

陕西师大附中 2023-2024 学年度高三年级第六次模考

数学（理科）试题

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答案均写在答题纸上，满分 150 分，时间 120 分钟。
2. 答卷前将答题卡上的姓名、班级、考场填写清楚，并检查条形码是否完整、信息是否准确。
3. 答卷必须使用 0.5mm 的黑色签字笔书写，字迹工整、笔迹清晰。并且必须在题号所指示的答题区内作答，超出答题区域的书写无效。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $M = \{1, 4\}$, $N = \{1, 2, 5\}$ ，那么 $N \cap (\complement_U M) =$ ()

- A. $\{1, 2, 5\}$ B. $\{2, 5\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 5\}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据集合的运算，先求 $\complement_U M$ ，再求结果即可。

【详解】根据题意， $\complement_U M = \{2, 3, 5\}$ ，则 $N \cap (\complement_U M) = \{2, 5\}$ 。

故选：B.

2. 复数 $z = \frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}$ 的共轭复数为 ()

- A. -1 B. 1 C. $1-i$ D. $1+i$

【答案】D

【解析】

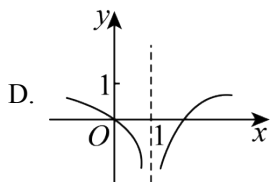
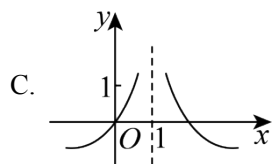
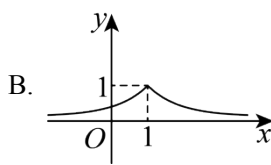
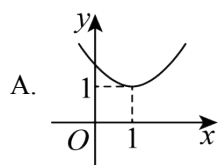
【分析】根据复数的乘方与乘法运算化简运算得复数 z ，再根据共轭复数的概念求解即可。

【详解】因为 $z = \frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(1-i)}{4-i^2} = 1-i$ ，

所以共轭复数 $\bar{z} = 1+i$ 。

故选：D.

3. 若实数 x, y 满足 $|x-1| - \ln \frac{1}{y} = 0$, 则 y 关于 x 的函数图象的大致形状是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】利用特殊值 $x=0$ 和 $x=1$, 分别得到 y 的值, 利用排除法确定答案.

【详解】实数 x, y 满足 $|x-1| - \ln \frac{1}{y} = 0$,

当 $x=1$ 时, $0 - \ln \frac{1}{y} = 0$, 得 $y=1$,

所以排除选项 C、D,

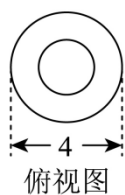
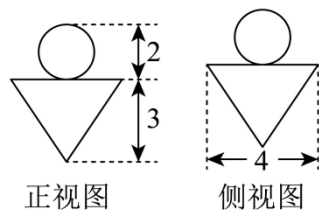
当 $x=0$ 时, $1 - \ln \frac{1}{y} = 0$, 得 $y = \frac{1}{e} < 1$,

所以排除选项 A,

故选: B.

【点睛】本题考查函数图像的识别, 属于简单题.

4. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



A. $\frac{16\pi}{3}$

B. $\frac{20\pi}{3}$

C. $\frac{40\pi}{3}$

D. 5π

【答案】A

【解析】

【分析】由三视图可得该几何体是一个球和一个圆锥的合体，结合体积公式计算即可得.

【详解】根据三视图可知：该几何体是一个球和一个圆锥的合体，球的半径为1，

圆锥的底面半径为2，高为3，则该几何体的体积为：

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 + \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 3 = \frac{16}{3} \pi.$$

故选：A.

5. 若函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上只有一个极值点，则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\frac{3}{2} < \omega < 3$ B. $\frac{3}{2} \leq \omega < 3$ C. $\frac{3}{2} < \omega \leq 3$ D. $\omega \geq \frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用函数的极值，根据正弦型三角函数的性质列出不等式组，转化求解即可.

【详解】当 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时，有 $\omega x \in \left(-\frac{\omega\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{3}\right)$,

则函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 唯一的极值点只能是 $\omega x = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以有 } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\omega\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ 得 } \frac{3}{2} < \omega \leq 3.$$

故选：C.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，若 $a_1 + a_5 + a_9 = 9, b_2 b_5 b_8 = 3\sqrt{3}$ ，则 $\frac{a_2 + a_8}{1 + b_2 b_8} =$ ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据等差、等比数列的性质分析求解.

