

模糊综合评价法

预备知识

- 模糊集与隶属函数
- 模糊集的运算
- 模糊关系与模糊矩阵

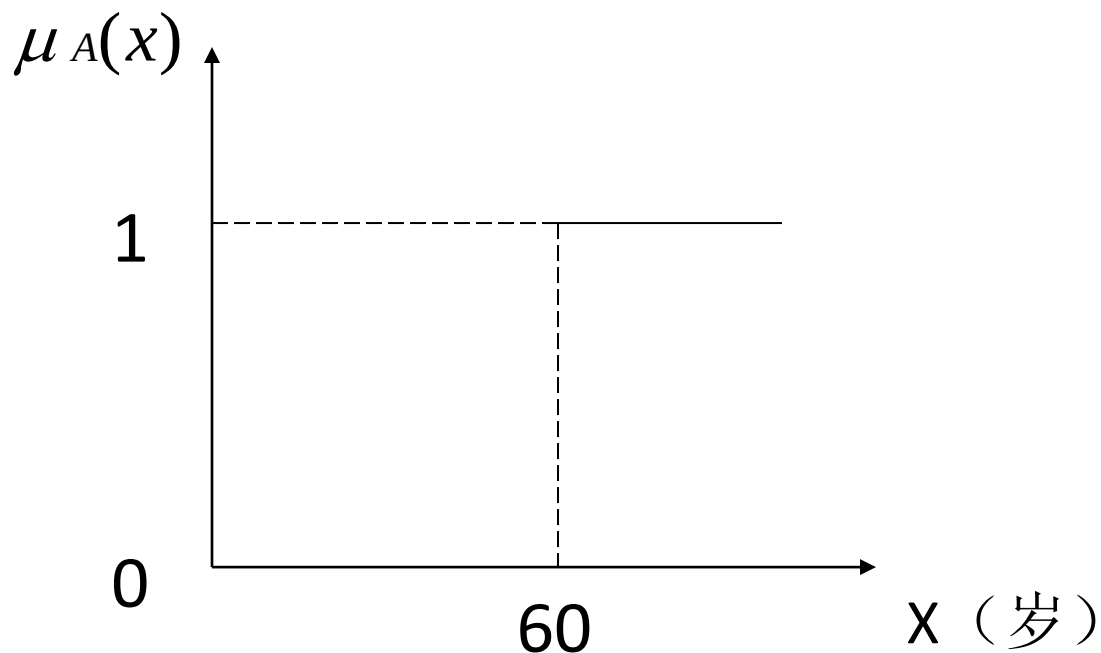
模糊集与隶属函数

例1：某保险公司开出一新险种，要求年龄在60岁以上的老人可以投保。现有赵、钱、孙、李、刘五人，年龄分别为：45岁/赵、52岁/钱、61岁/孙、72岁/李、81岁/刘。

