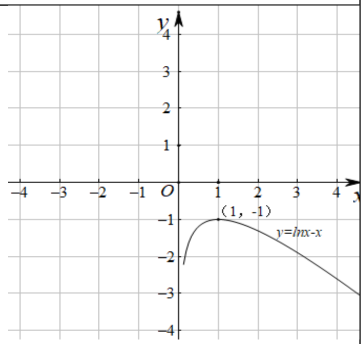
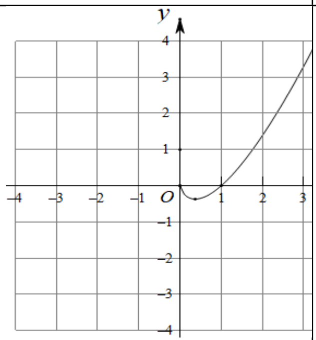
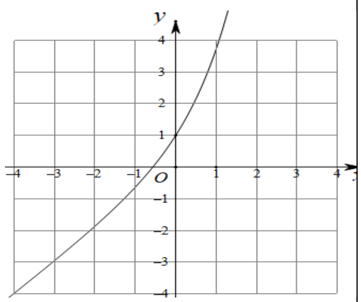
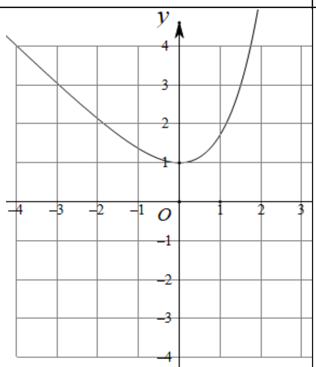
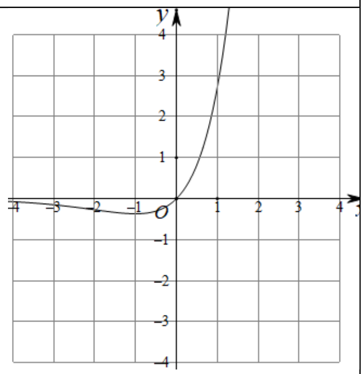
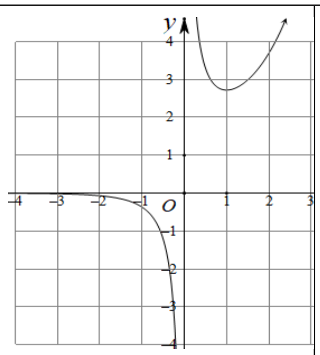
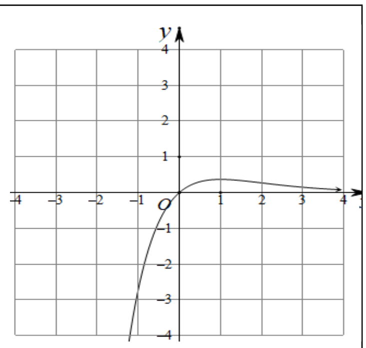
专题 11 导数中的同构问题

【考点预测】

知识点一、常见的同构函数图像

函数表达式	图像	函数表达式	图像
$y=\ln x+x$		$y=\ln x-x$ 函数极值点 $(1,-1)$	
$y=x\ln x$ 函数极值点 $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$		$y=\frac{\ln x}{x}$ 函数极值点 $\left(e,\frac{1}{e}\right)$	
$y=\frac{x}{\ln x}$ 函数极值点 (e,e)		$y=e^{x}+x$ 过定点 $(0,1)$	
$y=e^{x}-x$ 函数极值点 $(0,1)$		$y=xe^{x}$ 函数极值点 $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$	

$y=\frac{e^x}{x}$ 函数极值点 $\left(1,e\right)$		$y=\frac{x}{e^x}$ 函数极值点 $\left(1,\frac{1}{e}\right)$	

知识点二：同构式的基本概念与导数压轴题

1、同构式：是指除了变量不同，其余地方均相同的表达式

2、同构式的应用：

（1）在方程中的应用：如果方程 $f\left(a\right)=0$ 和 $f\left(b\right)=0$ 呈现同构特征，则 a,b 可视为方程 $f\left(x\right)=0$ 的两个根

（2）在不等式中的应用：如果不等式的两侧呈现同构特征，则可将相同的结构构造为一个函数，进而和函数的单调性找到联系。可比较大小或解不等式。<同构小套路>

①指对各一边，参数是关键；②常用“母函数”：$f\left(x\right)=x\cdot e^x$，$f\left(x\right)=e^x\pm x$；寻找“亲戚函数”是关键；

③信手拈来凑同构，凑常数、x、参数；④复合函数（亲戚函数）比大小，利用单调性求参数范围.

