

## 专题 7.2 二元一次方程组十四大必考点

【浙教版】

### 题型先知

【考点 1 二元一次方程（组）的概念】 .....	1
【考点 2 二元一次方程组的解】 .....	3
【考点 3 解二元一次方程组】 .....	5
【题型 4 同解方程组】 .....	8
【题型 5 二元一次方程组的错解复原问题】 .....	11
【题型 6 构造二元一次方程组求解】 .....	14
【考点 7 二元一次方程的整数解】 .....	16
【考点 8 二元一次方程组的特殊解法】 .....	20
【考点 9 二元一次方程组的新定义问题】 .....	23
【考点 10 二元一次方程（组）的规律探究】 .....	26
【考点 11 二元一次方程（组）的阅读理解类问题】 .....	29
【考点 12 二元一次方程（组）的应用】 .....	34
【考点 13 三元一次方程组的解法】 .....	39
【考点 14 三元一次方程组的应用】 .....	42

### 举一反三

#### 【考点 1 二元一次方程（组）的概念】

【例 1】（2022·浙江·义乌市稠州中学教育集团七年级阶段练习）方程① $2x - 3y = 1$ ，② $xy = -2$ ，③ $x^2 - 5x = 5$ ，④ $x - \frac{1}{y} + 2 = 0$ 中，为二元一次方程的是（ ）

- A. ①                      B. ②                      C. ③                      D. ④

【答案】A

【分析】根据二元一次方程满足的条件：含有 2 个未知数，含未知数的项的次数是 1 的整式方程进行判断。

【详解】解：① $2x - 3y = 1$ ，符合二元一次方程的定义，是二元一次方程；

② $xy = -2$ ，含未知数的项的次数是 2，不是二元一次方程；

③ $x^2 - 5x = 5$ ，含未知数的项的次数是 2，不是二元一次方程；

④ $x - \frac{1}{y} + 2 = 0$  不是整式方程，不是二元一次方程；

故选：A.

**【点睛】** 主要考查二元一次方程的概念，要求熟悉二元一次方程的形式及其特点：含有 2 个未知数，含未知数的项的次数是 1 的整式方程。

**【变式 1-1】** (2022·上海·期末) 下列方程组中，二元一次方程组有 ( )

①  $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ ; ②  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ ; ③  $\begin{cases} x = 3 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$ ; ④  $\begin{cases} x - 2y^2 = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ .

A. 4 个                      B. 3 个                      C. 2 个                      D. 1 个

**【答案】** C

**【分析】** 组成二元一次方程组的两个方程应共含有两个相同的未知数，且未知数的项最高次数都应是一次的整式方程。

**【详解】** 解：①、符合二元一次方程组的定义，故①符合题意；

②、第一个方程与第二个方程所含未知数共有 3 个，故②不符合题意；

③、符合二元一次方程组的定义，故③符合题意；

④、该方程组中第一个方程是二次方程，故④不符合题意。

故选：C.

**【点睛】** 本题考查了二元一次方程组的定义，解题时需要掌握二元一次方程组满足三个条件：①方程组中的两个方程都是整式方程。②方程组中共含有两个未知数。③每个方程都是一次方程。

**【变式 1-2】** (2022·全国·八年级单元测试) 已知  $(a-2)x + a^2 - 3 + y = 1$  是关于  $x, y$  的二元一次方程，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $a \neq 2$

**【分析】** 根据二元一次方程的定义：含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做二元一次方程可得  $a-2 \neq 0$ ，再解即可。

**【详解】** 解：依题意得：  $a-2 \neq 0$ ,

解得  $a \neq 2$ 。

故答案是：  $a \neq 2$ 。

**【点睛】** 本题考查二元一次方程的定义。熟记二元一次方程的定义是解题的关键。

**【变式 1-3】** (2022·浙江·杭州市大关中学七年级期末) 关于  $x, y$  的二元一次方程  $ax+by=c$  ( $a, b, c$  是常数)， $b=a+1, c=b+1$ ，对于任意一个满足条件的  $a$ ，此二元一次方程都有一个公共解，这个公共解为\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

【分析】由  $ax+by=c$ ,  $b=a+1$ ,  $c=b+1$ , 得  $ax+ay+y=a+2$ , 由对于任意一个满足条件的  $a$ , 此二元一次方程都有一个公共解即可求解;

【详解】解:  $\because ax+by=c$ ,  $b=a+1$ ,  $c=b+1$ ,

$$\therefore ax+ay+y=a+2$$

$\therefore$ 对于任意一个满足条件的  $a$ , 此二元一次方程都有一个公共解

$\therefore$ 令  $a=0$ , 则  $y=2$ ; 把  $y=2$  代入  $ax+ay+y=a+2$

得:  $ax=-a$ ,

$$\therefore x=-1,$$

$\therefore$ 公共解为  $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ .

【点睛】本题主要考查二元一次方程, 由  $b=a+1$ ,  $c=b+1$  得到  $ax+ay+y=a+2$  是解题的关键.

### 【考点 2 二元一次方程组的解】

【例 2】(2022·浙江·华东师范大学附属杭州学校七年级期末) 方程组  $\begin{cases} 2x+y=\blacktriangle \\ x+y=3 \end{cases}$  的解为  $\begin{cases} x=2 \\ y=\blacksquare \end{cases}$ , 则被遮盖的两个数  $\blacktriangle$  和  $\blacksquare$  分别为( )

- A. 1, 2                      B. 5, 1                      C. 2, 3                      D. 2, 4

【答案】B

【分析】将  $x=2$  代入  $x+y=3$  中求出  $y$  的值, 将  $x, y$  的值代入  $2x+y$  求值即可得出答案.

【详解】解: 将  $x=2$  代入  $x+y=3$  中得:  $y=1$ ,

$$2x+y=2 \times 2+1=5,$$

故选: B.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的解, 掌握二元一次方程组的解是方程组两个方程的公共解是解题的关键.

