

宁夏吴忠市青铜峡高级中学 2023-2024 学年高考临考冲刺数学试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位, 若 $z = 1 + ai$, $z\bar{z} = 2$, 则实数 $a =$ ()

- A. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ B. -1 或 1 C. 1 D. $\sqrt{2}$

2. 已知点 P 不在直线 l 、 m 上, 则“过点 P 可以作无数个平面, 使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 A, B, C, D 是球 O 的球面上四个不同的点, 若 $AB = AC = DB = DC = BC = 2$, 且平面 $DBC \perp$ 平面 ABC , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{20\pi}{3}$ B. $\frac{15\pi}{2}$ C. 6π D. 5π

4. 若复数 z 满足 $(1+i)\bar{z} = 1+2i$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

5. 已知甲、乙两人独立出行, 各租用共享单车一次 (假定费用只可能为 1、2、3 元). 甲、乙租车费用为 1 元的概率分别是 0.5、0.2, 甲、乙租车费用为 2 元的概率分别是 0.2、0.4, 则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为 ()

- A. 0.18 B. 0.3 C. 0.24 D. 0.36

6. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”, 用现代式子表示即为: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所

对的边分别为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$. 根据此公式, 若 $a \cos B + (b + 3c) \cos A = 0$,

且 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 且 $f(a+x) + f(a-x) = 0$, 则 $|a|$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{8}$
C. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{1}{2}$

11. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $m \perp n$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \perp \alpha$ B. 若 $m \parallel \beta$, $\beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$
C. 若 $m \perp \beta$, $n \perp \beta$, $n \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$ D. 若 $m \perp n$, $n \perp \beta$, $\beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$

12. 已知实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$, 则 $|x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7|$ 的最小值等于 ()

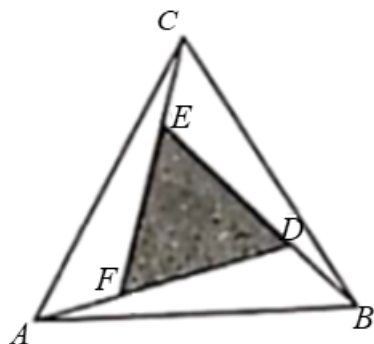
- A. $6\sqrt{2} - 5$ B. $6\sqrt{2} - 7$ C. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ D. $9 - 6\sqrt{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

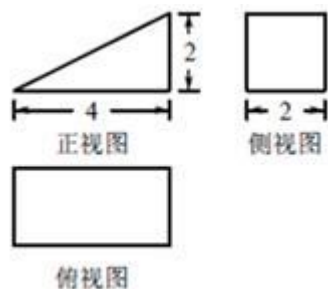
13. 已知函数 $f(x) = 2a(\ln x - x) + x^2$ ($a > 0$) 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的取值范围为 _____.

14. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m^2 - 1} = 1$ 的一个焦点坐标为 $(0, 1)$, 则 C 的长轴长为 _____.

15. 如图 $VABC$ 是由 3 个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成的一个大等边三角形, 设 $DF = 2AF$, $AB = \sqrt{13}$, 则 $VEDF$ 的面积为 _____.

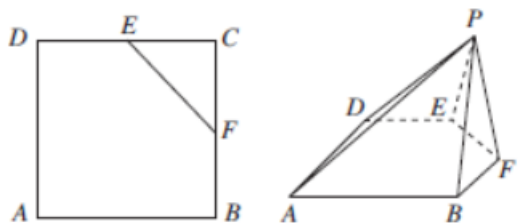


16. 某几何体的三视图如图所示 (单位: $\square\square$), 则该几何体的表面积是 _____ $\square\square^2$, 体积是 _____ $\square\square^3$.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 如图, 在棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 CD, BC 边上的中点, 现以 EF 为折痕将点 C 旋转至点 P 的位置, 使得 $P-EF-A$ 为直二面角.



- (1) 证明: $EF \perp PA$;
- (2) 求 PD 与面 ABF 所成角的正弦值.

18. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x$.

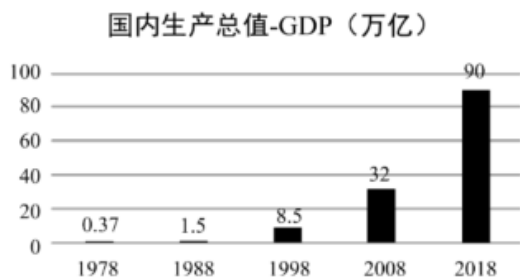
- (1) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间, 并证明函数 $g(x)$ 有唯一零点.
- (2) 若函数 $h(x) = e^x - af(x-1)$ 在区间 $(1, 1+e^{-a})$ 上不单调, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} > a$.