（3）在解析几何中的应用：如果 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 满足的方程为同构式，则 A,B 为方程所表示曲线上的两点。特别的，若满足的方程是直线方程，则该方程即为直线 AB 的方程

（4）在数列中的应用：可将递推公式变形为“依序同构”的特征，即关于 $\left(a_n,n\right)$ 与 $\left(a_{n-1},n-1\right)$ 的同构式，从而将同构式设为辅助数列便于求解

3、常见的指数放缩：$e^x\geq x+1(x=0);e^x\geq ex(x=1)$

4、常见的对数放缩：$1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1(x=1);\ln x\leq \frac{x}{e}(x=e)$

5、常见三角函数的放缩：$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\sin x<x<\tan x$

6、学习指对数的运算性质时，曾经提到过两个这样的恒等式：

（1） 当$a>0$且$a\neq 1$, $x>0$时，有$a^{\log_a x}=x$

（2） 当 $a>0$且$a\neq 1$时，有$\log_a a^x=x$

再结合指数运算和对数运算的法则，可以得到下述结论（其中$x>0$ ）

（3）$x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln x};x+\ln x=\ln\left(x\mathrm{e}^x\right)$

（4）$\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}:x-\ln x=\ln\dfrac{e^x}{x}$

（5）$x^2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+2\ln x};x+2\ln x=\ln\left(x^2\mathrm{e}^x\right)$

（6）$\dfrac{e^x}{x^2}=e^{x-2\ln x},\dfrac{e^x}{x^2}=e^{x-2\ln x}$

再结合常用的切线不等式 lnx≤x-1，$\ln x\leq\dfrac{x}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^x\geq x+1,\mathrm{e}^x\geq \mathrm{e}x$ 等，可以得到更多的结论，这里仅以第

（3）条为例进行引申：

（7）$x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln x}\geq x+\ln x+1$； $x+\ln x=\ln\left(x\mathrm{e}^x\right)\leq x\mathrm{e}^x-1$

（8）$x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln x}\geq \mathrm{e}(x+\ln x)$； $x+\ln x=\ln\left(xe^x\right)\leq\dfrac{xe^x}{e}=xe^{x-1}$

【题型归纳目录】

题型一：不等式同构

题型二：同构变形

题型三：零点同构

题型四：利用同构解决不等式恒成立问题

题型五：利用同构求最值

题型六：利用同构证明不等式

【典例例题】

题型一：不等式同构

例 1．（2023·陕西·西安中学模拟预测（理））已知$a,b,c\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$，且$\frac{\ln 5}{a}=-5\ln a$，$\frac{\ln 3}{b}=-3\ln b$，$\frac{\ln 2}{c}=-2\ln c$，则（　　）

A．$b<c<a$　　　　B．$c<b<a$

C．$a<c<b$　　　　D．$a<b<c$

例 2．（2023·河南焦作·三模（理））设$a=\mathrm{e}^{0.02}-1$，$b=2\left(\mathrm{e}^{0.01}-1\right)$，$c=\sin 0.01+\tan 0.01$，则（　　）

A．$a>b>c$　　　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　　　D．$b>c>a$

例 3．（2023·四川·广安二中模拟预测（理））已知$0<x<y<\pi$，且$\mathrm{e}^{y}\sin x=\mathrm{e}^{x}\sin y$，其中 e 为自然对数的底数，则下列选项中一定成立的是（　　）

A．$\cos x+\cos y<0$　　　　B．$\cos x+\cos y>0$

C．$\cos x>\sin y$　　　　D．$\sin x>\sin y$

题型二：同构变形

例 4．（2023·全国·高三专题练习）对下列不等式或方程进行同构变形，并写出相应的同构函数．

(1)$\log_2 x-k\cdot 2^{kx}\ge 0$；

(2)$\mathrm{e}^{2\lambda x}-\frac{1}{\lambda}\ln\sqrt{x}\ge 0$；

(3)$x^2\ln x-m\mathrm{e}^{\frac{m}{x}}\ge 0$；

(4)$a\left(\mathrm{e}^{ax}+1\right)\ge 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$；

(5)$a\ln\left(x-1\right)+2\left(x-1\right)\ge ax+2\mathrm{e}^{x}$；

(6)$x+a\ln x+\mathrm{e}^{-x}\ge x^{a}\left(x>1\right)$；

(7)$\mathrm{e}^{-x}-2x-\ln x=0$；

(8)$x^2\mathrm{e}^{x}+\ln x=0$．

题型三：零点同构

例 5．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x}-2a(\ln x+x)$ 有两个零点，则 a 的最小整数值为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

例 6．（2023·全国·模拟预测）在数学中，我们把仅有变量不同，而结构、形式相同的两个式子称为同构式，相应的方程称为同构方程，相应的不等式称为同构不等式．若关于 a 的方程 $a\mathrm{e}^{a}=\mathrm{e}^{6}$ 和关于 b 的方程 $b(\ln b-2)=\mathrm{e}^{3\lambda-1}$（$a$，$b$，$\lambda\in\mathrm{R}$）可化为同构方程，则 $\lambda=$________，$\ln(ab)=$________．

例 7．（2023·安徽安庆·高三阶段练习（理））在数学中，我们把仅有变量不同，而结构、形式相同的两个式子称为同构式，相应的方程称为同构方程，相应的不等式称为同构不等式.若关于 a 的方程 $ae^{a}=e^{6}$ 和关于 b 的方程 $b(\ln b-2)=e^{3\lambda-1}(a,b\in R)$ 可化为同构方程.