【变式 2-1】(2022·陕西·商洛市山阳信毅九年制学校七年级阶段练习) 乐乐, 果果两人同解方程组

$\begin{cases} ax+5y=15 \textcircled{1} \\ 4x=by-2 \textcircled{2} \end{cases}$  时, 乐乐看错了方程  $\textcircled{1}$  中的  $a$ , 解得  $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ , 果果看错了方程  $\textcircled{2}$  中的  $b$ , 解得  $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ ,

求  $a^{2021} + \left(-\frac{b}{10}\right)^{2022}$  的值.

【答案】0

【分析】把  $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$  代入  $\textcircled{2}$  得出  $-12=-b-2$  可求出  $b$ , 把  $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$  代入  $\textcircled{1}$  得出  $5a+20=15$  可求出  $a$ , 然后再代入求代数式的值即可.

【详解】解：∵甲、乙两人同解方程组 $\begin{cases} ax+5y=15 \textcircled{1} \\ 4x=by-2 \textcircled{2} \end{cases}$ 时，甲看错了方程①中的 $a$ ，解得 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ ，乙

看错了方程②中的 $b$ ，解得 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ ，

∴把 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 代入②，得 $-12=-b-2$ ，解得： $b=10$ ，

把 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ 代入①，得 $5a+20=15$ ，解得： $a=-1$ ，

$$\begin{aligned} & \therefore a^{2021} + \left(-\frac{b}{10}\right)^{2022} \\ & = (-1)^{2021} + \left(-\frac{10}{10}\right)^{2022} \\ & = -1 + 1 \end{aligned}$$

$= 0$ .

【点睛】本题主要考查了解二元一次方程组，解一元一次方程和代数式求值等知识点，解题的关键是列出关于 $a$ 、 $b$ 的一元一次方程求得 $a$ 、 $b$ 的值.

【变式 2-2】（2022·江苏·无锡市查桥中学七年级阶段练习）若 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 是某二元一次方程的解，则这个方程为（ ）

- A.  $x+2y=-3$       B.  $2x-y=0$       C.  $y=3x-5$       D.  $x-3=y$

【答案】D

【分析】根据二元一次方程的解的定义判断即可.

【详解】解：A、当 $x=-1$ ， $y=-4$ 时， $x+2y=-9 \neq -3$ ，

故 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 不是方程 $x+2y=-3$ 的解，不符合题意；

B、当 $x=1$ ， $y=-2$ 时， $2x-y=2+2 \neq -3$ ，

故 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 不是方程 $2x-y=0$ 的解，不符合题意；

C、当 $x=-1$ ， $y=-4$ 时， $y=3x-5=-8 \neq -4$ ，

故 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 不是方程 $y=3x-5$ 的解，不符合题意；

D、当 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 时，方程 $x-y=3$ 都成立，

故 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 是方程 $x-y=3$ 的解，故符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查二元一次方程解的概念，使方程左右两边相等的一组未知数的值即为该方程的解，

掌握方程的解使方程左右两边相等是解题的关键.

【变式 2-3】(2022·陕西汉中·七年级期末) 已知关于  $x$ 、 $y$  的方程组  $\begin{cases} x+y=1-a \\ x-y=3a+5 \end{cases}$ , 则下列结论中正确的有

( )

①当  $a=1$  时, 方程组的解也是方程  $x+y=2$  的解;

②当  $x=y$  时,  $a=-\frac{5}{3}$ ;

③不论  $a$  取什么数,  $2x+y$  的值始终不变.

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

【答案】C

【分析】将已知代入二元一次方程组后进行判断, 可知①②是否正确; 用代入消元法解二元一次方程组, 然后再求  $2x+y$  即可判断③是否正确.

【详解】解: 当  $a=1$  时,  $x+y=0$ ,

故①不符合题意;

当  $x=y$  时,  $3a+5=0$ ,

$$\therefore a = -\frac{5}{3},$$

故②符合题意;

$$\begin{cases} x+y=1-a & \text{①} \\ x-y=3a+5 & \text{②} \end{cases},$$

①+②得,  $x=a+3$ ,

将  $x=a+3$  代入①得,  $y=-2-2a$ ,

$$\therefore 2x+y=2a+6-2-2a=4,$$

$\therefore 2x+y$  的值始终不变,

故③符合题意;

故选: C

【点睛】本题考查二元一次方程组的解, 熟练掌握二元一次方程组的解与二元一次方程组的关系, 会用代入消元法和加减消元法解二元一次方程组是解题的关键.

### 【考点 3 解二元一次方程组】

【例 3】(2022·浙江·杭州市实验外国语学校七年级期末) 关于  $x$ 、 $y$  方程组  $\begin{cases} 3x+5y=m+2 \\ 2x+3y=m \end{cases}$  满足  $x$ 、 $y$  的和为 2, 则  $m^2-2m+1$  的值为\_\_\_\_\_.

**【答案】** 9

**【分析】** 先求出方程组的解，然后结合  $x + y = 2$ ，求出  $m$  的值，再代入计算，即可求出答案.

**【详解】** 解:  $\begin{cases} 3x + 5y = m + 2 \\ 2x + 3y = m \end{cases}$ ,

解方程组, 得  $\begin{cases} x = 2m - 6 \\ y = -m + 4 \end{cases}$ ,

$\therefore x + y = 2$ ,

$\therefore 2m - 6 - m + 4 = 2$ ,

解得  $m = 4$ ,

$\therefore m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = (4 - 1)^2 = 9$ ;

故答案为: 9

**【点睛】** 本题考查了解二元一次方程组，方程组的解，求代数式的值，解题的关键是正确的求出方程组的解，从而求出  $m$  的值.

**【变式 3-1】** (2022·福建省永春乌石中学七年级阶段练习) 已知方程组  $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ ax - 2y = 4 \end{cases}$  的解也是方程组

$\begin{cases} 3x - by = 5 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$  的解求  $a, b$  的值.

