

新疆巴楚县一中 2024 年普通高校招生全国统一考试仿真模拟卷（一）数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

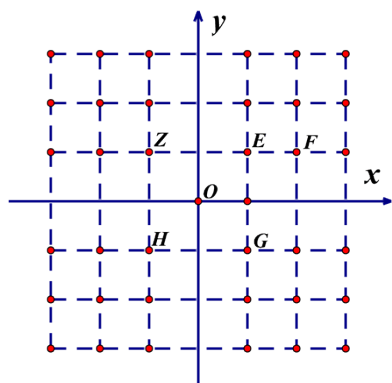
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ， F_1, F_2 为其左、右焦点，直线 l 过右焦点 F_2 ，与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点，

且点 A 在 x 轴上方，若 $|AF_2| = 3|BF_2|$ ，则直线 l 的斜率为()

- A. 1 B. -2 C. -1 D. 2

2. 若 i 为虚数单位，网格纸上小正方形的边长为 1，图中复平面内点 Z 表示复数 z ，则表示复数 $\frac{2i}{z}$ 的点是()



- A. E B. F C. G D. H

3. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ， $B = \{x | x - 1 < 0\}$ ，则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | x < 1\}$ B. $\{x | -1 \leq x < 1\}$
C. $\{x | x \leq 2\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 1\}$

4. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$ ， $B = \{x | e^x < 1\}$ ，则()

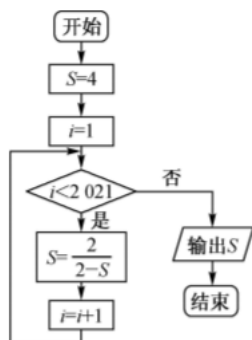
- A. $A \cap B = \{x | x < 1\}$ B. $A \cup B = \{x | x < e\}$
C. $A \cup B = \{x | x < 1\}$ D. $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$

5. 设 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是()

- A. 若 $m \perp n$ ， $n // \alpha$ ，则 $m \perp \alpha$ B. 若 $m // \beta$ ， $\beta \perp \alpha$ ，则 $m \perp \alpha$

C. 若 $m \perp \beta$, $n \perp \beta$, $n \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$ D. 若 $m \perp n$, $n \perp \beta$, $\beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$

6. 若执行如图所示的程序框图, 则输出 S 的值是 ()



- A. -1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 4

7. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

8. 2020 年是脱贫攻坚决战决胜之年, 某市为早日实现目标, 现将甲、乙、丙、丁 4 名干部派遣到 A、B、C 三个贫困县扶贫, 要求每个贫困县至少分到一人, 则甲被派遣到 A 县的分法有 ()

- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 36 种

9. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

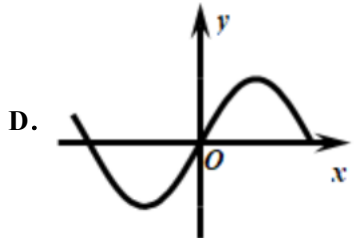
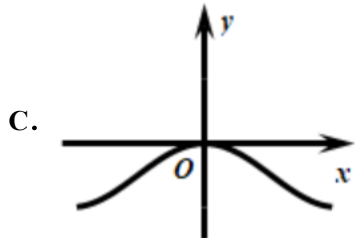
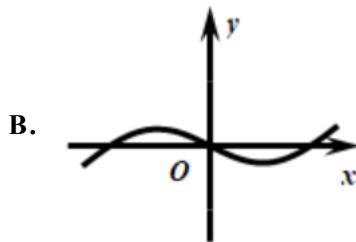
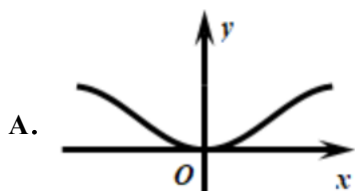
10. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, 以 F_1F_2 为直径的圆与该双曲线的两条渐近线分别交于 A, B 两点 (A, B 位于 y 轴右侧), 且四边形 OAF_2B 为菱形, 则该双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $x \pm y = 0$ B. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ C. $x \pm \sqrt{3}y = 0$ D. $3x \pm y = 0$

11. 已知 $a \in \mathbb{R}$ 若 $(1-ai)(3+2i)$ 为纯虚数, 则 a 的值为 ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

12. 函数 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1 \right) \cos x$ 图象的大致形状是 ()



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与准线的一个交点坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ，则双曲线的焦距为_____.