【详解】由题意可得 $\begin{cases} a_1 + a_5 + a_9 = 3a_5 = 9 \\ b_2 b_5 b_8 = b_5^3 = 3\sqrt{3} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_5 = 3 \\ b_5 = \sqrt{3} \end{cases}$,

所以 $\frac{a_2 + a_8}{1 + b_2 b_8} = \frac{2a_5}{1 + b_5^2} = \frac{6}{1 + 3} = \frac{3}{2}$.

故选：C.

7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦点弦长为 $\frac{9}{2}$ 的弦有 ()

A. 8 条

B. 4 条

C. 2 条

D. 1 条

【答案】B

【解析】

【分析】结合双曲线的通径、左右顶点的距离与对称性，分该弦与双曲线是否交于同一支讨论即可得.

【详解】由 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ，可得其通径为 $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 5}{2} = 5 > \frac{9}{2}$ ，

注意到左右顶点的距离为 $2a = 4 < \frac{9}{2}$ ，

所以过一个焦点，可作满足题意与双曲线交于两支的弦有两条，交于一支的情况不存在，

结合双曲线的对称性，该双曲线满足题意的焦点弦共有 4 条.

故选：B.

8. 一数字电子表显示的时间是四位数，如 11:32，那么在一天（24 小时制）内，所显的四个数字和是 23 的概率是 ()

A. $\frac{1}{480}$

B. $\frac{1}{720}$

C. $\frac{1}{180}$

D. $\frac{1}{360}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题是一个古典概型，解题时要弄清试验发生时的总事件数和一天中任一时刻的四个数字之和为 23 事件数，前者可以根据生活经验推出，后者需要列举得到事件数.

【详解】一天显示的时间总共有 $24 \times 60 = 1440$ 种，

和为 23 有 09:59，19:58，18:59，19:49 总共有 4 种，

故所求概率为 $P = \frac{4}{1440} = \frac{1}{360}$.

故选：D.

9. 三边是连续正整数的钝角三角形面积是 ()

A. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

C. $\frac{4\sqrt{15}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，设出三角形三边为 $x-1, x, x+1$ ，根据三角形三边关系以及余弦定理求得 x ，再求三角形面积即可。

【详解】根据题意，设 $\triangle ABC$ 的三边分别为 $a = x-1, b = x, c = x+1$ ， $x \geq 2$ ，且 $x \in \mathbf{N}_+$ ，

由三角形三边关系可得： $(x+1) - (x-1) < x$ ，解得 $x > 2$ ；

根据大边对大角可知， C 为最大角，又其为钝角，故 $\cos C < 0$ ，则 $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ ，

即 $(x-1)^2 + x^2 - (x+1)^2 < 0$ ， $x^2 - 4x < 0$ ，解得 $x \in (0, 4)$ ，又 $x > 2$ ， $x \in \mathbf{N}_+$ ，故 $x = 3$ ；

则 $a = 2, b = 3, c = 4$ ， $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 9 - 16}{12} = -\frac{1}{4}$ ，又 $C \in (0, \pi)$ ，故

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{15}.$$

故选：B.

10. 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) > f'(x) + 1$ ，且 $f(0) = 2021$ ，

则不等式 $f(x) - 2020e^x < 1$ 的解集为（ ）

A. $(-\infty, e)$

B. $(-\infty, 2021)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(2020, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$ ，由题设条件可得其单调性，从而可求函数不等式的解。

【详解】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x} < 0$ ，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减， $\because f(0) = 2021$ ， $\therefore g(0) = \frac{f(0)-1}{e^0} = 2020$ ，

由 $f(x) - 2020e^x < 1$ 得 $\frac{f(x)-1}{e^x} < 2020$ ， $\therefore g(x) < g(0)$ ，

∵函数 $g(x)$ 在 R 上单调递减, $\therefore x > 0$,

故选: C.

11. 双纽线是 1694 年被瑞士数学家雅各布·伯努利用来描述他所发现的. 在平面直角坐标系 xOy 中, 把到定点 $F_1(-a, 0)$ 和 $F_2(a, 0)$ 距离之积等于 $a^2 (a > 0)$ 的点的轨迹称为双纽线 C . 已知点 $P(x_0, y_0)$ 是双纽线 C 上一点, 下列说法正确的是 ()

①双纽线 C 关于原点对称; ② $-\frac{a}{2} \leq y_0 \leq \frac{a}{2}$; ③双纽线 C 上满足 $|PF_1| = |PF_2|$ 的点 P 只有两个; ④ $|PO|$ 的

最大值是 $\sqrt{2}a$.