**【答案】**  $a = 5, b = -1$

**【分析】** 根据题意可知两个方程组有相同的解，即说明第一个方程组的解也适合第二个方程组，再根据二元一次方程组解的定义，即可求出答案.

**【详解】**  $3x + y = 5$  ①  $4x - 5y = -6$  ②, ①  $\times (-5) -$  ② 得,  $-19x = -19$ , 解得  $x = 1$ ,

把  $x = 1$  代入 ① 得,  $3 + y = 5$ , 解得  $y = 2$ ,

所以方程组  $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$  的解是  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ,

把  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  代入方程组  $\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ 3x - by = 5 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} a - 4 = 1 \\ 3 - 2b = 5 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$ ,

故答案为:  $a = 5, b = -1$ .

**【点睛】** 本题考查了二元一次方程组解的定义及二元一次方程组的解法，解答此题的关键是要弄清题意，两个方程组有相同的解，即说明第一个方程组的解也适合第二个方程组.

**【变式 3-2】** (2022·山东·聊城市东昌府区水城双语学校七年级阶段练习) 解方程组

$$(1) \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3(x + y) - 4(x - y) = 4 \\ \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{6} = 1 \end{cases}$$

【答案】(1)  $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} x=\frac{17}{15} \\ y=\frac{11}{15} \end{cases}$

【分析】(1) 用代入法求解即可；

(2) 先化简方程，再用加减法求解即可.

(1)

解:  $\begin{cases} y=2x-4 \text{ ①} \\ 3x+y=1 \text{ ②} \end{cases}$ ,

把①代入②得:  $3x+2x-4=1$ ,

解得:  $x=1$ ,

把  $x=1$  代入①得:  $y=-2$ ,

则方程组的解为  $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ;

(2)

解: 方程组整理得:  $\begin{cases} -x+7y=4 \text{ ①} \\ 2x+y=3 \text{ ②} \end{cases}$ ,

① $\times 2$ +②得:  $15y=11$ ,

解得:  $y=\frac{11}{15}$ ,

② $\times 7$ -①得:  $15x=17$ ,

解得:  $x=\frac{17}{15}$ ,

则方程组的解为  $\begin{cases} x=\frac{17}{15} \\ y=\frac{11}{15} \end{cases}$ .

【点睛】本题考查解二元一次方程组，熟练掌握根据方程组的特征，恰当选择代入消元法和加减消元法求解是解题的关键.

【变式 3-3】(2022·江苏泰州·七年级期末) 在等式  $y=ax^2+bx+1$  中，当  $x=-1$  时， $y=6$ ；当  $x=2$  时， $y=11$ .

(1) 求  $a$ ， $b$  的值；

(2) 当  $x=-3$  时，求  $y$  的值.

【答案】(1)  $a=\frac{10}{3}$ ， $b=-\frac{5}{3}$ ； (2) 36

【分析】(1) 把  $x$ 、 $y$  的值分别代入  $y=ax^2+bx+1$ ，得出关于  $a$ 、 $b$  的方程组，再求出方程组的解即可；

(2) 把  $x=-3$  代入 (1) 中所求的结果，即可求出  $y$ 。

【详解】解：(1) 根据题意，得  $\begin{cases} a-b+1=6 \text{ ①} \\ 4a+2b+1=11 \text{ ②} \end{cases}$ ，

① $\times$ 2+②，得  $6a+3=23$ ，

解得： $a=\frac{10}{3}$ ，

把  $a=\frac{10}{3}$  代入 ①，得  $\frac{10}{3}-b+1=6$ ，

解得： $b=-\frac{5}{3}$ ；

(2)  $y=\frac{10}{3}x^2-\frac{5}{3}x+1$ ，

当  $x=-3$  时， $y=\frac{10}{3}\times(-3)^2-\frac{5}{3}\times(-3)+1=36$ 。

【点睛】本题考查了解二元一次方程组，能得出关于  $a$ 、 $b$  的方程组是解此题的关键。

#### 【题型 4 同解方程组】

【例 4】(2022·山东济宁·七年级期末) 已知方程组  $\begin{cases} 2x-y=7 \\ ax+y=b \end{cases}$  和方程组  $\begin{cases} x+by=a \\ 3x+y=8 \end{cases}$  有相同的解，则  $a$ 、 $b$  的值分别为 ( )

A.  $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} a=4 \\ b=-6 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} a=-6 \\ b=2 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$

【答案】A

【分析】先根据方程组  $\begin{cases} 2x-y=7 \text{ ①} \\ 3x+y=8 \text{ ②} \end{cases}$ ，求出  $x=3$ ， $y=-1$  再代入  $ax+y=b$  和  $x+by=a$  中，得到关于  $a$ 、 $b$  的方程组，即可求解。

【详解】解：根据题意得： $\begin{cases} 2x-y=7 \text{ ①} \\ 3x+y=8 \text{ ②} \end{cases}$ ，

由 ①+② 得： $5x=15$ ，

解得： $x=3$ ，

把  $x=3$  代入 ① 得： $6-y=7$ ，

解得： $y=-1$ ，

把  $x=3$ ， $y=-1$  代入  $ax+y=b$  和  $x+by=a$  中得：

$$\begin{cases} 3a-1=b \\ 3-b=a \end{cases} \text{，解得：} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{。}$$

故选：A

**【点睛】** 本题考查了二元一次方程组的解，遇到有关二元一次方程组的解的问题时，将解代入原方程组，这种方法主要用在求方程组中的字母系数.

**【变式 4-1】** (2022·湖北武汉·七年级期末) 已知方程组  $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ mx+ny=7 \end{cases}$  与  $\begin{cases} mx+3ny=51 \\ 5y-x=3 \end{cases}$  有相同的解，则  $m+n=$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{29}{2}$

**【分析】** 根据两个方程组解相同，可先求出  $x$ 、 $y$  的值，再将  $x$ 、 $y$  的值代入其余两个方程即可求出  $m$ 、 $n$  的值.

**【详解】** 解：根据题意，得  $\begin{cases} 5y-x=3 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ ，

解得  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ，

把  $x$ 、 $y$  的值代入方程组  $\begin{cases} mx+ny=7 \\ mx+3ny=51 \end{cases}$ ，

可得  $\begin{cases} 2m+n=7 \\ 2m+3n=51 \end{cases}$ ，

解得  $\begin{cases} m=-\frac{15}{2} \\ n=22 \end{cases}$  .

