

2024 届兴安市重点中学高三下学期数学试题开学考试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 且 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\frac{1}{2}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 0

2. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在抛物线上, 且 $|AF| = 5$, 过点 F 的动直线 l 与抛物线 B, C 交于两点, O 为坐标原点, 抛物线的准线与 x 轴的交点为 M . 给出下列四个命题:

- ①在抛物线上满足条件的点 A 仅有一个;
②若 P 是抛物线准线上一动点, 则 $|PA| + |PO|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$;
③无论过点 F 的直线 l 在什么位置, 总有 $\angle OMB = \angle OMC$;
④若点 C 在抛物线准线上的射影为 D , 则三点 B, O, D 在同一条直线上.

其中所有正确命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

4. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$, 要得到函数 $g(x) = \cos x$ 的图象, 只需将 $y = f(x)$ 的图象 ()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

5. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 4, |\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{c} - \vec{b}|$ 的最大值为 ()

- A. $5\sqrt{2} + \sqrt{3}$ B. $5\sqrt{2} - \sqrt{3}$ C. $2\sqrt{13} + \sqrt{3}$ D. $2\sqrt{13} - \sqrt{3}$

6. 为了加强“精准扶贫”, 实现伟大复兴的“中国梦”, 某大学派遣甲、乙、丙、丁、戊五位同学参加 A, B, C 三个贫困县的调研工作, 每个县至少去 1 人, 且甲、乙两人约定去同一个贫困县, 则不同的派遣方案共有 ()

- A. 24 B. 36 C. 48 D. 64

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距是虚轴长的 2 倍, 则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

8. 复数 $\frac{1}{i} + i =$ ()

- A. $-2i$ B. $\frac{1}{2}i$ C. 0 D. $2i$

9. 已知不同直线 l 、 m 与不同平面 α 、 β , 且 $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. 若 $\alpha // \beta$, 则 $l // m$ B. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp m$
C. 若 $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$

10. 两圆 $(x+a)^2 + y^2 = 4$ 和 $x^2 + (y-b)^2 = 1$ 相外切, 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. 9 C. $\frac{1}{3}$ D. 1

11. 直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点且与抛物线交于 A, B 两点, 则 $4|AF| + |BF|$ 的最小值是

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

12. 已知复数 $z = \frac{(2+ai)i}{1-i}$ 是纯虚数, 其中 a 是实数, 则 z 等于 ()

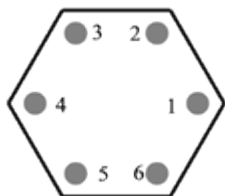
- A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $|\vec{b}| = 2$, 且向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

14. 函数 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx + 9$ 在区间 $(0, 3)$ 内有且仅有两个零点, 则实数 k 的取值范围是_____.

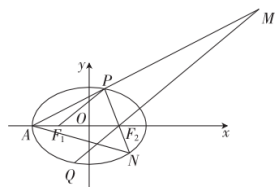
15. 工人在安装一个正六边形零件时, 需要固定如图所示的六个位置的螺栓. 若按一定顺序将每个螺栓固定紧, 但不能连续固定相邻的 2 个螺栓. 则不同的固定螺栓方式的种数是_____.



16. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \log_2(1-x)$ 的定义域为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, P 是椭圆上的一个动点 (不与左、右顶点重合), 且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6, 点 P 关于原点的对称点为 Q , 直线 AP, QF_2 交于点 M .



(1) 求椭圆方程;

(2) 若直线 PF_2 与椭圆交于另一点 N , 且 $S_{\triangle AF_2M} = 4S_{\triangle AF_2N}$, 求点 P 的坐标.

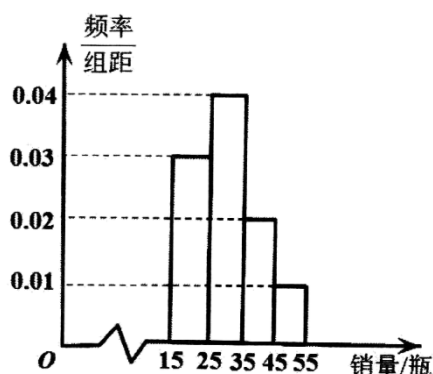
18. (12分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{ex}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程是 $y = (1 - \frac{2}{e})x + \frac{4}{e} - 1$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x) = xf(x)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性与极值;

(3) 证明: $f(x) > \frac{1}{e^x}$.

19. (12分) 某早餐店对一款新口味的酸奶进行了一段时间试销, 定价为 5 元/瓶. 酸奶在试销售期间足量供应, 每天的销售数据按照 $[15, 25], (25, 35], (35, 45], (45, 55]$ 分组, 得到如下频率分布直方图, 以不同销量的频率估计概率.



(1) 从试销售期间任选三天, 求其中至少有一天的酸奶销量大于 35 瓶的概率;

(2) 试销结束后, 这款酸奶正式上市, 厂家只提供整箱批发: 大箱每箱 50 瓶, 批发成本 75 元; 小箱每箱 30 瓶, 批发成本 60 元. 由于酸奶保质期短, 当天未卖出的只能作废. 该早餐店以试销售期间的销量作为参考, 决定每天仅批发一箱 (计算时每个分组取中间值作为代表, 比如销量为 $(45, 55]$ 时看作销量为 50 瓶).