A. ①②③

B. ①②④

C. ①②

D. ①②③④

【答案】B

【解析】

【分析】对①, 设动点 $C(x, y)$, 把 (x, y) 关于原点对称的点 $(-x, -y)$ 代入轨迹方程, 显然成立; 对②, 根据 $\triangle PF_1F_2$ 的面积范围证明即可; 对③, 易得若 $|PF_1| = |PF_2|$, 则 P 在 y 轴上, 再根据 $P(x_0, y_0)$ 的轨迹方程求解即可; 对④, 根据题中所给的定点 $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$ 距离之积等于 a^2 , 再画图利用余弦定理分析 $\triangle PF_1F_2$ 中的边长关系, 进而利用三角形三边的关系证明即可.

【详解】对①, 设动点 $C(x, y)$, 由题可得 C 的轨迹方程 $\sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} \times \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]} = a^2$,

把 (x, y) 关于原点对称的点 $(-x, -y)$ 代入轨迹方程, 原方程不变, 故①正确;

对②, 因为 $P(x_0, y_0)$, 故 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_0|$,

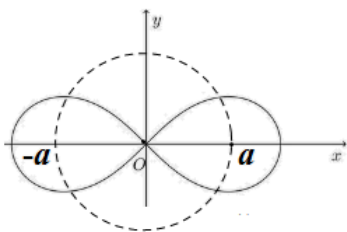
又 $|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2$, 所以 $a^2 \sin \angle F_1PF_2 = 2a \cdot |y_0|$,

即 $|y_0| = \frac{a}{2} \sin \angle F_1PF_2 \leq \frac{a}{2}$, 故 $-\frac{a}{2} \leq y_0 \leq \frac{a}{2}$, 故②正确;

对③, 若 $|PF_1| = |PF_2|$, 则 $P(x_0, y_0)$ 在 F_1F_2 的中垂线即 y 轴上,

故此时 $x_0 = 0$, 代入 $\sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} \times \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]} = a^2$,

可得 $y_0 = 0$, 即 $P(0, 0)$, 仅有一个, 故③错误;



对④，因为 $\angle POF_1 + \angle POF_2 = \pi$ ，故 $\cos \angle POF_1 + \cos \angle POF_2 = 0$ ，

$$\text{即 } \frac{|OP|^2 + |OF_1|^2 - |PF_1|^2}{2|OP| \cdot |OF_1|} + \frac{|OP|^2 + |OF_2|^2 - |PF_2|^2}{2|OP| \cdot |OF_2|} = 0,$$

$$\text{因为 } |OF_1| = |OF_2| = a, \quad |PF_1| \cdot |PF_2| = a^2,$$

$$\text{故 } 2|OP|^2 + 2a^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2,$$

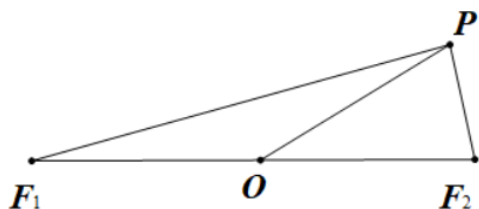
$$\text{即 } 2|OP|^2 + 2a^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2|,$$

$$\text{所以 } 2|OP|^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2,$$

又 $||PF_1| - |PF_2|| \leq |F_1F_2| = 2a$ ，当且仅当 P, F_1, F_2 共线时取等号，

$$\text{故 } 2|OP|^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 \leq (2a)^2,$$

即 $|OP|^2 \leq 2a^2$ ，解得 $|OP| \leq \sqrt{2}a$ ，故④正确。



故选：B

【点睛】关键点点睛：本题主要考查了动点轨迹方程的性质判定，因为该方程较复杂，故在作不出图象时，需要根据题意求出动点的方程进行对称性的分析，同时需要结合解三角形的方法对所给信息进行辨析。

12. 记关于 a, b 的代数式为 $f(a, b)$ ，它满足以下关系：① $f(a, a) = a$ ；② $f(ka, kb) = kf(a, b)$ ；③

$$f(a, b) = f\left(b, \frac{a+b}{2}\right); \quad \text{④ } f(a+c, b+d) = f(a, b) + f(c, d), \quad \text{则 } f(a, b) = (\quad)$$

A. $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$

B. $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$

C. $\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b$

D. $\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b$

【答案】A

【解析】

【分析】结合题意，逐步计算 $f(a,0)$ ， $f(0,a)$ ，从而得到 $f(0,b)$ 即可得.