19. (12分) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 直线 $y = \frac{2b}{3}$ 与 C 交于 A, B 两点,

$$\angle AF_2B = 90^\circ, \text{ 且 } S_{\triangle F_2AB} = \frac{20}{9}.$$

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 已知点 P 是 C 上的任意一点, 不经过原点 O 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 直线 PM, PN, MN, OP 的斜率都存在, 且 $k_{MN} + k_{OP} = 0$, 求 $k_{PM} \cdot k_{PN}$ 的值.

20. (12分) 根据国家统计局数据, 1978 年至 2018 年我国 GDP 总量从 0.37 万亿元跃升至 90 万亿元, 实际增长了 242 倍多, 综合国力大幅提升.



将年份 1978, 1988, 1998, 2008, 2018 分别用 1, 2, 3, 4, 5 代替, 并表示为 t ; y 表示全国 GDP 总量, 表中

$$z_i = \ln y_i (i=1, 2, 3, 4, 5), \quad \bar{z} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 z_i.$$

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(z_i - \bar{z})$
3	26.474	1.903	10	209.76	14.05

(1) 根据数据及统计图表, 判断 $\hat{y} = bt + a$ 与 $\hat{y} = ce^{dt}$ (其中 $e = 2.718L$ 为自然对数的底数) 哪一个更适宜作为全国 GDP 总量 y 关于 t 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由), 并求出 y 关于 t 的回归方程.

(2) 使用参考数据, 估计 2020 年的全国 GDP 总量.

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据:

n	4	5	6	7	8
e^n 的近似值	55	148	403	1097	2981

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(2x + a)$ ($x > 0, a > 0$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\ln 3 - \frac{2}{3}$.

- 求 a ;
- 讨论函数 $g(x) = f(x) - 2x$ ($x > 0$) 和 $h(x) = f(x) - \frac{2x}{2x+1}$ ($x > 0$) 的单调性;
- 设 $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, 求证: $\frac{5-2^{n+1}}{2^n} < \frac{1}{a_n} - 2 < 0$ ($n \geq 2$).

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = 2ax + bx - 1 - 2 \ln x$ ($a \in R$).

- 当 $b = 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;
- 若对任意的 $a \in [1, 3]$ 和 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq 2bx - 3$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由题意得， $z\bar{z} = (1+ai)(1-ai) = 1+a^2$ ，然后求解即可

【详解】

$\because z = 1+ai$ ， $\therefore z\bar{z} = (1+ai)(1-ai) = 1+a^2$. 又 $\because z\bar{z} = 2$ ， $\therefore 1+a^2 = 2$ ， $\therefore a = \pm 1$.

【点睛】

本题考查复数的运算，属于基础题

2、C

【解析】

根据直线和平面平行的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

Q 点 P 不在直线 l 、 m 上，

$\therefore$ 若直线 l 、 m 互相平行，则过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行，即必要性成立，

若过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行，则直线 l 、 m 互相平行成立，反证法证明如下：

若直线 l 、 m 互相不平行，则 l 、 m 异面或相交，则过点 P 只能作一个平面同时和两条直线平行，则与条件矛盾，即充分性成立

则“过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的充要条件，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合空间直线和平面平行的性质是解决本题的关键.

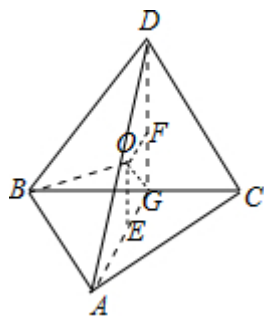
3、A

【解析】

由题意画出图形，求出多面体外接球的半径，代入表面积公式得答案.

【详解】

如图，



取 BC 中点 G，连接 AG，DG，则 $AG \perp BC$ ， $DG \perp BC$ ，

分别取 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的外心 E，F，分别过 E，F 作平面 ABC 与平面 DBC 的垂线，相交于 O，

则 O 为四面体 A-BCD 的球心，

由 $AB = AC = DB = DC = BC = 2$ ，得正方形 OEGF 的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $OG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

$\therefore$ 四面体 A-BCD 的外接球的半径 $R = \sqrt{OG^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ，

$\therefore$ 球 O 的表面积为 $4\pi \times \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = \frac{20\pi}{3}$ 。

故选 A。

【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查空间想象能力与思维能力，是中档题。

4、C

【解析】

化简得到 $\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ， $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ，再计算复数模得到答案。

【详解】

$(1+i)\bar{z} = 1+2i$ ，故 $\bar{z} = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，

故 $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ， $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查了复数的化简，共轭复数，复数模，意在考查学生的计算能力。

5、B

【解析】

甲、乙两人所扣出租车费用相同即同为 1 元，或同为 2 元，或同为 3 元，由独立事件的概率公式计算即得.