① 设早餐店批发一大箱时, 当天这款酸奶的利润为随机变量 X , 批发一小箱时, 当天这款酸奶的利润为随机变量 Y

，求 X 和 Y 的分布列和数学期望；

②以利润作为决策依据，该早餐店应每天批发一大箱还是一小箱？

注：销售额=销量×定价；利润=销售额-批发成本.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ，满足 $a_1 = 2$ ， $S_n = \lambda n a_n + \mu a_{n-1}$ ，其中 $n \geq 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $\lambda = 0$ ， $\mu = 4$ ， $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，求 λ, μ 的值；

(3) 若 $a_2 = 3$ ，且 $\lambda + \mu = \frac{3}{2}$ ，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

21. (12 分) 设实数 x, y 满足 $x + y = 3$.

(1) 若 $|x+3| < x|y-2|$ ，求 x 的取值范围；

(2) 若 $x > 0$ ， $y > 0$ ，求证： $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} \geq 1$.

22. (10 分) 已知动圆 E 与圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 外切，并与直线 $x = -\frac{1}{2}$ 相切，记动圆圆心 E 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 过点 $Q(-2, 0)$ 的直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点，若曲线 C 上存在点 P 使得 $\angle APB = 90^\circ$ ，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

先求出 $\frac{a \cdot b}{|b|}$ ，再利用投影公式 $\frac{a \cdot b}{|b|}$ 求解即可.

【详解】

解：由已知得 $\frac{a \cdot b}{|b|} = \sqrt{1+3} = 2$,

由 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\frac{1}{2}$, 得 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2}$,

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{b}| = 1$.

故答案为: B.

【点睛】

本题考查向量的几何意义, 考查投影公式的应用, 是基础题.

2、C

【解析】

①: 由抛物线的定义可知 $|AF| = a + 1 = 5$, 从而可求 A 的坐标; ②: 做 A 关于准线 $x = -1$ 的对称点为 A' , 通过分析可知当 A', P, O 三点共线时 $|PA| + |PO|$ 取最小值, 由两点间的距离公式, 可求此时最小值 $|A'O|$; ③: 设出直线 l 方程, 联立直线与抛物线方程, 结合韦达定理, 可知焦点坐标的关系, 进而可求 $k_{MB} + k_{MC} = 0$, 从而可判断出 $\angle OMB, \angle OMC$ 的关系; ④: 计算直线 OD, OB 的斜率之差, 可得两直线斜率相等, 进而可判断三点 B, O, D 在同一条直线上.

【详解】

解: 对于①, 设 $A(a, b)$, 由抛物线的方程得 $F(1, 0)$, 则 $|AF| = a + 1 = 5$, 故 $a = 4$,

所以 $A(4, 4)$ 或 $(4, -4)$, 所以满足条件的点 A 有二个, 故①不正确;

对于②, 不妨设 $A(4, 4)$, 则 A 关于准线 $x = -1$ 的对称点为 $A'(-6, 4)$,

故 $|PA| + |OP| = |PA'| + |OP| \geq |A'O| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$,

当且仅当 A', P, O 三点共线时等号成立, 故②正确;

对于③, 由题意知, $M(-1, 0)$, 且 l 的斜率不为 0, 则设 l 方程为: $x = my + 1 (m \neq 0)$,

设 l 与抛物线的交点坐标为 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 联立直线与抛物线的方程为,

$\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 整理得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$, 所以

$x_1 + x_2 = 4m^2 + 2, x_1 x_2 = (my_1 + 1)(my_2 + 1) = -4m^2 + 4m^2 + 1 = 1$

则 $k_{MB} + k_{MC} = \frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = \frac{y_1(x_2 + 1) + y_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{2y_1 + 2y_2 + 2my_1 y_2}{x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1}$

$$= \frac{2 \times 4m - 2m \times 4}{4m^2 + 2 + 1 + 1} = 0. \text{故 } MB, MC \text{ 的倾斜角互补, 所以 } \angle OMB = \angle OMC, \text{ 故③正确.}$$

对于④, 由题意知 $D(-1, y_2)$, 由③知, $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$

$$\text{则 } k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{4}{y_1}, k_{OD} = -y_2, \text{ 由 } k_{OB} - k_{OD} = \frac{4}{y_1} + y_2 = \frac{4 + y_1 y_2}{y_1} = 0,$$

知 $k_{OB} = k_{OD}$, 即三点 B, O, D 在同一条直线上, 故④正确.

故选:C.

【点睛】

本题考查了抛物线的定义, 考查了直线与抛物线的位置关系, 考查了抛物线的性质, 考查了直线方程, 考查了两点的斜率公式. 本题的难点在于第二个命题, 结合初中的“饮马问题”分析出何时取最小值.

