

2023-2024 学年广西百色市田东中学下学期高三数学试题第三次统一练习试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 做抛掷一枚骰子的试验, 当出现 1 点或 2 点时, 就说这次试验成功, 假设骰子是质地均匀的. 则在 3 次这样的试验中成功次数 X 的期望为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 关于函数 $f(x) = |\cos x| + \cos |2x|$, 有下列三个结论: ① π 是 $f(x)$ 的一个周期; ② $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增;

③ $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$. 则上述结论中, 正确的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 = 2, S_6 = 21$, 则 $a_5 =$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 已知集合 $M = \{y \mid y = 2^x, x > 0\}$, $N = \{x \mid y = \lg(2x - 1)\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(1, 2)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于 ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(4) = 17$, 设 $f(x_0) = y_0$, 则“ $y_0 = 17$ ”是“ $x_0 = 4$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题: “今有蒲生一日, 长三尺莞生一日, 长一尺蒲生日自半, 莞生日自倍. 问几何日而长倍?”意思是: “今有蒲草第 1 天长高 3 尺, 莞草第 1 天长高 1 尺以后, 蒲草每天长高前一天的一半, 莞草每天长高前一天的 2 倍. 问第几天莞草是蒲草的二倍?”你认为莞草是蒲草的二倍长所需要的天数是 ()

(结果采取“只入不舍”的原则取整数, 相关数据: $\lg 3 \approx 0.4771$, $\lg 2 \approx 0.3010$)

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

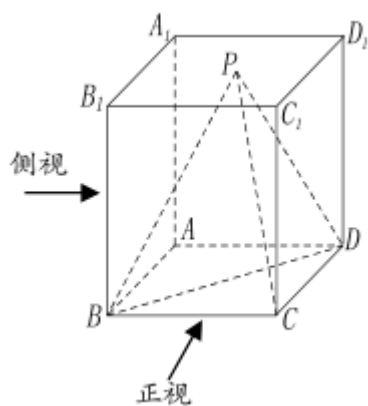
8. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 4-3i$ ，其中 i 是虚数单位，则复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

9. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$ ，设 $a = f(\ln \sqrt{2})$, $b = f(\sqrt{2})$, $c = f(\ln \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，则 ()

- A. $b > a > c$ B. $b > a = c$ C. $a = c > b$ D. $c > a > b$

10. 如图，在底面边长为 1，高为 2 的正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，则三棱锥 $P-BCD$ 的正视图与侧视图的面积之和为 ()

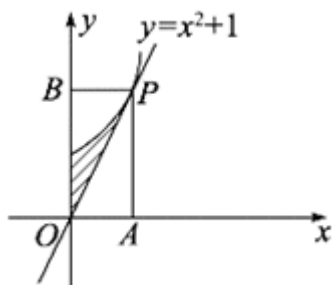


- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

11. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 所对的边分别是 a 、 b ，则“ $a > b$ ”是“ $A > B$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 既不充分也不必要条件 D. 充分必要条件

12. 如图在直角坐标系 xOy 中，过原点 O 作曲线 $y = x^2 + 1 (x \geq 0)$ 的切线，切点为 P ，过点 P 分别作 x 、 y 轴的垂线，垂足分别为 A 、 B ，在矩形 $OAPB$ 中随机选取一点，则它在阴影部分的概率为 ()



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 若方程 $f(x) = \frac{3}{5}$ 的解为 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2 < \pi$), 则 $x_1 + x_2 =$ _____;

$\sin(x_1 - x_2) =$ _____.

14. 《九章算术》第七章“盈不足”中第一题: “今有共买物, 人出八, 盈三钱; 人出七, 不足四, 问人数物价各几何?” 借用我们现在的说法可以表述为: 有几个人合买一件物品, 每人出 8 元, 则付完钱后还多 3 元; 若每人出 7 元, 则还差 4 元才够付款. 问他们的人数和物品价格? 答: 一共有 _____ 人; 所合买的物品价格为 _____ 元.

15. 已知命题 $P: \forall x > 0, x^3 > 0$, 那么 P 是 _____.

16. $\frac{(2-x^2)^5}{x^3}$ 的展开式中 x 的系数为 _____.

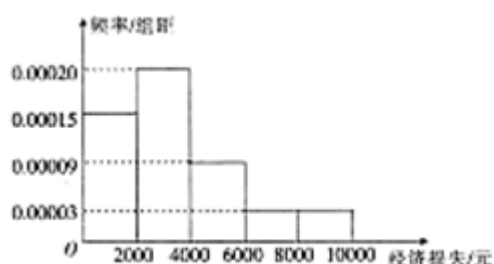
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且以原点 O 为圆心, 椭圆 C 的长半轴长为半径的圆与直线 $x + y - 2 = 0$ 相切.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 已知动直线 l 过右焦点 F , 且与椭圆 C 交于 A, B 两点, 已知 Q 点坐标为 $(\frac{5}{4}, 0)$, 求 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 的值.