【详解】由 $f(a+c,b+d)=f(a,b)+f(c,d)$ ，令 $b=c=0$ ， $d=a$ 得

$$\text{得 } f(a,0)+f(0,a)=f(a,a)=a,$$

$$\text{由 } f(a,b)=f\left(b,\frac{a+b}{2}\right), \text{ 令 } b=0 \text{ 可得 } f(a,0)=f\left(0,\frac{a}{2}\right),$$

$$\text{由 } f(ka,kb)=kf(a,b), \text{ 令 } k=\frac{1}{2}, a=0, b=a \text{ 得 } f\left(0,\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}f(0,a),$$

$$\text{即有 } \frac{3}{2}f(0,a)=a, \text{ 即 } f(0,a)=\frac{2}{3}a, \text{ 同理可得 } f(0,b)=\frac{2}{3}b,$$

$$\text{由 } f(a+c,b+d)=f(a,b)+f(c,d), \text{ 令 } c=b=0, d=b,$$

$$\text{则 } f(a,b)=f(a,0)+f(0,b)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b.$$

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题关键点在于结合题目所给条件，得到 $f(0,a)=\frac{2}{3}a$ ，即可得 $f(0,b)=\frac{2}{3}b$ ，从而得解.

第II卷（非选择题 共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分，把答案填在答题纸中相应的横线上.）

13. 设 α 是第二象限角， $P(x,4)$ 为其终边上一点，且 $\cos\alpha=\frac{x}{5}$ ，则 $\tan 2\alpha=$ _____.

【答案】 $-\frac{24}{7}$

【解析】

【分析】根据三角函数定义，求得 x ，以及 $\tan\alpha$ ，再结合正切的倍角公式，即可求得结果.

【详解】根据题意， $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{5}$ ，解得 $x=0$ 或 3 或 -3 ，又 α 是第二象限角，故 $x=-3$ ；

$$\text{则 } \tan\alpha=-\frac{4}{3}, \text{ 则 } \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=-\frac{24}{7}.$$

故答案为： $-\frac{24}{7}$.

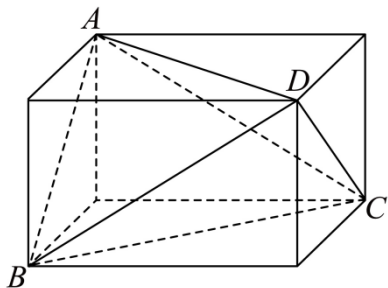
14. 三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB=CD=5$ ， $AC=BD=6$ ， $AD=BC=7$ ，那么该三棱锥外接球的表面积是_____.

【答案】 55π

【解析】

【分析】根据题意得到三棱锥的对棱相等，可知该三棱锥可置于一个长方体中，再求长方体外接球的表面积即可得.

【详解】由题意，该三棱锥的对棱相等，可知该三棱锥可置于一个长方体中，如图所示：



记该长方体的棱长为 a, b, c ，则
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5^2 \\ a^2 + c^2 = 6^2 \\ b^2 + c^2 = 7^2 \end{cases}$$

即 $a^2 + b^2 + c^2 = 55$ ，所以外接球半径为 $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \frac{\sqrt{55}}{2}$ ，

$$S = 4\pi r^2 = 55\pi.$$

故答案为：55π.

15. 圆 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆， $AC = 2AB = 2$ ，则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

【解析】

【分析】根据向量的线性运算与锐角三角形外接圆的相关性质即可求解.

【详解】依题意，设 AB 中点 M ， AC 的中点为 S ，则 OM 垂直平分 AB ， OS 垂直平分 AC ，

$$\text{则 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OM} + \vec{MA}) \cdot (\vec{OM} - \vec{BM}) = \vec{OM}^2 - \vec{MA}^2 = \vec{OM}^2 - \frac{1}{4}.$$

以 A 为圆心，1 为半径作圆，则 B 在该圆的四分之一圆弧上变化，如下图，

O 为 AB, AC 中垂线交点，连接 SO ，由三角形 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

根据临界位置及图形可知 $|SO| \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，而 $|\vec{OM}|^2 + \frac{1}{4} = 1 + |\vec{SO}|^2 = |\vec{OA}|^2$ ，

所以 $|\vec{MO}| \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ ，则 $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$ 范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/705244214042011201>