符合投保条件者集合= $\{\text{孙、李、刘}\}$

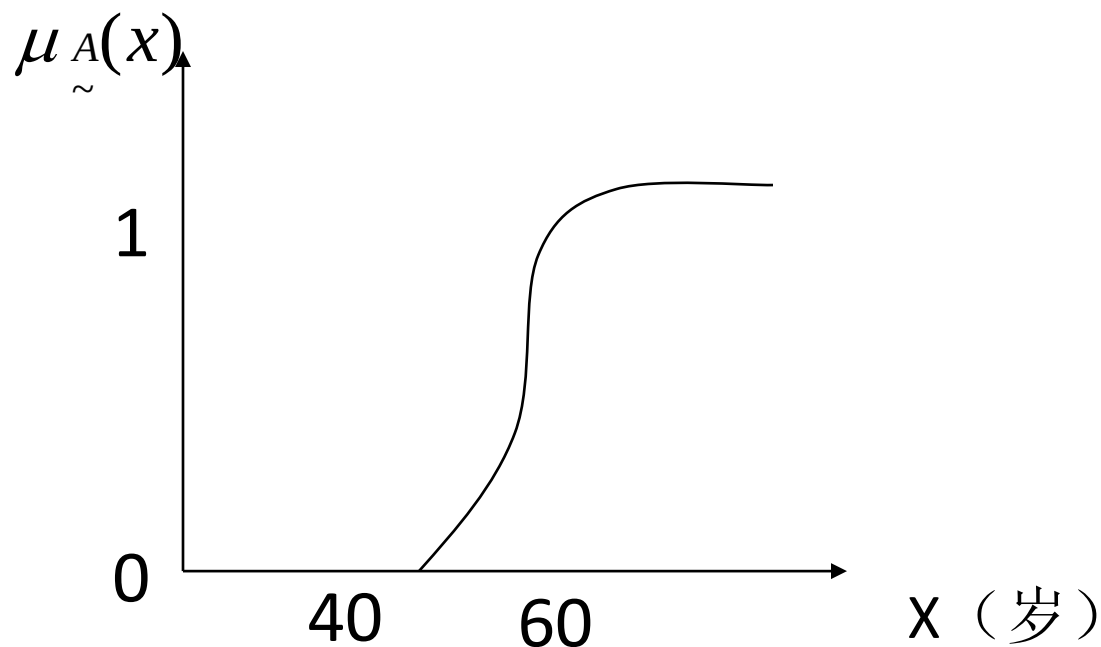
不符合投保条件者集合= $\{\text{赵、钱}\}$

- 用特征函数 $\mu_A(x)$ 描述上述确定性（普通）集合，符合投保条件者特征函数值为1，不符合条件者其特征函数值为0
- 特征函数表达式：
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$



- 模糊数学是将二值逻辑 $(0, 1)$ ，推广到可取 $[0, 1]$ 闭区间任意值的、无穷多个值的连续值逻辑，因此，必须把特征函数作适当的推广，将模糊集合的特征函数称为**隶属函数**，记为： $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ，它满足： $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$
- $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的大小反映 x 对于模糊集合 $\tilde{A}$ 的从属程度。其值接近1，表示 x 从属 $\tilde{A}$ 的程度很高；值接近0，表示 x 从属 $\tilde{A}$ 的程度很低。

- 上例中，刘某属于老年人的程度最高，其隶属度为1，李某次之，其隶属度为0.9，赵某最低，隶属度为0。



- 所谓给定了论域 I （研究对象的全体）上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ ，是指对于任何 $x \in I$ ，都指定了一个数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$ ，称作 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度，称作 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，记为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: x \rightarrow [0,1]$$

当 I 为有限集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 时， $\underset{\sim}{A}$ 也可以记为

$$\underset{\sim}{A} = \int_I (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x)$$

$$\underset{\sim}{A} = \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)}{x_1} + \dots + \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)}{x_n}$$

模糊集的运算

- 两个模糊集合 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的并集合的隶属度定义为:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \text{记为 } \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$$

- 两个模糊集合 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的交集的隶属度定义为:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \text{记为 } \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

- 模糊集合 $\tilde{A}$ 的补集合 $\tilde{A}^-$ 的隶属度定义为:

$$\mu_{\tilde{A}^-}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

其中, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 与 $\mu_{\tilde{B}}(x)$ 分别为模糊子集 $\tilde{A}$ 的 $\tilde{B}$ 的隶属度

- 设论域 $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$A = 0.2 / x_1 + 0.7 / x_2 + 1 / x_3 + 0.5 / x_5$$

$\sim$

$$B = 0.5 / x_1 + 0.3 / x_2 + 0.1 / x_4 + 0.7 / x_5$$

$\sim$

求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$

• 解:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \frac{0.2 \vee 0.5}{x_1} + \frac{0.7 \vee 0.3}{x_2} + \frac{1 \vee 0}{x_3} + \frac{0 \vee 0.1}{x_4} + \frac{0.5 \vee 0.7}{x_5} \\ &= \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0.1}{x_4} + \frac{0.7}{x_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \frac{0.2 \wedge 0.5}{x_1} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{x_2} + \frac{1 \wedge 0}{x_3} + \frac{0 \wedge 0.1}{x_4} + \frac{0.5 \wedge 0.7}{x_5} \\ &= \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.3}{x_2} + \frac{0.5}{x_5} \end{aligned}$$