$\therefore m+n=\frac{29}{2}$ .

故答案为： $\frac{29}{2}$ .

**【点睛】** 本题考查了二元一次方程组的解，解决本题的关键是先求出  $x$ 、 $y$  的值.

**【变式 4-2】** (2022·黑龙江·大庆市高新区学校七年级期末) 关于  $x$ 、 $y$  的两个方程组  $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 2x-y=7 \end{cases}$  和

$\begin{cases} 3ax-5by=9 \\ 3x-y=11 \end{cases}$  有相同的解，则  $\frac{a}{b}$  的值是 ( )

A.  $\frac{2}{3}$

B.  $\frac{3}{2}$

C.  $-\frac{2}{3}$

D.  $\frac{1}{2}$

**【答案】** A

**【分析】** 由题意知，可重新组成两个关于  $x$ 、 $y$  的两个方程组  $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 3ax-5by=9 \end{cases}$  和  $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x-y=11 \end{cases}$ ，先计算不含参的二元一次方程组  $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x-y=11 \end{cases}$ ，得  $x$ 、 $y$  的值，然后代入含参的二元一次方程组  $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 3ax-5by=9 \end{cases}$ ，求  $a$ 、 $b$  的值，然后代入求解即可.

**【详解】** 解： $\because$  两个方程组同解

$\therefore$  可知关于  $x$ 、 $y$  的两个方程组  $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 3ax-5by=9 \end{cases}$  和  $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x-y=11 \end{cases}$  有相同的解

解方程组  $\begin{cases} 2x-y=7 \textcircled{1} \\ 3x-y=11 \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{2}-\textcircled{1}$ 得  $x=4$

将  $x=4$  代入  $\textcircled{1}$  式得  $2 \times 4 - y = 7$

解得  $y=1$

$\therefore$  方程组的解为  $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

将  $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$  代入方程组  $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 3ax-5by=9 \end{cases}$  得  $\begin{cases} 4a-2b=2 \\ 12a-5b=9 \end{cases}$

解关于  $a, b$  的方程组  $\begin{cases} 4a-2b=2 \textcircled{3} \\ 12a-5b=9 \textcircled{4} \end{cases}$

$\textcircled{3} \times 3 - \textcircled{4}$  得  $-b = -3$

解得  $b=3$

将  $b=3$  代入  $\textcircled{3}$  式得  $4a - 2 \times 3 = 2$

解得  $a=2$

$\therefore$  方程组的解为  $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

故选 A.

**【点睛】** 本题考查了同解方程组，解二元一次方程。解题的关键在于将两个方程组重新组成新的方程组求解。

**【变式 4-3】** (2022·陕西安康·七年级期末) 已知关于  $x, y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} 2x+y=4 \\ ax+by=7 \end{cases}$  和  $\begin{cases} ax-by=-1 \\ x-2y=-3 \end{cases}$  的解相同，求  $a+b$  的值。

**【答案】** 5

**【分析】** 先联立  $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=-3 \end{cases}$ ，求出  $x$  和  $y$  的值，代入  $\begin{cases} ax+by=7 \\ ax-by=-1 \end{cases}$ ，求出  $a$  和  $b$  的值即可。

**【详解】** 解： $\therefore$  关于  $x, y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} 2x+y=4 \\ ax+by=7 \end{cases}$  和  $\begin{cases} ax-by=-1 \\ x-2y=-3 \end{cases}$  的解相同，

$\therefore$  联立  $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=-3 \end{cases}$ ，

解方程组，得  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ，

将  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$  代入  $\begin{cases} ax+by=7 \\ ax-by=-1 \end{cases}$  得  $\begin{cases} a+2b=7 \\ a-2b=-1 \end{cases}$ ，

解方程组，得  $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ ，

$$\therefore a+b=2+3=5.$$

【点睛】本题考查了二元一次方程组的解，解二元一次方程组，联立两个已知的方程求出  $x$  和  $y$  的值是解题的关键.

### 【题型 5 二元一次方程组的错解复原问题】

【例 5】(2021·山东滨州·七年级期末) 解方程组  $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx-7y=8 \end{cases}$  时，一学生把  $c$  看错而得到  $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ ，而正确的解是  $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ ，那么  $a+b+c$  的值为 ( )

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

【答案】D

【分析】先将两组解代入方程组中的第一个方程可得关于  $a, b$  的方程组，解方程组可得  $a, b$  的值，再将  $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$  代入方程组中的第二个方程可得  $c$  的值，然后代入计算即可得.

【详解】解：由题意，将  $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$  代入方程  $ax+by=2$  得： $\begin{cases} -2a+2b=2 \\ 3a-2b=2 \end{cases}$ ，

解得  $\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$ ，

将  $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$  代入  $cx-7y=8$  得： $3c+14=8$ ，解得  $c=-2$ ，

则  $a+b+c=4+5+(-2)=7$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了解二元一次方程组、二元一次方程组的解，熟练掌握解二元一次方程组的方法是解题关键.