【详解】

由题意甲、乙租车费用为 3 元的概率分别是 0.3, 0.4,

∴甲、乙两人所扣出租车费用相同的概率为

$$P = 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 = 0.3.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查独立性事件的概率. 掌握独立事件的概率乘法公式是解题基础.

6、A

【解析】

根据 $a \cos B + (b + 3c) \cos A = 0$ ，利用正弦定理边化为角得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$ ，整理为

$\sin C(1 + 3 \cos A) = 0$ ，根据 $\sin C \neq 0$ ，得 $\cos A = -\frac{1}{3}$ ，再由余弦定理得 $bc = 3$ ，又 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$ ，代入公式

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right)^2 \right]} \text{ 求解.}$$

【详解】

由 $a \cos B + (b + 3c) \cos A = 0$ 得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$ ，

即 $\sin(A + B) + 3 \sin C \cos A = 0$ ，即 $\sin C(1 + 3 \cos A) = 0$ ，

因为 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\cos A = -\frac{1}{3}$ ，

由余弦定理 $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A = \frac{2}{3}bc = 2$ ，所以 $bc = 3$ ，

$$\text{由 } \triangle ABC \text{ 的面积公式得 } S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4}(3^2 - 1^2)} = \sqrt{2}$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查正弦定理和余弦定理以及类比推理，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

7、A

【解析】

a 是函数 $f(x)$ 的零点，根据五点法求出图中零点及 y 轴左边第一个零点可得.

【详解】

由题意 $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$, $T = \pi$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的第一个零点为 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$, 在 y 轴左边第一个零点是

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12},$$

$\therefore |a|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数的周期性, 考查函数的对称性. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的零点就是其图象对称中心的横坐标.

8、C

【解析】

根据条件, 方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$. 即 $\frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{x^2}{k + 1} = 1$, 结合双曲线的标准方程的特征判断曲线的类型.

【详解】

解: $\because k > 1$, $\therefore 1 + k > 0$, $k^2 - 1 > 0$,

方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$, 即 $\frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{x^2}{k + 1} = 1$, 表示实轴在 y 轴上的双曲线,

故选 C.

【点睛】

本题考查双曲线的标准方程的特征, 依据条件把已知的曲线方程化为 $\frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{x^2}{k + 1} = 1$ 是关键.

9、B

【解析】

根据程序框图列举出程序的每一步, 即可得出输出结果.

【详解】

输入 $n = 10$, $n = 1$ 不成立, n 是偶数成立, 则 $n = \frac{10}{2} = 5$, $i = 0 + 1 = 1$;

$n = 1$ 不成立, n 是偶数不成立, 则 $n = 3 \times 5 + 1 = 16$, $i = 1 + 1 = 2$;

$n = 1$ 不成立, n 是偶数成立, 则 $n = \frac{16}{2} = 8$, $i = 2 + 1 = 3$;

$n = 1$ 不成立, n 是偶数成立, 则 $n = \frac{8}{2} = 4$, $i = 3 + 1 = 4$;

$n = 1$ 不成立, n 是偶数成立, 则 $n = \frac{4}{2} = 2$, $i = 4 + 1 = 5$;

$n=1$ 不成立, n 是偶数成立, 则 $n=\frac{2}{2}=1$, $i=5+1=6$;

$n=1$ 成立, 跳出循环, 输出 i 的值为 6.

故选: B.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果, 考查计算能力, 属于基础题.

10、B

【解析】

甲同学所有的选择方案共有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ 种, 甲同学同时选择历史和化学后, 只需在生物、政治、地理三科中再选择一科即可, 共有 $C_3^1 = 3$ 种选择方案, 根据古典概型的概率计算公式, 可得甲同学同时选择历史和化学的概率

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \text{ 故选 B.}$$

11、C

【解析】

根据空间中直线与平面、平面与平面位置关系相关定理依次判断各个选项可得结果.

【详解】

对于 A, 当 m 为 α 内与 n 垂直的直线时, 不满足 $m \perp \alpha$, A 错误;

对于 B, 设 $\alpha \cap \beta = l$, 则当 m 为 α 内与 l 平行的直线时, $m \parallel \beta$, 但 $m \subset \alpha$, B 错误;

对于 C, 由 $m \perp \beta$, $n \perp \beta$ 知: $m \parallel n$, 又 $n \perp \alpha$, $\therefore m \perp \alpha$, C 正确;

对于 D, 设 $\alpha \cap \beta = l$, 则当 m 为 β 内与 l 平行的直线时, $m \parallel \alpha$, D 错误.

故选: C.

【点睛】

本题考查立体几何中线面关系、面面关系有关命题的辨析, 考查学生对于平行与垂直相关定理的掌握情况, 属于基础题.

12、D

【解析】

设 $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sin \theta$, 去绝对值, 根据余弦函数的性质即可求出.

【详解】

因为实数 x , y 满足 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

设 $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sin \theta$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/707040140052006116>