14. 函数 $f(x) = \sqrt{\lg \frac{2}{x} - 1}$ 的定义域为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ，且满足 $S_n = a_{n+1}$ ，则数列 $\{S_n\}$ 的前 10 项的和为_____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，直线 l 与抛物线 C 相切于 M 点， N 是 l 上一点(不与 M 重合)，若以线段 MN 为直径的圆恰好经过 F ，则点 N 到抛物线顶点 O 的距离 $|ON|$ 的最小值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ ， $z(x+2y) = m$.

(1) 若 $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的最小值为 4，求 m 的值；

(2) 若 $x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 1$ ，证明： $m \leq -1$ 或 $m \geq 1$.

18. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， $|F_1F_2| = 2$ ， M 是椭圆 E 上的一个动点，且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程，

(2) 若 $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ，四边形 $ABCD$ 内接于椭圆 E ， $AB \parallel CD$ ，记直线 AD, BC 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求证： k_1k_2 为定值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{2x} - ax^2 + x (a \geq 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2} > \frac{3}{4} - \ln 2$.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + (1-a)x - \ln x, a \in R$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a \in (-\infty, 1)$, 设 $g(x) = xe^x - x - \ln x + a$, 证明: $\forall x_1 \in (0, 2], \exists x_2 \in (0, +\infty)$, 使

$$f(x_1) - g(x_2) > 2 - \ln 2.$$

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列,

$$S_7 = 49. \text{ 设数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } T_n, \text{ 且满足 } \log_2(T_n + 2) = \sqrt{S_{n+1}}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{a_n}{b_n} (n \in N^*)$, 证明: $c_1 + c_2 + \dots + c_n < 3$.

22. (10 分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 设椭圆 Γ 的上顶点为 B , 右顶点和右焦点分别为 A, F ,

$$\text{且 } \angle AFB = \frac{5\pi}{6}.$$

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + n (n \neq \pm 1)$ 交椭圆 Γ 于 P, Q 两点, 设直线 BP 与直线 BQ 的斜率分别为 k_{BP}, k_{BQ} , 若

$$k_{BP} + k_{BQ} = -1, \text{ 试判断直线 } l \text{ 是否过定点? 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.}$$

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由 $|AF_2| = 3|BF_2|$, 可得 $\overrightarrow{AF_2} = 3\overrightarrow{BF_2}$. 设直线 l 的方程 $x = my + \sqrt{5}, m > 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 即 $y_1 = -3y_2$

①, 联立直线 l 与曲线 C , 得 $y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{5}m}{m^2 - 4}$ ②, $y_1 y_2 = \frac{1}{m^2 - 4}$ ③, 求出 m 的值即可求出直线的斜率.

【详解】

双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, F_1, F_2 为左、右焦点, 则 $F_2 (\sqrt{5}, 0)$, 设直线 l 的方程 $x = my + \sqrt{5}$, $m > 0$, $\therefore$ 双曲线的渐

近线方程为 $x = \pm 2y$, $\therefore m \neq \pm 2$,

设 $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$, 且 $y_1 > 0$, 由 $|AF_2| = 3|BF_2|$, $\therefore \overrightarrow{AF_2} = 3\overrightarrow{F_2B}$, $\therefore y_1 = -3y_2$ ①

由 $\begin{cases} x = my + \sqrt{5} \\ x^2 - 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$, 得 $(m^2 - 4)y^2 + 2\sqrt{5}my + 1 = 0$