（1）求 ab 的值；

（2）已知函数 $f(x)=x(\ln x+\frac{1}{3}\lambda)$.若斜率为 k 的直线与曲线 $y=f'(x)$ 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$ 两点，求证：.$x_1<\frac{1}{k}<x_2$

例 8．（2023·辽宁·大连市普兰店区高级中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x+1$．

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设函数 $g(x)=a\mathrm{e}^{x}-x+\ln a$，若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围．

题型四：利用同构解决不等式恒成立问题

例 9．（2023·陕西·长安一中模拟预测（理））若对任意 $x>0$，恒有 $a\left(e^{ax}+1\right)\geq 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$，则实数 a 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{e^{2}}$　　B．$\frac{2}{e^{2}}$　　C．$\frac{1}{e}$　　D．$\frac{2}{e}$

例 10．（2023·河南·高三期末（理））若关于 x 的不等式 $a\ln x+1\leq x\left(\mathrm{e}^{x}-a\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 恒成立，则 a

的取值范围是______.

例 11．（2023·全国·高三专题练习）已知$\lambda>0$，对任意的$x\in(0,+\infty)$，不等式$e^{2\lambda x}-\dfrac{\ln x}{2\lambda}\geq 0$恒成立，则$\lambda$的最小值为___________.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）若关于x的不等式$e^{x}-a\ln x\geq a$恒成立，则实数a的取值范围为__________.

例 13．（2023·全国·高三专题练习）已知不等式$x+m\ln x+\dfrac{1}{e^{x}}\geq x^{m}$对$x\in\left(1,+\infty\right)$恒成立，则实数 m 的最小值为__________.

例 14．（2023·全国·高三专题练习）设$k>0$，若存在正实数x，使得不等式$\log_{27}x-k\cdot 3^{kx-1}\geq 0$成立，则$k$的最大值为（　　）

A．$\dfrac{1}{e\ln 3}$　　B．$\dfrac{\ln 3}{e}$　　C．$\dfrac{e}{\ln 3}$　　D．$\dfrac{\ln 3}{2}$

例 15．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=xe^{2x}-1$，不等式$f(x)\geq mx+\ln x$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,2]$　　B．$[0,2]$　　C．$\left(-\infty,e^{2}-1\right]$　　D．$\left[0,e^{2}-1\right]$

例 16．（2023·河南·高三阶段练习（文））若关于x的不等式$ax-\mathrm{e}^{x}<a\left(\ln x+1\right)-\mathrm{e}x$在$\left(1,+\infty\right)$上恒成立，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$　　B．$\left(-\infty,3\right]$　　C．$\left(-\infty,2\right]$　　D．$\left(-\infty,\mathrm{e}\right]$

例 17．（2023·全国·高三专题练习（理））已知函数$f(x)=ax^{2}+(a+1)\ln x+1(a\leqslant -1)$，对$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，恒有$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geqslant 4\left|x_1-x_2\right|$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-\mathrm{e}^{2}]$　　B．$(-\infty,-\mathrm{e}]$　　C．$[-2,-1]$　　D．$(-\infty,-2]$

例 18．（2023·全国·高三专题练习（理））已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{4}}-k\ln x$，当$x>1$时，不等式$f\left(x\right)\geq x+1$恒成立，则 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\mathrm{e}\right]$　　B．$\left(-\infty,-4\right]$　　C．$\left(-\infty,-\mathrm{e}^{2}\right]$　　D．$\left(-\infty,0\right]$

例 19．（2023·安徽亳州·高三期末（理））已知$a<0$，若$x>1$时，$\mathrm{e}^{-x}-\ln\mathrm{e}^{-x}\geq x^{a}-\ln x^{a}$恒成立，则$a$

的最小值为（　　）

A．-1　　　　B．-2　　　　C．$-\mathrm{e}$　　　　D．$-2e$

例 20．（2023·安徽合肥·高三期末（理））若不等式$\mathrm{e}^{x}-a\ln(ax-1)+1\geq 0$对$\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$恒成立（e为自然对数的底数），则实数$a$的最大值为（　　）

A．$\mathrm{e}+1$　　　　B．e　　　　C．$\mathrm{e}^{2}+1$　　　　D．e^{2}

例 21．（2023·全国·高三专题练习）已知不等式$x+a\ln x+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}>x^{a}$对$x\in(1,+\infty)$恒成立，则实数$a$的最小值为（　　）

A．$-\sqrt{\mathrm{e}}$　　　　B．$-\frac{\mathrm{e}}{2}$　　　　C．$-\mathrm{e}$　　　　D．$-2e$

题型五：利用同构求最值

例 22．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=x+\ln(x-1)$，$g(x)=x\ln x$，若$f(x_1)=1+2\ln t$，$g(x_2)=t^{2}$，则$(x_1x_2-x_2)\ln t$的最小值为（　　）.

A．$\frac{1}{e^{2}}$　　　　B．$\frac{2}{e}$　　　　C．$-\frac{1}{2e}$　　　　D．$-\frac{1}{e}$

例 23．（2023·全国·高三专题练习（理））设大于 1 的两个实数a，b满足$\frac{\ln^{2}b}{e^{2a}}<\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$，则正整数$n$的最大值为（　　）.

A．7　　　　B．9　　　　C．11　　　　D．12

题型六：利用同构证明不等式

例 24．（2023·福建南平·三模）已知函数$f(x)=\frac{m}{x}+\ln x$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若$\frac{1}{4}<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$，求证：函数$g(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{m}\mathrm{e}^{-\frac{m}{x}}$有两个零点$x_1$，$x_2$且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2\mathrm{e}$.