18. (12 分) 2018 年 9 月, 台风“山竹”在我国多个省市登陆, 造成直接经济损失达 52 亿元. 某青年志愿者组织调查了某地区的 50 个农户在该次台风中造成的直接经济损失, 将收集的数据分成五组: $[0, 2000]$, $(2000, 4000]$, $(4000, 6000]$, $(6000, 8000]$, $(8000, 10000]$ (单位: 元), 得到如图所示的频率分布直方图.



(1) 试根据频率分布直方图估计该地区每个农户的平均损失 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

(2) 台风后该青年志愿者与当地政府向社会发出倡议, 为该地区的农户捐款帮扶, 现从这 50 户并且损失超过 4000 元的农户中随机抽取 2 户进行重点帮扶, 设抽出损失超过 8000 元的农户数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右准线方程为 $x=2$, 且两焦点与短轴的一个顶点构成等腰直角三角形.

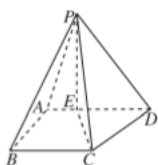
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 假设直线 $l: \square = \square\square + \square$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点. ①若 A 为椭圆的上顶点, M 为线段 AB 中点, 连接 OM 并延长交椭圆 C 于 N , 并且 $\overrightarrow{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OM}$, 求 OB 的长 ②若原点 O 到直线 l 的距离为 1 , 并且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \square$, 当 $\frac{4}{5} \leq \square \leq \frac{5}{6}$

时, 求 $\triangle OAB$ 的面积 S 的范围.

20. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, \angle ABC = \frac{\pi}{2}, PE \perp$ 面

$ABCD, AD = 3AE, AB = BC = 2AE = 2, PC = 3$.



(1) 在线段 PD 上是否存在点 F , 使 $CF \parallel$ 面 PAB , 说明理由;

(2) 求二面角 $E-PC-D$ 的余弦值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + ax, g(x) = e^x \ln x$.

(1) 若对于任意实数 $x \geq 0, f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的范围;

(2) 当 $a = -1$ 时, 是否存在实数 $x_0 \in [1, e]$, 使曲线 $C: y = g(x) - f(x)$ 在点 x_0 处的切线与 y 轴垂直? 若存在, 求出 x_0 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (10 分) 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in R$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

每一次成功的概率为 $\square = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\square$ 服从二项分布, 计算得到答案.

【详解】

每一次成功的概率为 $\square = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\square$ 服从二项分布, 故 $\square(\square) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

故选: $\square$.

【点睛】

本题考查了二项分布求数学期望, 意在考查学生的计算能力和应用能力.

2、B

【解析】

利用三角函数的性质, 逐个判断即可求出.

【详解】

①因为 $f(x) = f(x + \pi)$, 所以 π 是 $f(x)$ 的一个周期, ①正确;

②因为 $f(\pi) = 2$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上不单调递增, ②错误;

③因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 又 π 是 $f(x)$ 的一个周期, 所以可以只考虑 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的值

域. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $t = \cos x \in [0, 1]$,

$$f(x) = |\cos x| + \cos |2x| = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2t^2 + t - 1$$

$y = 2t^2 + t - 1$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x) \in [-1, 2]$, $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$, ③错误;

综上, 正确的个数只有一个, 故选 B.

【点睛】

本题主要考查三角函数的性质应用.

3、C

【解析】

方法一: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 + d = 2 \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2} \times d = 21 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$, 所以 $a_5 = 1 + (5-1) \times 1 = 5$. 故选 C.

方法二：因为 $S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3(a_2 + a_5)$ ，所以 $3(2 + a_5) = 21$ ，则 $a_5 = 5$. 故选 C.

4、B

【解析】

$$\Omega = \{\omega | \omega = 2^{\frac{1}{2}}, \omega > 0\} = \{\omega | \omega > 1\},$$

$$\Omega = \{\omega | \omega = \lg(2\omega - \omega^2)\} = \{\omega | 2\omega - \omega^2 > 0\}$$

$$= \{\omega | \omega^2 - 2\omega < 0\} = \{\omega | 0 < \omega < 2\},$$

$$\therefore \Omega \cap \Omega = (1, 2).$$

故选B.