【变式 5-1】(2022·四川巴中·七年级期末) 甲、乙两人解关于  $x, y$  的方程组  $\begin{cases} 3x-by=-1 \textcircled{1} \\ ax+by=-5 \textcircled{2} \end{cases}$  时，甲因看错  $a$  得到方程组的解为  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ，乙将方程  $\textcircled{2}$  中的  $b$  写成了它的相反数得到方程组的解为  $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ .

(1) 求  $a, b$  的值；

(2) 求原方程组的解.

【答案】(1)  $a=7, b=2$

(2)  $\begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$

【分析】(1) 将  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$  代入  $\begin{cases} 3x-by=-1 \textcircled{1} \\ ax+by=-5 \textcircled{2} \end{cases}$  算出  $b$ ，将  $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$  代入  $\begin{cases} 3x-by=-1 \textcircled{1} \\ ax+by=-5 \textcircled{2} \end{cases}$  算出  $a$  即可；

(2) 将  $a, b$  的值代入二元一次方程组中, 解出即可.

(1)

解: 甲看错方程组中的

$$\begin{cases} 3x - by = -1 & \text{①} \\ ax + by = -5 & \text{②} \end{cases} \text{ 的 } a, \text{ 得到方程组的解为 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\therefore \text{ 将 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 代入 ① 得: } 3 - 2b = -1,$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore \text{ 乙把方程 ② 中的 } b \text{ 看成了它的相反数, 得到方程组的解 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{ 将 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 代入 } ax - by = -5 \text{ 中}$$

$$\text{得: } a = 7;$$

(2)

$$\text{解: 将 } \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases} \text{ 代入 } \begin{cases} 3x - by = -1 & \text{①} \\ ax + by = -5 & \text{②} \end{cases} \text{ 中得: } \begin{cases} 7x + 2y = -5 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

**【点睛】** 本题考查了解二元一次方程组、二元一次方程组的解, 熟知方程组的解即为能使方程组中两方程成立的未知数的值, 掌握二元一次方程组的解是解题的关键.

**【变式 5-2】** (2018·江西宜春·七年级期末) 已知方程组  $\begin{cases} ax - 5y = 15 & \text{①} \\ 4x - by = -2 & \text{②} \end{cases}$  由于甲看错了方程①中的  $a$  得到方程组的解为  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ ; 乙看错了方程②中的  $b$  得到方程组的解为  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ , 若按正确的  $a, b$  计算, 请你求原方程组的解.

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x = \frac{16}{5} \\ y = \frac{37}{25} \end{cases}$$

**【分析】** 把甲的结果代入方程②求出  $b$  的值, 把乙的结果代入方程①求出  $a$  的值, 然后可确定出方程组, 利用加减消元法解方程组即可得.

$$\text{【详解】解: 由题意, 把 } \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 代入方程 ② 得: } -12 + b = -2, \text{ 解得 } b = 10,$$

$$\text{把 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 代入方程 ① 得: } 5a - 20 = 15, \text{ 解得 } a = 7,$$

$$\text{则方程组为 } \begin{cases} 7x - 5y = 15 & \text{①} \\ 4x - 10y = -2 & \text{②} \end{cases},$$

$$\text{由 ①} \times 2 - \text{② 得: } 14x - 4x = 30 + 2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{16}{5},$$

$$\text{将 } x = \frac{16}{5} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得: } 7 \times \frac{16}{5} - 5y = 15,$$

$$\text{解得 } y = \frac{37}{25},$$

$$\text{则方程组的解为 } \begin{cases} x = \frac{16}{5} \\ y = \frac{37}{25} \end{cases}.$$

**【点睛】** 本题考查了二元一次方程组的解、解二元一次方程组，熟练掌握消元法是解题关键。

**【变式 5-3】** (2022·河南·安阳市第五中学七年级期末) 甲乙两名同学在解方程组  $\begin{cases} ax + 5y = 10 \\ 4x - by = -4 \end{cases}$  时，由于粗心，甲看错了方程组中的  $a$ ，而得解为  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ ；乙看错了方程组中的  $b$ ，而得解为  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ 。

(1) 甲把  $a$  看成了什么，乙把  $b$  看成了什么？

(2) 请你根据以上两种结果，求出原方程组的正确解。

**【答案】** (1) 甲把  $a$  看成了 5，乙把  $b$  看成了 6

$$(2) \begin{cases} x = \frac{45}{13} \\ y = \frac{8}{13} \end{cases}$$

**【分析】** (1) 把  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$  代入  $ax + 5y = 10$  得出关于  $a$  的一元一次方程，解一元一次方程即可得出甲把  $a$  看成了什么，把  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$  代入  $4x - by = -4$  得出关于  $b$  的一元一次方程，解一元一次方程即可得出乙把  $b$  看成了什么；

(2) 把  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$  代入  $4x - by = -4$  得出关于  $b$  的一元一次方程，解一元一次方程得出  $b$  的值，把  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$  代入  $ax + 5y = 10$  得出关于  $a$  的一元一次方程，解一元一次方程得出  $a$  的值，把  $a, b$  代入原方程组得出关于  $x, y$  的方程组，解方程组即可得出原方程组的正确解。

**【详解】** (1) 解：把  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$  代入  $ax + 5y = 10$ ,

$$\text{可得: } 3a + 5 \times (-1) = 10,$$

$$\text{解得: } a = 5,$$

$$\text{把 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 代入 } 4x - by = -4,$$

$$\text{可得: } 4 \times 5 - 4b = -4,$$

$$\text{解得: } b = 6,$$

∴甲把  $a$  看成了 5，乙把  $b$  看成了 6；

(2) 解：把  $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$  代入  $4x-by=-4$ ，