例 25．（2023·四川眉山·三模（文））已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x^{\mathrm{e}}\left(x>0\right)$．

(1)求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)证明：当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{e}\ln x\left[\ln x-\ln\left(\ln x\right)\right]<x$．

例 26．（2023·河北·高三阶段练习）已知函数 $f(x)=x\ln x$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)设 a，b 为两个不相等的正数，且 $a^{b}=b^{a}$，证明：$\frac{2}{\mathrm{e}}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$．

例 27．（2023·河南郑州·二模（文））已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{x}-\frac{2}{x}+1$，$g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}+2$．

(1)求函数 $g\left(x\right)$ 的极值；

(2)当 $x>0$ 时，证明：$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$

(1)讨论 $f(x)$的单调性.

(2)若 $a=0$，证明：对任意的 $x>1$，都有 $f\left(x\right)\ge x^{4}-3x^{3}\ln x+x^{3}$．

例 28．（2023·河南省浚县第一中学模拟预测（理））已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax\left(a\in\mathbf{R}\right)$．

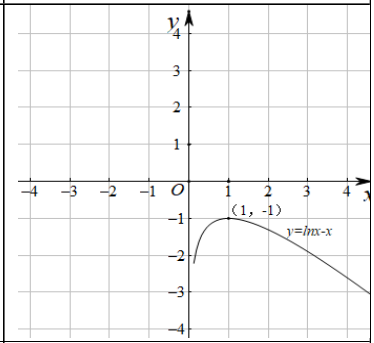
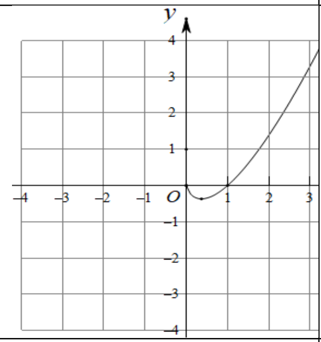
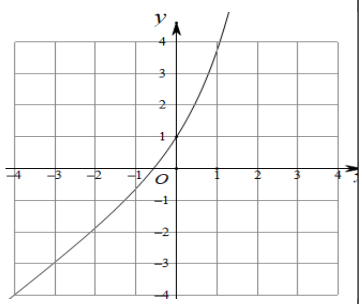
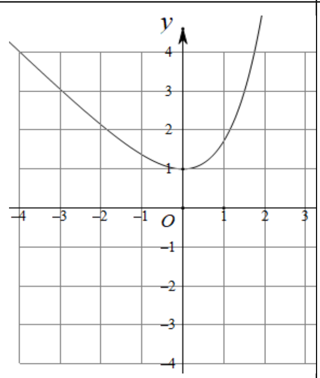
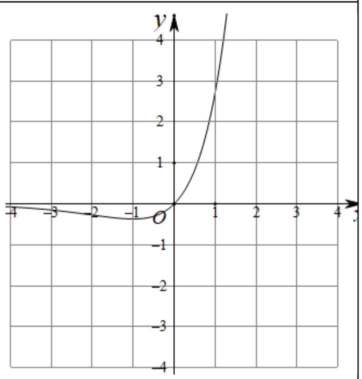
(1)讨论 $f(x)$的单调性.

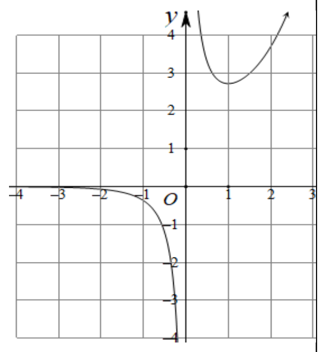
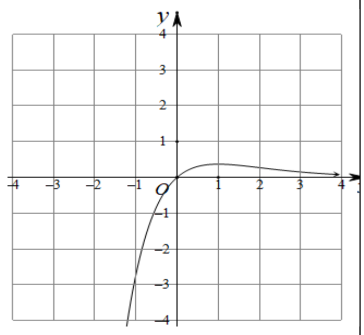
(2)若 $a=0$，证明：对任意的 $x>1$，都有 $f\left(x\right)\ge x^{4}-3x^{3}\ln x+x^{3}$．

专题 11 导数中的同构问题

【考点预测】

知识点一、常见的同构函数图像

函数表达式	图像	函数表达式	图像
$y=\ln x+x$		$y=\ln x-x$ 函数极值点 $(1,-1)$	
$y=x\ln x$ 函数极值点 $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$		$y=\frac{\ln x}{x}$ 函数极值点 $\left(e,\frac{1}{e}\right)$	
$y=\frac{x}{\ln x}$ 函数极值点 (e,e)		$y=e^x+x$ 过定点 $(0,1)$	
$y=e^x-x$ 函数极值点 $(0,1)$		$y=xe^x$ 函数极值点 $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$	

$y=\dfrac{e^{x}}{x}$ 函数极值点 $\left(1,e\right)$		$y=\dfrac{x}{e^{x}}$ 函数极值点 $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$	

知识点二：同构式的基本概念与导数压轴题

1、同构式：是指除了变量不同，其余地方均相同的表达式

2、同构式的应用：

（1）在方程中的应用：如果方程 $f\left(a\right)=0$ 和 $f\left(b\right)=0$ 呈现同构特征，则 a,b 可视为方程 $f\left(x\right)=0$ 的两个根

（2）在不等式中的应用：如果不等式的两侧呈现同构特征，则可将相同的结构构造为一个函数，进而和函数的单调性找到联系。可比较大小或解不等式。<同构小套路>

①指对各一边，参数是关键；②常用“母函数”：$f\left(x\right)=x\cdot e^{x}$，$f\left(x\right)=e^{x}\pm x$；寻找“亲戚函数”是关键；

③信手拈来凑同构，凑常数、x、参数；④复合函数（亲戚函数）比大小，利用单调性求参数范围.

