若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有4个点到 l 的距离为1，则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $[0, \sqrt{2})$

【答案】C

【分析】首先由点斜式求出直线方程，再确定圆心，由题意知圆心到直线的距离小于1，即可求出 a 的取值范围.

【详解】因为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有4个点到 l 的距离为1，

所以圆心到直线的距离小于1，设圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $O(0,0)$ 到直线的距离为 d ，

又因为过点 $A(a,0)$ ，且斜率为-1的直线方程为 $y = -x + a$ ，即 $x + y - a = 0$ ，

所以 $d = \frac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} < 1$ ，解得 $|a| < \sqrt{2}$ ，即 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

故选：C.

题型三：圆的弦长问题

7. (2023 春·江苏南京·高二江苏省江浦高级中学校联考期中) 直线 $y = x + 1$ 被圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 截得的弦长为1，则半径 $r =$ ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 2

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】B

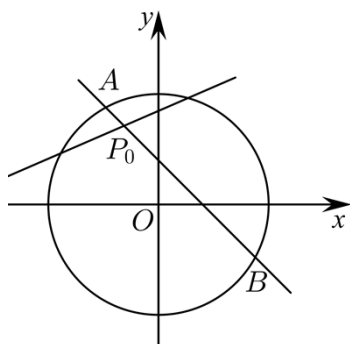
【分析】根据点到直线的距离公式，由勾股定理即可求解.

【详解】圆心 $(0,0)$ 到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

所以 $r^2 = d^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ ，故 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故选：B

8. (2022 秋·江苏连云港·高二校考期末) 如图，圆 $x^2 + y^2 = 8$ 内有一点 $P_0(-1,2)$ ， AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦，若 $\alpha = 135^\circ$ ，则 $|AB| =$ ()



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{30}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $\sqrt{15}$

【答案】B

【分析】先求得直线 AB 的方程，然后利用弦长公式求得 $|AB|$ 。

【详解】直线 AB 的斜率为 $k = \tan 135^\circ = -1$ ，又直线 AB 过点 $P_0(-1, 2)$ ，

所以直线 AB 的方程为： $y - 2 = -(x + 1)$ ，即 $x + y - 1 = 0$ 。

圆心 $O(0, 0)$ 到直线 $AB: x + y - 1 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

则 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{8 - \frac{1}{2}} = \sqrt{30}$ 。

故选：B

9. (2022 秋·江苏南通·高二统考期中) 已知圆 $O_1: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ，圆 $O_2: x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$ ，过点 $(1, 2)$ 两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，其中 l_1 与圆 O_1 交于 A, B ， l_2 与圆 O_2 交于 C, D ，且 $|AB| = \frac{1}{2}|CD|$ ，则 $|AB| =$ ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A

【分析】首先写出过定点 $(1, 2)$ 的两条直线方程，并求得圆心到对应直线的距离，结合弦长公式， $|AB| = \frac{1}{2}|CD|$ ，以及 $k_1 k_2 = -1$ ，列式求直线的斜率，最后求弦长 $|AB|$ 的值。

【详解】设 O_1, O_2 到直线 AB, CD 的距离分别为 d_1, d_2 ，

若过定点 $(1, 2)$ 的直线 l_1, l_2 分别为 $x = 1$ 和 $y = 2$ ，则 $|AB| = |CD| = 1$ ，不满足条件，

当两直线的斜率都存在时，设直线 l_1, l_2 斜率分别为 k_1, k_2 ，则 $k_1 \times k_2 = -1$ ，

直线 l_1, l_2 方程分别为 $k_1 x - y + 2 - k_1 = 0$ ， $k_2 x - y + 2 - k_2 = 0$ ，

由点到直线距离公式可得：

$$d_1 = \frac{|k_1 + 2 - k_1|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + k_1^2}}, d_2 = \frac{|k_2|}{\sqrt{1 + k_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2}},$$

$$\text{又} \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - d_1^2, \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - d_2^2, |AB| = \frac{1}{2}|CD|$$

整理可得 $k_1^2 = 19$ ，

$$\text{所以 } AB = \sqrt{1 - \frac{16}{1 + k_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选：A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/705232042311011223>