可得：  $12+b=-4$ ，

解得：  $b=-16$ ，

把  $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$  代入  $ax+5y=10$ ，

可得：  $5a+20=10$ ，

解得：  $a=-2$ ，

把  $a=-2$ ， $b=-16$  代入原方程组，

可得：  $\begin{cases} -2x+5y=10 \text{ ①} \\ 4x+16y=-4 \text{ ②} \end{cases}$ ，

由 ② 得：  $2x+8y=-2$  ③，

由 ①+③，可得：  $13y=8$ ，

∴  $y=\frac{8}{13}$ ，

把  $y=\frac{8}{13}$  代入 ①，可得：  $-2x+5 \times \frac{8}{13}=10$ ，

解得：  $x=-\frac{45}{13}$ ，

∴原方程组的解  $\begin{cases} x=-\frac{45}{13} \\ y=\frac{8}{13} \end{cases}$ 。

**【点睛】** 本题考查了二元一次方程组的解、解二元一次方程组，理解二元一次方程组的解，掌握解二元一次方程组的方法是解决问题的关键。

### 【题型 6 构造二元一次方程组求解】

**【例 6】** (2022·浙江湖州·七年级期末) 小王和小明分别计算同一道整式乘法题：  $(3x+m)(4x+n)$ ，小王由于抄错了一个多项式中  $m$  的符号，得到的结果为  $12x^2-17x+6$ ，小红由于抄错了第二个多项式中的  $x$  的系数，得到的结果为  $6x^2-5x-6$ ，则这道题的正确结果是\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $12x^2-x-6$

**【分析】** 利用小王和小明的解法列出关于  $m$ ， $n$  的二元一次方程组，解方程组求出  $m$ ， $n$  的值，再将  $m$ ， $n$  的值代入原式计算即可。

**【详解】** 解：由小王的解法可知  $(3x-m)(4x+n)=12x^2-17x+6$ ，  
即  $12x^2+(3n-4m)x-mn=12x^2-17x+6$ ，

可知 $3n-4m=-17$ ;

由小红的结果可知小红将 4 抄成 2,

故 $(3x+m)(2x+n)=6x^2-5x-6$ ,

即 $6x^2+(3n+2m)x+mn=6x^2-5x-6$ ,

可知 $3n+2m=-5$ ;

联立得 $\begin{cases} 3n-4m=-17 \\ 3n+2m=-5 \end{cases}$ ,

解得 $\begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$ ,

将 $\begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$ 代入 $(3x+m)(4x+n)$ 得 $(3x+2)(4x-3)=12x^2-x-6$ .

故答案为: $12x^2-x-6$ .

**【点睛】**本题考查了多项式与多项式的乘法运算及解二元一次方程组,正确列出关于 $m, n$ 的方程组是解答本题的关键.

**【变式 6-1】** (2022·山东济宁·七年级期末) 对于实数 $x, y$ , 定义新运算 $x*y=ax+by+1$ . 其中 $a, b$ 为常数, 等式右边为通常的加法和乘法运算, 若 $2*5=10, 4*7=28$ , 则 $3*6=$  ( )

- A. 18                      B. 19                      C. 20                      D. 21

**【答案】** B

**【分析】**根据题中的新定义的运算法则, 列出方程组, 解方程组求出 $a$ 与 $b$ 的值, 再代入 $(3*6)$ 计算即可.

**【详解】**解: 根据题中的新定义, 可得 $\begin{cases} 2a+5b+1=10 \\ 4a+7b+1=28 \end{cases}$ ,

解方程组, 得 $\begin{cases} a=12 \\ b=-3 \end{cases}$ ,

$\therefore 3*6=3 \times 12+6 \times (-3)+1=19$ .

故选: B.

**【点睛】**此题考查的是定义新运算和解二元一次方程组, 理解定义新运算公式, 掌握二元一次方程组的解法是解决此题的关键.

**【变式 6-2】** (2022·上海市民办新复兴初级中学七年级期末) 当 $x=1$ 时, 多项式 $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$ 的值是 32, 且当 $x=-1$ 该多项式值为 0, 则 $a+c+e$ 的值是 ( )

- A. 8                      B. 16                      C. 32                      D. 无法确定

**【答案】** B

【分析】根题意分别把  $x=1$ 、 $x=-1$  代入得出方程组，①+②即可求出  $2a+2c+2e$  的值，两边都除以 2 即可求出答案.

【详解】解析： $\because$  当  $x=1$  时，多项式  $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$  的值是 32，且当  $x=-1$  该多项式值为 0，

$$\therefore \text{代入得: } \begin{cases} a+b+c+d+e+f=32 \text{ ①} \\ a-b+c-d+e-f=0 \text{ ②} \end{cases},$$

①+②得： $2a+2c+2e=32$ ，两边都除以 2 得： $a+c+e=16$ ，

故选 B.

【点睛】本题考查了代数式求值的应用，主要检查学生能否选择适当的方法求出  $a+c+e$  的值，难点是正确代入，题目较好，难度不大.

【变式 6-3】（2022·安徽安庆·七年级期末）当  $a$ 、 $b$  都是整数时，我们称  $(a, b)$  为一个有序整数对，如

$(-2, 2)$  和  $(2, -2)$  是两个不同的有序整数对，则满足  $|a-b|+|ab|=1$  的有序整数对有（ ）

- A. 2 个                      B. 3 个                      C. 4 个                      D. 6 个

【答案】D

【分析】根据整数的性质可知当  $a$ 、 $b$  都是整数，且  $|a-b|+|ab|=1$  时， $\begin{cases} |a-b|=0 \\ |ab|=1 \end{cases}$ ，或  $\begin{cases} |a-b|=1 \\ |ab|=0 \end{cases}$ ，再根据绝对值的定义以及有理数的混合运算法则分别求出满足  $\begin{cases} |a-b|=0 \\ |ab|=1 \end{cases}$  与满足  $\begin{cases} |a-b|=1 \\ |ab|=0 \end{cases}$  的有序整数对即可.