（3）在解析几何中的应用：如果 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 满足的方程为同构式，则 A,B 为方程所表示曲线上的两点。特别的，若满足的方程是直线方程，则该方程即为直线 AB 的方程

（4）在数列中的应用：可将递推公式变形为“依序同构”的特征，即关于 $\left(a_n,n\right)$ 与 $\left(a_{n-1},n-1\right)$ 的同构式，从而将同构式设为辅助数列便于求解

3、常见的指数放缩：$e^{x}\geq x+1(x=0);e^{x}\geq ex(x=1)$

4、常见的对数放缩：$1-\dfrac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1(x=1);\ln x\leq \dfrac{x}{e}(x=e)$

5、常见三角函数的放缩：$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\sin x<x<\tan x$

6、学习指对数的运算性质时，曾经提到过两个这样的恒等式：

（1）当 $a>0$ 且 $a\neq 1,\quad x>0$ 时，有 $a^{\log_a x}=x$

（2）当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，有 $\log_a a^{x}=x$

再结合指数运算和对数运算的法则，可以得到下述结论（其中 $x>0$ ）

（3） $xe^{x}=e^{x+\ln x};x+\ln x=\ln\left(xe^{x}\right)$

（4） $\frac{e^{x}}{x}=e^{x-\ln x}:x-\ln x=\ln\frac{e^{x}}{x}$

（5） $x^{2}e^{x}=e^{x+2\ln x};x+2\ln x=\ln\left(x^{2}e^{x}\right)$

（6） $\frac{e^{x}}{x^{2}}=e^{x-2\ln x},\frac{e^{x}}{x^{2}}=e^{x-2\ln x}$

再结合常用的切线不等式 lnx≤x-1， $\ln x\le\frac{x}{e},e^{x}\ge x+1,e^{x}\ge ex$ 等，可以得到更多的结论，这里仅以第（3）条为例进行引申：

（7） $xe^{x}=e^{x+\ln x}\ge x+\ln x+1$； $x+\ln x=\ln\left(xe^{x}\right)\le xe^{x}-1$

（8） $xe^{x}=e^{x+\ln x}\ge e(x+\ln x)$； $x+\ln x=\ln\left(xe^{x}\right)\le\frac{xe^{x}}{e}=xe^{x-1}$

【题型归纳目录】

题型一：不等式同构

题型二：同构变形

题型三：零点同构

题型四：利用同构解决不等式恒成立问题

题型五：利用同构求最值

题型六：利用同构证明不等式

【典例例题】

题型一：不等式同构

例 1．（2023·陕西·西安中学模拟预测（理））已知 $a,b,c\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，且 $\frac{\ln 5}{a}=-5\ln a$，$\frac{\ln 3}{b}=-3\ln b$，$\frac{\ln 2}{c}=-2\ln c$，则（　　）

A． $b<c<a$　　　　B． $c<b<a$

C． $a<c<b$　　　　D． $a<b<c$

答案：A

【解析】

分析：

构造函数 $f(x)=x\ln x$，根据单调性即可确定 a,b,c 的大小.

【详解】

设函数 $f(x)=x\ln x$， $f^{'}(x)=1+\ln x$，当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right), f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right), f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减，由题 $\frac{\ln 5}{a}=-5\ln a$， $\frac{\ln 3}{b}=-3\ln b$， $\frac{\ln 2}{c}=-2\ln c$，得 $a\ln a=\frac{1}{5}\ln\frac{1}{5}, b\ln b=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}, c\ln c=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}$，因为 $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $\frac{1}{5}\ln\frac{1}{5}>\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}>\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}$，则 $a\ln a>c\ln c>b\ln b$，且 $a,b,c\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$，所以 $a>c>b$.

故选：A.

【点睛】

解本题的关键是发掘题中三个式子的相似性，并进行等价变形，易于构造函数，本题多次利用函数的单调性，先利用单调性判断函数值大小，再由函数单调性判断自变量大小.

例 2.（2023·河南焦作·三模（理））设 $a=\mathrm{e}^{0.02}-1$， $b=2\left(\mathrm{e}^{0.01}-1\right)$， $c=\sin 0.01+\tan 0.01$，则（　　）

A． $a>b>c$　　　　B． $a>c>b$

C． $c>a>b$　　　　D． $b>c>a$

答案：A

【解析】

【详解】

因为 $a-b=\mathrm{e}^{0.02}-2\mathrm{e}^{0.01}+1=\left(\mathrm{e}^{0.01}-1\right)^2>0$，所以 $a>b$.