$\therefore \Delta = (2\sqrt{5}m)^2 - 4(m^2 - 4) > 0$, 即 $m^2 + 4 > 0$ 恒成立,

$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{5}m}{m^2 - 4}$ ②, $y_1 y_2 = \frac{1}{m^2 - 4}$ ③,

联立①②得 $-2y_2 = -\frac{2\sqrt{5}m}{m^2 - 4} > 0$, 联立①③得 $-3y_2^2 = \frac{1}{m^2 - 4} < 0$,

$\therefore y_2 = \frac{\sqrt{5}m}{m^2 - 4}$, $y_2^2 = \frac{1}{12 - 3m^2}$ 即: $\frac{1}{12 - 3m^2} = \left(\frac{\sqrt{5}m}{m^2 - 4}\right)^2$, $m > 0$, 解得: $m = \frac{1}{2}$, 直线 l 的斜率为 2,

故选 D.

【点睛】

本题考查直线与双曲线的位置关系, 考查韦达定理的运用, 考查向量知识, 属于中档题.

2、C

【解析】

由于在复平面内点 Z 的坐标为 $(-1, 1)$, 所以 $z = -1 + i$, 然后将 $z = -1 + i$ 代入 $\frac{2i}{z}$ 化简后可找到其对应的点.

【详解】

由 $z = -1 + i$, 所以 $\frac{2i}{z} = \frac{2i}{-1 + i} = i(-1 - i) = 1 - i$, 对应点 G .

故选: C

【点睛】

此题考查的是复数与复平面内点的对应关系, 复数的运算, 属于基础题.

3、C

【解析】

先化简集合 A, B , 结合并集计算方法, 求解, 即可.

【详解】

解得集合 $A = \{x | (x-2)(x+1) \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x < 1\}$

所以 $A \cup B = \{x | x \leq 2\}$, 故选 C.

【点睛】

本道题考查了集合的运算, 考查了一元二次不等式解法, 关键化简集合 A,B, 难度较小.

4、C

【解析】

求出集合 B, 计算出 $A \cap B$ 和 $A \cup B$, 即可得出结论.

【详解】

$Q A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | e^x < 1\} = \{x | x < 0\}$, $\therefore A \cap B = \{x | x < 0\}$, $A \cup B = \{x | x < 1\}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查交集和并集的计算, 考查计算能力, 属于基础题.

5、C

【解析】

根据空间中直线与平面、平面与平面位置关系相关定理依次判断各个选项可得结果.

【详解】

对于 A, 当 m 为 α 内与 n 垂直的直线时, 不满足 $m \perp \alpha$, A 错误;

对于 B, 设 $\alpha \cap \beta = l$, 则当 m 为 α 内与 l 平行的直线时, $m \parallel \beta$, 但 $m \subset \alpha$, B 错误;

对于 C, 由 $m \perp \beta$, $n \perp \beta$ 知: $m \parallel n$, 又 $n \perp \alpha$, $\therefore m \perp \alpha$, C 正确;

对于 D, 设 $\alpha \cap \beta = l$, 则当 m 为 β 内与 l 平行的直线时, $m \parallel \alpha$, D 错误.

故选: C.

【点睛】

本题考查立体几何中线面关系、面面关系有关命题的辨析, 考查学生对于平行与垂直相关定理的掌握情况, 属于基础题.

6、D

【解析】

模拟程序运行, 观察变量值的变化, 得出 S 的变化以 4 为周期出现, 由此可得结论.

【详解】

$S = 4, i = 1; S = -1, i = 2; S = \frac{2}{3}, i = 3; S = \frac{3}{2}, i = 4; S = 4, i = 5$; 如此循环下去, 当 $i = 2020$ 时,

$S = \frac{3}{2}; S = 4, i = 2021$, 此时不满足 $i < 2021$, 循环结束, 输出 S 的值是 4.

故选: D.