模糊关系与模糊矩阵

例：考察4件产品1,2,3,4（即 $I=\{1,2,3,4\}$ ）在某质量指标上的相近程度。

- 考察是否完全相同——明确的关系

“全同”为1，“不全同”为0
这四件产品均不全同

相近程度矩阵：
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 考察是否相似——模糊关系

相似程度矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.9 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

- 论域 X 到 Y 上的一个模糊关系 $\tilde{R}$, 即 $X \times Y$ 中的一个模糊子集, 其隶属函数 $\mu_{\tilde{R}}(x, y): X \times Y \rightarrow [0, 1]$ 表示 X 、 Y 中的元素 x 和 y 具有关系 $\tilde{R}$ 的程度。如果 X 、 Y 中的元素均设为有限个, 设为 m 和 n 个, 则 $\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_j), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ 可以用矩阵表示, $(\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_j))_{m \times n}$, 称为关于 $\tilde{R}$ 的模糊关系矩阵, 简称模糊矩阵。
- 如果 $Y=X$, 则称 $\tilde{R}$ 为 X 上的模糊关系。

- 设人的身高论域 $X=\{140,150,160,170,180\}$ （单位：cm），体重论域 $Y=\{40,50,60,70,80\}$ （单位：kg），表示身高和体重接近“标准”的关系，如表所示，这里“标准”指：体重(kg)=身高(cm)-100.

Y X $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

模糊矩阵：

$$\mathbf{R}_{\tilde{}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

模糊综合评价方法的原理与步骤

- ✓ 单级模糊综合评价
- ✓ 多级模糊综合评价

单级模糊综合评价

- 引例：电视机评价：图像，声音，价格

- 设重视程度：图像>价格>声音

- 扎德记法： $A = \{0.5/\text{图像} + 0.2/\text{声音} + 0.3/\text{价格}\}$

- 评语集合 = {很满意、较满意、可以、不好}

设：对图像而言50%“很满意”，40%较满意，
10%“可以”，0%“不好”则模糊子集(0.5,0.4,0.1,0)

就声音而言 (0.4,0.3,0.2,0.1)

对价格评价(0,0.1,0.3,0.6)

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

- 若已知某类顾客的模糊权重向量 $\underset{\sim}{A}$ 为:

$$\underset{\sim}{A} = (0.5, 0.2, 0.3)$$

则这类顾客对电视机的评判结果为:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} \\ = (0.5, 0.2, 0.3) \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

- 得综合评价结果为:

$$B = (0.5, 0.4, 0.3, 0.3)$$

经归一化处理后得 $(0.33, 0.27, 0.2, 0.2)$ 即该类顾客对这种型号的电视机仍是“很满意”占多数

单级模糊综合评价法步骤

- 设：评语级= $\{\text{优}, \text{良}, \text{中}, \text{差}\}$,

构造隶属度函数可采用连续的或离散的形式表示

- 设有 N 个专家来评价，认为优的有 N_1 个，良的有 N_2 个，中的有 N_3 个，差的有 N_4 个。 $N=N_1+N_2+N_3+N_4$ ，用 N_j/N 表示第 j 档评语的隶属程度。另着眼点集合共有元素 m 个，即共有 m 个评价目标，第 i 个目标的权系数为 w_i ，则 $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ 且 $w_i \geq 0$ ，权系数向量 $\underset{\sim}{A} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$
- 设被评方案共有 p 个，该方法的具体步骤可归纳为：