设 $f(x)=2\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\sin x-\tan x$，

则 $f'(x)=2\mathrm{e}^x-\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}$，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2\mathrm{e}^x+\sin x-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时， $2\mathrm{e}^x>2$， $\sin x>0$， $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}<\frac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^3\frac{\pi}{6}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}<2$，

所以 $g'(x)>0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时， $f'(x)>f'(0)=0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，

从而 $f(x)>f(0)=0$，

因此 $f(0.01)>0$，即 $b>c$.

综上可得 $a>b>c$.

故选：A

【点睛】

比较函数值的大小，要结合函数值的特点，选择不同的方法，本题中，a,b可以作差进行比较大小，而b,c的大小比较，则需要构造函数，由导函数得到其单调性，从而比较出大小，有难度，属于难题.

例3．（2023·四川·广安二中模拟预测（理））已知$0<x<y<\pi$，且$e^{y}\sin x=e^{x}\sin y$，其中e为自然对数的底数，则下列选项中一定成立的是（　　）

A．$\cos x+\cos y<0$　　　　B．$\cos x+\cos y>0$

C．$\cos x>\sin y$　　　　D．$\sin x>\sin y$

答案：B

【解析】

分析：

构造$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{e^{x}}$，$0<x<\pi$，求导研究其单调性，判断出D选项，利用同角三角函数关系得到AB选项，构造差函数，得到$x>\dfrac{\pi}{2}-y$，从而判断出C选项.

【详解】

构造$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{e^{x}}$，$0<x<\pi$，则$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{e^{x}}>0$恒成立，

则$f'\left(x\right)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^{x}}$，

当$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，$\cos x>\sin x$，$f'\left(x\right)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^{x}}>0$，

当$\dfrac{\pi}{4}<x<\pi$时，$\cos x<\sin x$，$f'\left(x\right)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^{x}}<0$

所以$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{e^{x}}$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$单调递减，

因为$0<x<y<\pi$，所以$0<x<\dfrac{\pi}{4}<y<\pi$，$0<e^{x}<e^{y}$，

又$\dfrac{\sin x}{e^{x}}=\dfrac{\sin y}{e^{y}}>0$，所以$0<\sin x<\sin y$，D错误，

因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}<y<\pi$，所以$\cos x=\sqrt{1-\sin^{2}x}>0$，$\left|\cos y\right|=\sqrt{1-\sin^{2}y}$，

所以$\cos x>\left|\cos y\right|$，所以$\cos x+\cos y>0$，A错误，B正确.

令$g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，则$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，

$$g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}+\frac{\sin x-\cos x}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}=\frac{(\sin x-\cos x)\left(e^x-e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$

当$0<x<\pi$时，$g'(x)>0$恒成立，

所以$g(x)=f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$在$(0,\pi)$上单调递增，

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$g(x)=f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$，即$f(x)<f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，

因为$f(x)=f(y)$，

所以$f(y)<f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

因为$0<x<\frac{\pi}{4}<y<\pi$，

所以$\frac{\pi}{2}-x>\frac{\pi}{4}$，

因为$f(x)$在在$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$单调递减，

所以$y>\frac{\pi}{2}-x$，即$x>\frac{\pi}{2}-y$

因为$\varphi(x)=\cos x$在$(0,\pi)$上单调递减，

所以$\cos x<\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y$，C 错误

故选：B

【点睛】

结合题目特征，构造函数，利用函数单调性比较函数值的大小，是比较大小很重要的方法，本题中构造$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$进行求解.

题型二：同构变形

例 4．（2023·全国·高三专题练习）对下列不等式或方程进行同构变形，并写出相应的同构函数.

(1) $\log_2 x-k\cdot 2^{kx}\geq 0$；

(2) $e^{2\lambda x}-\frac{1}{\lambda}\ln\sqrt{x}\geq 0$；

(3) $x^2\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0$；

(4) $a\left(e^{ax}+1\right)\geq 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$；

(5) $a\ln(x-1)+2(x-1)\ge ax+2e^{x}$；

(6) $x+a\ln x+e^{-x}\ge x^{a}(x>1)$；

(7) $e^{-x}-2x-\ln x=0$；

(8) $x^{2}e^{x}+\ln x=0$．

答案：(1) $(\log_2 x)\cdot 2^{\log_2 x}\ge kx\cdot 2^{kx}$， $f(x)=x\cdot 2^{x}$．

(2) $2\lambda xe^{2\lambda x}\ge(\ln x)e^{\ln x}$， $g(x)=xe^{x}$．

(3) $\ln x+\ln(\ln x)\ge\dfrac{m}{x}+\ln\dfrac{m}{x}$， $h(x)=x+\ln x$．

(4) $ax\cdot e^{ax}+ax\ge\ln x^{2}\cdot e^{\ln x^{2}}+\ln x^{2}$， $u(x)=xe^{x}+x$．

(5) $a\ln(x-1)+2(x-1)\ge a\ln e^{x}+2e^{x}$， $v(x)=a\ln x+2x$．

(6) $e^{-x}-\ln e^{-x}\ge x^{a}-\ln x^{a}$， $r(x)=x-\ln x$．

(7) $e^{-x}+\ln e^{-x}=x+\ln x$， $\varphi(x)=x+\ln x$．

(8) $e^{x}\ln e^{x}=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}$， $\phi(x)=x\ln x$．

【解析】

分析：

（1）（2）（3）（4）（5）（6）（7）（8）根据给定的不等式或等式，利用等式不等式性质、指对数式互化变形成不等号或等号两边结构相同的形式，再构建函数作答.