【详解】解： $\because a$ 、 $b$  都是整数，且  $|a-b|+|ab|=1$ ，

$$\therefore \begin{cases} |a-b|=0 \\ |ab|=1 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} |a-b|=1 \\ |ab|=0 \end{cases}.$$

满足  $\begin{cases} |a-b|=0 \\ |ab|=1 \end{cases}$  的有序整数对有  $(1, 1)$ ， $(-1, -1)$ ；

满足  $\begin{cases} |a-b|=1 \\ |ab|=0 \end{cases}$  的有序整数对有  $(1, 0)$ ， $(0, 1)$ ， $(-1, -0)$ ， $(0, -1)$  .

综上所述，满足  $|a-b|+|ab|=1$  的有序整数对有  $(1, 1)$ ， $(-1, -1)$ ， $(1, 0)$ ， $(0, 1)$ ， $(-1, -0)$ ， $(0, -1)$ ，一共 6 个.

故选：D.

【点睛】本题考查了二元一次方程组，有理数的混合运算，绝对值的定义，数的整除，掌握数的整除性以及运算法则是解题的关键.

### 【考点 7 二元一次方程的整数解】

【例 7】（2022·上海市静安区实验中学课时练习）二元一次方程  $3x+8y=27$  的所有正整数解为\_\_\_\_\_；整数解有\_\_\_\_\_个.

【答案】  $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$  无数

【分析】把  $x$  看做已知数求出  $y$ ，分析即可确定出正整数解及整数解的情况.

【详解】解：方程  $3x+8y=27$ ，

$$\text{解得： } y = \frac{3(9-x)}{8},$$

$\therefore$  当  $x$ 、 $y$  是正整数时， $9-x$  是 8 的倍数，

$$\therefore x=1, y=3;$$

$\therefore$  二元一次方程  $3x+8y=27$  的正整数解只有 1 个，即  $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ；

$\therefore$  当  $x$ 、 $y$  是整数时， $9-x$  是 8 的倍数，

$\therefore x$  可以有无数个值，如  $-7, -15, -23, \dots$ ；

$\therefore$  二元一次方程  $3x+8y=27$  的整数解有无数个.

故答案是：  $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ；无数.

【点睛】此题考查了二元一次方程的整数解及正整数解问题，解题的关键是将  $x$  看做已知数求出  $y$ 。

【变式 7-1】（2022·全国·七年级课时练习）已知关于  $x$  的方程  $9x-3=kx+14$  有整数解，求满足条件的所有整数  $k$  的值.

【答案】  $k=26, 10, 8, -8$ .

【分析】将原式转化，得到  $(9-k)x=17$ ，根据  $x$  与  $k$  均为整数，即可推出  $k$  的值.

【详解】  $9x-3=kx+14$ ，

$$(9-k)x=17,$$

$\therefore x, k$  都是整数，

$\therefore (9-k), x$  都是整数，

$\therefore 9-k = -17, -1, 1$  或  $17$ ，

$\therefore k = 26, 10, 8, -8$ .

【点睛】本题考查了方程的整数解，根据“整数”这一条件即可将方程的解限制在有限的范围内通过试解即可得到  $k$  的值.

【变式 7-2】（2022·重庆一中八年级开学考试）对任意一个四位数  $m$ ，若  $m$  满足各数位上的数字都不为 0，且千位与百位上的数字不相等，十位与个位上的数字不相等，那么称这个数为“ $M$  数”，将一个“ $M$  数” $m$  的任意一个数位上的数字去掉后可以得到四个新三位数，把这四个新三位数的和与 3 的商记为  $F(m)$ 。例如，“ $M$  数” $m=1234$ ，去掉千位上的数字得到 234，去掉百位上的数字得到 134，去掉十位上的数字得到 124，去掉个位上的数字得到 123，这四个新三位数的和为  $234+134+124+123=615$ ， $615 \div 3=205$ ，所以  $F$

$$(1234) = 205.$$

(1) 计算:  $F(1213)$ ,  $F(8567)$ ;

(2) 若“M数” $n = 8900 + 10x + y$  ( $1 \leq x \leq 9$ ,  $1 \leq y \leq 9$ ,  $x, y$  都是正整数),  $F(n)$  也是“M数”, 且  $F(n)$  能被 8 整除. 求  $F[F(n)]$  的值.

**【答案】** (1) 190, 1049.

(2) 195 或 198.

**【分析】** (1) 直接根据阅读部分提供的运算法则进行运算即可;

(2) 先求解  $F(n) = 1160 + 7x + y$ , 结合  $F(n)$  能被 8 整除, 可得  $7x + y$  能够被 8 整除, 而  $1 \leq x \leq 9$ ,  $1 \leq y \leq 9$ ,  $x, y$  都是正整数,  $x \neq y$ , 再分类讨论即可.

(1)

$$\text{解: } F(1213) = (213 + 113 + 123 + 121) \div 3 = 190,$$

$$F(8567) = (567 + 867 + 857 + 856) \div 3 = 1049.$$

(2)