3、B

【解析】

分析: 首先利用同角三角函数关系式, 结合题中所给的角的范围, 求得 $\cos \alpha$ 的值, 之后借助于倍角公式, 将待求的式子转化为关于 $\cos \alpha$ 的式子, 代入从而求得结果.

详解: 根据题中的条件, 可得 α 为锐角,

$$\text{根据 } \tan \alpha = 2, \text{ 可求得 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{而 } \cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 3}{5}, \text{ 故选 B.}$$

点睛: 该题考查的是有关同角三角函数关系式以及倍角公式的应用, 在解题的过程中, 需要对已知真切求余弦的方法要明确, 可以应用同角三角函数关系式求解, 也可以结合三角函数的定义式求解.

4、A

【解析】

根据函数图像平移原则, 即可容易求得结果.

【详解】

$$\text{因为 } f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

故要得到 $g(x)$, 只需将 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度.

故选: A.

【点睛】

本题考查函数图像平移前后解析式的变化, 属基础题.

5、C

【解析】

可根据题意把要求的向量重新组合成已知向量的表达，利用向量数量积的性质，化简为三角函数最值。

【详解】

由题意可得：

$$\vec{c} - \vec{b} = (\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b}),$$

$$Q|\vec{c} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{c} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4 \cdot |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 4 \times 16 - 4 \times 4 = 52$$

$$\therefore |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13},$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{c} - \vec{b}|^2 &= (\vec{c} - \vec{b})^2 = [(\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b})]^2 = |(\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b})|^2 \\ &= |\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - 2\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \rangle \\ &= 3 + 52 + 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{13} \times \cos \langle \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \rangle \\ &= 55 + 4\sqrt{39} \times \cos \langle \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \rangle \end{aligned}$$

$$\leq 55 + 4\sqrt{39}$$

$$Q 55 + 4\sqrt{39} = 52 + 2 \times 2\sqrt{13} \times \sqrt{3} + 3 = (2\sqrt{13} + \sqrt{3})^2,$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查根据已知向量的模求未知向量的模的方法技巧，把要求的向量重新组合成已知向量的表达是本题的关键点。本题属中档题。

6、B

【解析】

根据题意，有两种分配方案，一是3:1:1，二是2:2:1，然后各自全排列，再求和。

【详解】

当按照3:1:1进行分配时，则有 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种不同的方案；

当按照2:2:1进行分配，则有 $C_3^2 A_3^3 = 18$ 种不同的方案。

故共有36种不同的派遣方案，

故选：B。

【点睛】

本题考查排列组合、数学文化，还考查数学建模能力以及分类讨论思想，属于中档题.

7、A

【解析】

根据双曲线的焦距是虚轴长的 2 倍，可得出 $c = 2b$ ，结合 $c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$ ，得出 $a^2 = 3b^2$ ，即可求出双曲线的渐近线方程.

【详解】

解：由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 可知，焦点在 x 轴上，

则双曲线的渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

由于焦距是虚轴长的 2 倍，可得： $c = 2b$ ，

$$\therefore c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{即： } a^2 = 3b^2, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以双曲线的渐近线方程为： $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质，以及双曲线的渐近线方程.

8、C

【解析】略

9、C

【解析】

根据空间中平行关系、垂直关系的相关判定和性质可依次判断各个选项得到结果.

【详解】

对于 A，若 $\alpha // \beta$ ，则 l, m 可能为平行或异面直线，A 错误；

对于 B，若 $\alpha \perp \beta$ ，则 l, m 可能为平行、相交或异面直线，B 错误；

对于 C，若 $l \perp \beta$ ，且 $l \subset \alpha$ ，由面面垂直的判定定理可知 $\alpha \perp \beta$ ，C 正确；

对于 D，若 $\alpha \perp \beta$ ，只有当 m 垂直于 α, β 的交线时才有 $m \perp \alpha$ ，D 错误.

故选：C.

【点睛】

本题考查空间中线面关系、面面关系相关命题的辨析，关键是熟练掌握空间中的平行关系与垂直关系的相关命题.

10、A

【解析】

由两圆相外切，得出 $a^2 + b^2 = 9$ ，结合二次函数的性质，即可得出答案.

【详解】

因为两圆 $(x+a)^2 + y^2 = 4$ 和 $x^2 + (y-b)^2 = 1$ 相外切

所以 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$ ，即 $a^2 + b^2 = 9$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2(9 - a^2)}{9} = -\left(a^2 - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}$$

当 $a^2 = \frac{9}{2}$ 时， $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ 取最大值 $\frac{81}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{9}{4}$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了由圆与圆的位置关系求参数，属于中档题.

11、B

【解析】

根据抛物线中过焦点的两段线段关系，可得 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p} = 1$ ；再由基本不等式可求得 $4|AF| + |BF|$ 的最小值.

【详解】

由抛物线标准方程可知 $p=2$

因为直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，由过抛物线焦点的弦的性质可知

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p} = 1$$

所以 $4|AF| + |BF|$

$$= (4|AF| + |BF|) \cdot \left(\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} \right)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/707023143044006142>