【点睛】

本题考查程序框图, 考查循环结构. 解题时模拟程序运行, 观察变量值的变化, 确定程序功能, 可得结论.

7、C

【解析】

求得双曲线的渐近线方程, 可得圆心 $(0, 2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$, 由点到直线的距离公式可得 a 的范围, 再由离心率公式计算即可得到所求范围.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$, 即 $x - ay = 0$,

由题意知, 直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离, 则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$,

解得 $a \geq 1$, 因此, 双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$.

故选: C.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围, 注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径, 考查化简整理的运算能力, 属于中档题.

8、B

【解析】

分成甲单独到 A 县和甲与另一人一同到 A 县两种情况进行分类讨论, 由此求得甲被派遣到 A 县的分法数.

【详解】

如果甲单独到 A 县, 则方法数有 $C_3^2 \times A_2^2 = 6$ 种.

如果甲与另一人一同到 A 县, 则方法数有 $C_3^1 \times A_2^2 = 6$ 种.

故总的方法数有 $6 + 6 = 12$ 种.

故选: B

【点睛】

本小题主要考查简答排列组合的计算，属于基础题.

9、C

【解析】

分析：利用复数的除法运算法则：分子、分母同乘以分母的共轭复数，化简复数 z ，然后求解复数的模.

详解： $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} + 2i$

$$= -i + 2i = i,$$

则 $|z| = 1$ ，故选 c.

点睛：复数是高考中的必考知识，主要考查复数的概念及复数的运算. 要注意对实部、虚部的理解，掌握纯虚数、共轭复数这些重要概念，复数的运算主要考查除法运算，通过分母实数化转化为复数的乘法，运算时特别要注意多项式相乘后的化简，防止简单问题出错，造成不必要的失分.

10、B

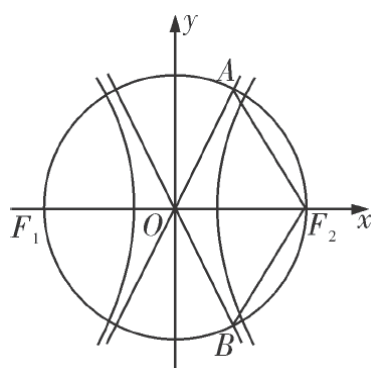
【解析】

由于四边形 OAF_2B 为菱形，且 $|OF_2| = |OA|$ ，所以 $\triangle AOF_2$ 为等边三角形，从而可得渐近线的倾斜角，求出其斜率.

【详解】

如图，因为四边形 OAF_2B 为菱形， $|OF_2| = |OA| = |OB|$ ，所以 $\triangle AOF_2$ 为等边三角形， $\angle AOF_2 = 60^\circ$ ，两渐近线的斜率分别为 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$.

故选：B



【点睛】

此题考查的是求双曲线的渐近线方程，利用了数形结合的思想，属于基础题.

11、A

【解析】

根据复数的乘法运算法则化简可得 $3+2a+(2-3a)i$ ，根据纯虚数的概念可得结果.

【详解】

由题可知原式为 $3+2a+(2-3a)i$ ，该复数为纯虚数，

$$\text{所以 } \begin{cases} 3+2a=0 \\ 2-3a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查复数的运算和复数的分类，属基础题.

12、B

【解析】

判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，可排除 A、C，再判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上函数值与 0 的大小，即可得出答案.

【详解】

$$\text{解：因为 } f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right) \cos x = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \cos x,$$

$$\text{所以 } f(-x) = \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \cos(-x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \cos x = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cos x = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数，可排除 A、C；

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) < 0$ ，可排除 D；

故选：B.

【点睛】

本题考查函数表达式判断函数图像，属于中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、1

【解析】

由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线 $x = \frac{a^2}{c} = 1$ ， $\sqrt{3} = \frac{b}{a}$ 以及 $a^2 + b^2 = c^2$ 求得 c 的值即可得答案.

【详解】

由于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与准线的一个交点坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/707006030161010003>