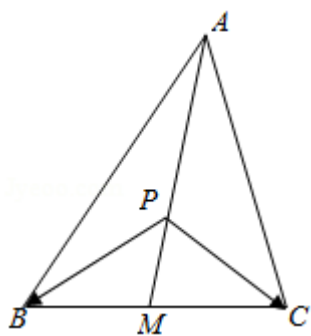
5、B

【解析】

由 M 是 BC 的中点，知 AM 是 BC 边上的中线，又由点 P 在 AM 上且满足 $\vec{AP} = 2\vec{PM}$ 可得 P 是三角形 ABC 的重心，根据重心的性质，即可求解.

【详解】

解：∵ M 是 BC 的中点，知 AM 是 BC 边上的中线，



又由点 P 在 AM 上且满足 $\vec{AP} = 2\vec{PM}$

∴ P 是三角形 ABC 的重心

$$\therefore \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC})$$

$$= \vec{PA} \cdot \vec{AP} = -|\vec{PA}|^2$$

又∵ $AM = 1$

$$\therefore |\vec{PA}| = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) = -\frac{4}{9}$$

故选 B.

【点睛】

判断 P 点是否是三角形的重心有如下几种办法: ①定义: 三条中线的交点. ②性质: $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ 或 $\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}$ 取得最小值 ③坐标法: P 点坐标是三个顶点坐标的平均数.

6、B

【解析】

结合函数的对应性, 利用充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

解: 若 $x_0 = 4$, 则 $f(x_0) = f(4) = 17$, 即 $y_0 = 17$ 成立,

若 $f(x) = x^2 + 1$, 则由 $f(x_0) = y_0 = 17$, 得 $x_0 = \pm 4$,

则“ $y_0 = 17$ ”是“ $x_0 = 4$ ”的必要不充分条件,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合函数的对应性是解决本题的关键, 属于基础题.

7、C

【解析】

由题意可利用等比数列的求和公式得莞草与蒲草 n 天后长度, 进而可得: $2 \times \frac{3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$, 解出即可得出.

【详解】

由题意可得莞草与蒲草第 n 天的长度分别为 $a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n = 1 \times 2^{n-1}$

据题意得: $2 \times \frac{3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$, 解得 $2^n = 12$,

$$\therefore n = \frac{\lg 12}{\lg 2} = 2 + \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式与求和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

8、B

【解析】

利用复数的除法运算化简 z ，复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 $|z|$ ，利用模长公式即得解.

【详解】

由题意知复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 $|z|$ ，

$$z = \frac{4-3i}{1+i} = \frac{(4-3i)(1-i)}{2} = \frac{1-7i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的除法运算，模长公式和几何意义，考查了学生概念理解，数学运算，数形结合的能力，属于基础题.

9、B

【解析】

根据偶函数性质，可判断 a, c 关系；由 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$ ，求得导函数，并构造函数 $g(x) = e^x - x - 1$ ，

由 $g'(x)$ 进而判断函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的单调性，即可比较大小.

【详解】

$f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，

$$\text{所以 } c = f\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f(\ln \sqrt{2})$$

所以 $a = c$ ；

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时， } f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2},$$

$$\text{则 } f'(x) = e^x - x - 1,$$

$$\text{令 } g(x) = e^x - x - 1$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x - 1, \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时， } g'(x) = e^x - 1 \geq 0,$$

则 $g(x) = e^x - x - 1$ 在 $x \geq 0$ 时单调递增，

因为 $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ ，所以 $g(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ ，

即 $f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ ，

则 $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$ 在 $x \geq 0$ 时单调递增，

而 $0 < \ln \sqrt{2} < \sqrt{2}$ ，所以

$$f(\ln \sqrt{2}) < f(\sqrt{2}),$$

综上所述， $f\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f(\ln \sqrt{2}) < f(\sqrt{2})$

即 $a = c < b$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查了偶函数的性质应用，由导函数性质判断函数单调性的应用，根据单调性比较大小，属于中档题.

10、A

【解析】

根据几何体分析正视图和侧视图的形状，结合题干中的数据可计算出结果.

【详解】

由三视图的性质和定义知，三棱锥 $P-BCD$ 的正视图与侧视图都是底边长为2 高为1的三角形，其面积都是

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1, \text{ 正视图与侧视图的面积之和为 } 1 + 1 = 2,$$

故选：A.

【点睛】

本题考查几何体正视图和侧视图的面积和，解答的关键就是分析出正视图和侧视图的形状，考查空间想象能力与计算能力，属于基础题.

11、D

【解析】

由大边对大角定理结合充分条件和必要条件的定义判断即可.

【详解】

$\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 所对的边分别是 a 、 b ，由大边对大角定理知“ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $A > B$ ”，

“ $A > B$ ” $\Rightarrow$ “ $a > b$ ”.

因此，“ $a > b$ ”是“ $A > B$ ”的充分必要条件.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/706113033040010232>