① 组织评价者就每一方案的各个目标给出评语，并按四个评语类别所占比重确定单目标模糊评价向量 $r_t = (r_{t1}, r_{t2}, r_{t3}, r_{t4})(t = 1, 2, \dots, m)$

② 计算第i个方案的模糊综合评价判断矩阵 $R^{(i)}$

$$\text{其中 } R^{(i)}_{\sim} = \begin{bmatrix} r_1^{(i)} \\ r_2^{(i)} \\ \vdots \\ r_m^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{(i)} & \cdots & r_{14}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1}^{(i)} & \cdots & r_{m4}^{(i)} \end{bmatrix}$$

其中 $r_{tj}^{(i)}$ 表示方案i在第t个目标处于第j档评语的隶属度。 $t=1, 2, \dots, m$; $j=1, \dots, 4$; $i=1, 2, \dots, p$

③对第*i*个方案进行模糊综合评判，评判矩阵为 $\underset{\sim}{B}^{(i)}$

$$\underset{\sim}{B}^{(i)} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R}^{(i)}$$

$$= (w_1, w_2, \dots, w_m) \circ \begin{bmatrix} r_{11}^{(i)} & \dots & r_{14}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1}^{(i)} & \dots & r_{m4}^{(i)} \end{bmatrix}$$
$$= (b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}, b_4^{(i)})$$

④对 $\underset{\sim}{B}^{(i)}$ 进行归一化处理，根据最大隶属度原则，取评语等级所占比重最大者，并对被评方案赋予相应评语。

- 注意：根据最大隶属度原则对各方案进行评价，只取最大比重的评语等级，会浪费一部分评价信息，且方案间难以排序比较。
- 采用各种科学合理的方法将各方案的归一化模糊评价向量分别进行综合。
- 例如为四个评语等级赋予等级中值分，优95，良83，中67，差45 评语值向量： $C=(95,83,67,45)$

设第*i*个方案归一化评价向量 $\tilde{D}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, d_3^{(i)}, d_4^{(i)})$

则第*i*个方案最终评价值 $\tilde{E}^{(i)} = \tilde{D}^{(i)} \times C^T$

比诸 $\tilde{E}^{(i)}$ ，即可对各被评方案进行排序。

多级模糊综合评判的原理与步骤

- 基本思路:

- ① 将影响评价对象的各个因素按属性分类，不同类别的因素分属不同层次。
- ② 对较低层次的各因素进行单级模糊综合评判。
- ③ 进行上一层次各个因素的综合评判，根据需要依次可以得到二级、三级、...、 n 级模糊综合评判

以两个层次的综合评判为例

- 对二级模糊综合评判的因素集合或称着眼点集合作如下描述： $U=(U_1, U_2, \dots, U_n)$

其中： $U_1 = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1m_1});$

$U_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2m_2});$

$\vdots$

$U_n = (u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nm_n});$

设评语集为由 k 个等级构成，记为 $V=(V_1, V_2, \dots, V_K)$ 。

1、先对第二层各个因素进行单级模糊综合评价

①求出第二层中各个因素的评判矩阵 $\tilde{R}_i$ 及相应的权重分配

集 $\tilde{A}_j = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im_i})$ 其中

$$a_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$$

为因素 u_i 中的第 j 个因素的权重。

②计算 $\tilde{B}_i = \tilde{A}_i \circ \tilde{R}_i$ 即可得该层次各因素的综合评判因素集

其中, $\tilde{B}_j = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik}) \quad i=1, 2, \dots, n$

2、进行两个层次的综合评判

①将单级模糊综合评判中得到的 n 个单因素集组合成一个评判矩阵 $\tilde{R}$ ，即 $\tilde{R} = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n)^T$

确定综合权重集 $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，其中 a_i 为第一次中的第 i 个因素 u_i 的权重。

②计算 $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$ ，即可得两个层次的综合评判结果集

$$\tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$$

基于AHP方法的模糊综合评价法 应用案例

案例一

基于AHP的远程教育师资综合素质 模糊评价研究

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/706242121103010035>