(1)

显然 $x>0$，则 $\log_2 x-k\cdot 2^{kx}\ge 0\Leftrightarrow x\log_2 x\ge kx\cdot 2^{kx}\Leftrightarrow(\log_2 x)\cdot 2^{\log_2 x}\ge kx\cdot 2^{kx}$， $f(x)=x\cdot 2^{x}$．

(2)

显然 $x>0$，则 $e^{2\lambda x}-\dfrac{1}{\lambda}\ln\sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow e^{2\lambda x}\ge\dfrac{1}{2\lambda}\ln x\Leftrightarrow 2\lambda xe^{2\lambda x}\ge x\ln x\Leftrightarrow 2\lambda xe^{2\lambda x}\ge(\ln x)e^{\ln x}$，

$g(x)=xe^{x}$．

(3)

显然 $x>0$，则 $x^{2}\ln x-me^{\frac{m}{x}}\ge 0\Leftrightarrow x\ln x\ge\dfrac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Leftrightarrow\ln x+\ln(\ln x)\ge\dfrac{m}{x}+\ln\dfrac{m}{x}$， $h(x)=x+\ln x$．

(4)

显然 $x>0$，则 $a(e^{ax}+1)\ge 2(x+\dfrac{1}{x})\ln x\Leftrightarrow axe^{ax}+ax\ge 2x^{2}\ln x+2\ln x=x^{2}\ln x^{2}+\ln x^{2}$

$\Leftrightarrow ax\cdot e^{ax}+ax\ge\ln x^{2}\cdot e^{\ln x^{2}}+\ln x^{2}$， $u(x)=xe^{x}+x$．

(5)

$a\ln(x-1)+2(x-1)\ge ax+2e^{x}\Leftrightarrow a\ln(x-1)+2(x-1)\ge a\ln e^{x}+2e^{x}$， $v(x)=a\ln x+2x$．

(6)

$x>1$， $x+a\ln x+e^{-x}\ge x^{a}\Leftrightarrow x+e^{-x}\ge x^{a}-\ln x^{a}\Leftrightarrow e^{-x}-\ln e^{-x}\ge x^{a}-\ln x^{a}$， $r(x)=x-\ln x$．

(7)

$e^{-x}-2x-\ln x=0 \Leftrightarrow e^{-x}-x=x+\ln x \Leftrightarrow e^{-x}+\ln e^{-x}=x+\ln x$，$\varphi(x)=x+\ln x$.

(8)

$x^2e^x+\ln x=0 \Leftrightarrow xe^x=-\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow xe^x=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} \Leftrightarrow e^x\ln e^x=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$，$\phi(x)=x\ln x$.

题型三：零点同构

例 5.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=xe^x-2a(\ln x+x)$ 有两个零点，则 a 的最小整数值为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

答案：C

【解析】

分析：

先将函数化为 $f(x)=e^{x+\ln x}-2a(\ln x+x)$，令 $t=x+\ln x$，进而只需说明 $g(t)=e^t-2at$ 在 R 上有两个零点，然后对函数求导，讨论出函数的单调区间和最值，最后通过放缩法解决问题.

【详解】

$f(x)=xe^x-2a(\ln x+x)=e^{x+\ln x}-2a(\ln x+x)$，

设 $t=x+\ln x(x>0)$，$t'=1+\frac{1}{x}>0$，即函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，易得 $t\in R$，于是问题等价于函数 $g(t)=e^t-2at$ 在 R 上有两个零点，$g'(t)=e^t-2a$，

若 $a\le 0$，则 $g'(t)>0$，函数 $g(t)$ 在 R 上单调递增，至多有 1 个零点，不合题意，舍去；

若 $a>0$，则 $x\in(-\infty,\ln 2a)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，$x\in(\ln 2a,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增.

因为函数 $g(t)$ 在 R 上有两个零点，所以 $g(t)_{\min}=g(\ln 2a)=2a(1-\ln 2a)<0 \Rightarrow a>\frac{e}{2}$，

而 $g(0)=1>0$，

限定 $t>1$ ，记 $\varphi(t)=e^t-t$，$\varphi'(t)=e^t-1>0$，即 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，于是 $\varphi(t)=e^t-t>\varphi(1)=e-1>0 \Rightarrow e^t>t$，则 $t>2$ 时 ，$e^{\frac{t}{2}}>\frac{t}{2} \Rightarrow e^t>\frac{t^2}{4}$，此时 $g(t)>\frac{t^2}{4}-2at=\frac{t}{4}(t-8a)$，因为 $a>\frac{e}{2}$，所以 $8a>4e>1$，于是 $t>8a$ 时，$g(t)>0$.

综上：当 $a>\frac{e}{2}$ 时，有两个交点，a 的最小整数值为 2.

故选：C.

例 6.（2023

·全国·模拟预测）在数学中，我们把仅有变量不同，而结构、形式相同的两个式子称为同构式，相应的方程称为同构方程，相应的不等式称为同构不等式．若关于 a 的方程 $a\mathrm{e}^{a}=\mathrm{e}^{6}$ 和关于 b 的方程 $b(\ln b-2)=\mathrm{e}^{3\lambda-1}$（$a$，$b$，$\lambda\in\mathrm{R}$）可化为同构方程，则 $\lambda=$________，$\ln(ab)=$________.

答案： 3 8

【解析】

分析：

两个方程分别取自然对数，转化后由同构的定义求得 λ，然后利用新函数的单调性得 a,b 关系，从而求得 ab 的值.

【详解】

对 $a\mathrm{e}^{a}=\mathrm{e}^{6}$ 两边取自然对数得 $\ln a+a=6$ ①．对 $b(\ln b-2)=\mathrm{e}^{3\lambda-1}$ 两边取自然对数得 $\ln b+\ln(\ln b-2)=3\lambda-1$，即 $\ln b-2+\ln(\ln b-2)=3\lambda-3$ ②.

因为方程①，②为两个同构方程，所以 $3\lambda-3=6$，解得 $\lambda=3$.

设 $f(x)=\ln x+x$（$x>0$），则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以方程 $f(x)=6$ 的解只有一个，所以 $a=\ln b-2$，

所以 $ab=(\ln b-2)b=b(\ln b-2)=\mathrm{e}^{3\times3-1}=\mathrm{e}^{8}$，故 $\ln(ab)=\ln\mathrm{e}^{8}=8$.

故答案为：3；8.

例 7.（2023·安徽安庆·高三阶段练习（理））在数学中，我们把仅有变量不同，而结构、形式相同的两个式子称为同构式，相应的方程称为同构方程，相应的不等式称为同构不等式.若关于 a 的方程 $ae^{a}=e^{6}$ 和关于 b 的方程 $b(\ln b-2)=e^{3\lambda-1}(a,b\in R)$ 可化为同构方程.

（1）求 ab 的值；

（2）已知函数 $f(x)=x(\ln x+\frac{1}{3}\lambda)$.若斜率为 k 的直线与曲线 $y=f'(x)$ 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$ 两点，求证：.$x_1<\dfrac{1}{k}<x_2$

答案：（1） e^{8}；（2）答案见解析.

【解析】

分析：

（1）根据同构方程的定义，以及关于 a 的方程 $ae^{a}=e^{6}$ 和关于 b 的方程 $b(\ln b-2)=e^{3\lambda-1}(a,b\in R)$ 可化为同构方程知 $3\lambda-3=6$，$\lambda=3$；$\varphi(x)$ 在（0,+∞）单调递增，所以方程 $\varphi(x)$=6 的解只有一个得 $a=\ln b-2$，则可得 $ab=e^{8}$；

（2）将所要证明的 $x_1<\frac{1}{k}<x_2$ 转化为证明 $1<\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}<\frac{x_2}{x_1}$，利用换元法将双变量化为单变量，

故等价于证 $\ln t<t-1<t\ln t(t>1)$，通过证明 $t-1>\ln t$ 和 $t-1<t\ln t$ 来达到证明原式的目的.

【详解】

（1）对 $ae^a=e^6$ 两边取自然对数，得 $\ln a+a=6$ (1),

对 $b(\ln b-2)=e^{3\lambda-1}(a,b\in R)$ 两边取自然对数，得 $\ln b+\ln(\ln b-2)=3\lambda-1$,

即 $\ln b-2+\ln(\ln b-2)=3\lambda-3$(2).，

因为(1)(2)方程为两个同构方程，所以 $3\lambda-3=6$ ，解得 $\lambda=3$ ，

设 $\varphi(x)=\ln x+x,x>0$ ，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ ，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以方程 $\varphi(x)=6$ 的解只有一个,

所以 $a=\ln b-2$ ，所以 $ab=(\ln b-2)b=b(\ln b-2)=e^{3\times3-1}=e^8$ ，

故 $ab=e^8$.

（2）由（1）知：$f(x)=x(\ln x+\frac{1}{3}\lambda)=x(\ln x+\frac{1}{3}\times3)=x\ln x+x,x\in(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=\ln x+2,k=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$,

要证 $x_1<\frac{1}{k}<x_2$，即证明 $x_1<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<x_2$，等价于 $1<\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}<\frac{x_2}{x_1}$,

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$ ，则只要证明 $1<\frac{t-1}{\ln t}<t$ 即可，

由 $t>1$ 知，$\ln t>0$ ，故等价于证 $\ln t<t-1<t\ln t(t>1)$.

设 $g(t)=t-1-\ln t(t>1)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{t}>0(t>1)$ ，即 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $g(t)>g(1)=0$ ，即 $t-1>\ln t$.

设 $h(t)=t\ln t-(t-1)(t>1)$，则 $h'(t)=\ln t>0(t>1)$ ，即 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(t)>h(1)=0$，即 $t-1<t\ln t$ 。

由上可知 $\ln t<t-1<t\ln t(t>1)$ 成立，则 $x_1<\frac{1}{k}<x_2$.

例 8．（2023·辽宁·大连市普兰店区高级中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x+1$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设函数 $g(x)=ae^x-x+\ln a$，若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围．