解:  $\because$  “M数” $n = 8900 + 10x + y$  ( $1 \leq x \leq 9$ ,  $1 \leq y \leq 9$ ,  $x, y$  都是正整数),

$$\therefore F(n) = (900 + 10x + y + 800 + 10x + y + 890 + y + 890 + x) \div 3$$

$$= 1160 + 7x + y,$$

$\therefore F(n)$  能被 8 整除,

$\therefore 7x + y$  能够被 8 整除, 而  $1 \leq x \leq 9$ ,  $1 \leq y \leq 9$ ,  $x, y$  都是正整数,  $x \neq y$ ,

$$\therefore \text{当 } x = 1, y = 9, F(n) = 1160 + 7 + 9 = 1176,$$

$$\text{此时 } F[F(n)] = F(1176) = (176 + 176 + 116 + 117) \div 3 = 195,$$

$$\text{当 } x = 9, y = 1, F(n) = 1160 + 63 + 1 = 1224,$$

$$\text{此时 } F[F(n)] = F(1224) = (224 + 124 + 124 + 122) \div 3 = 198.$$

**【点睛】** 本题考查的是阅读理解, 新定义运算, 数的整除, 二元一次方程的正整数解问题, 考查方式比较新颖, 理解“M数”的具体特征是解决问题的关键.

**【变式 7-3】** (2022·重庆涪陵·七年级期末) 对于一个各个数位上的数字均不为零的三位自然数  $m$ , 若  $m$  的十位数字等于百位数字与个位数字之和, 则称这个自然数  $m$  为“三峡数”. 当三位自然数  $m$  为“三峡数”时, 交换  $m$  的百位数字和个位数字后会得到一个三位自然数  $n$ , 规定  $F(m) = \frac{m-n}{99}$ . 例如: 当  $m = 583$  时, 因为  $5 + 3 = 8$ ,

所以 583 是“三峡数”；此时  $n = 385$ ，则  $F(m) = \frac{m-n}{99} = \frac{583-385}{99} = \frac{198}{99} = 2$ 。

(1) 判断 341 和 153 是否是“二峡数”？并说明理由；

(2) 求  $F(352)$  的值；

(3) 若三位自然数  $m = 100a + 10(a + b) + b$ （即  $m$  的百位数字是  $a$ ，十位数字是  $a + b$ ，个位数字是  $b$ ， $1 \leq a \leq 9$ ， $1 \leq b \leq 9$ ， $a, b$  是整数， $1 \leq a + b \leq 9$ ）为“三峡数”，且  $F(m) = 5$  时，求满足条件的所有三位自然数  $m$ 。

【答案】(1) 341 是“三峡数”，153 不是“三峡数”，理由见解析

(2)  $F(352) = 1$

(3) 所有满足条件的  $m$  是 671、792

【分析】(1) 根据三峡数的定义分析即可；

(2) 根据  $F(m) = \frac{m-n}{99}$  计算；

(3) 根据  $F(m) = 5$  列出关于  $a, b$  的二元一次方程，然后根据  $1 \leq a \leq 9$ ， $1 \leq b \leq 9$  求解；

(1)

341 是“三峡数”， $\because 3 + 1 = 4 = 4$ ， $\therefore 341$  是“三峡数”；

153 不是“三峡数”， $\because 1 + 3 = 4 \neq 5$ ， $\therefore 153$  不是“三峡数”；

(2)

$$F(352) = \frac{352-253}{99} = \frac{99}{99} = 1;$$

(3)

由题知  $m = 100a + 10(a + b) + b$  ( $1 \leq a \leq 9$ ， $1 \leq b \leq 9$ ， $a, b$  是整数)，

则  $n = 100b + 10(a + b) + a$ ，

$$\therefore F(m) = \frac{m-n}{99} = \frac{100a+10a+10b+b-100b-10a-10b-a}{99},$$

$$= \frac{99(a-b)}{99}$$

$$= a - b,$$

则  $a - b = 5$  ( $1 \leq a \leq 9$ ， $1 \leq b \leq 9$ ， $a, b$  是整数)  $1 \leq a + b \leq 9$ ，

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases},$$

$m = 671, 792$ ，

答：所有满足条件的 $m$ 是 671、792.

【点睛】本题考查了新定义，以及解二元一次方程，正确理解“三峡数”的定义是解答本题的关键.

### 【考点 8 二元一次方程组的特殊解法】

【例 8】（2022·福建省永春乌石中学七年级阶段练习）数学方法：

解方程组： $\begin{cases} 3(2x+y)-2(x-2y)=26 \\ 2(2x+y)+3(x-2y)=13 \end{cases}$ ，若设 $2x+y=m$ ， $x-2y=n$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} 3m-2n=26 \\ 2m+3n=13 \end{cases}$ ，

解方程组得 $\begin{cases} m=8 \\ n=-1 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ ，解方程组得 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ ，我们把某个式子看成一个整体，用一个字母

去替代它，这种解方程组的方法叫做换元法.

(1)直接填空：已知关于 $x$ ， $y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=6 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ ，的解为 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ ，那么关于 $m$ 、 $n$ 的二元一次

方程组 $\begin{cases} a(m+n)+b(m-n)=6 \\ b(m+n)+a(m-n)=3 \end{cases}$ 的解为：\_\_\_\_\_.

(2)知识迁移：请用这种方法解方程组 $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=4 \\ 2(x+y)+x-y=16 \end{cases}$ .

(3)拓展应用：已知关于 $x$ ， $y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$ ，

求关于 $x$ ， $y$ 的方程组 $\begin{cases} 2a_1x+3b_1y=5c_1 \\ 2a_2x+3b_2y=5c_2 \end{cases}$ 的解.

【答案】(1) $\begin{cases} m=1 \\ n=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=10 \\ y=-5 \end{cases}$

【分析】(1) 设 $m+n=x$ ， $m-n=y$ ，即可得 $\begin{cases} m+n=-2 \\ m-n=4 \end{cases}$ ，解方程组即可求解；

(2) 设 $\frac{x+y}{2}=m$ ， $\frac{x-y}{3}=n$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} m-n=4 \\ 4m+3n=16 \end{cases}$ ，解方程组即可求解；

(3) 设 $\frac{2x}{5}=m$ ， $\frac{3y}{5}=n$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} a_1m+b_1n=c_1 \\ a_2m+b_2n=c_2 \end{cases}$ ，根据 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$ ，可

得 $\begin{cases} m=4 \\ n=-3 \end{cases}$ ，即有 $\begin{cases} \frac{2x}{5}=4 \\ \frac{3y}{5}=-3 \end{cases}$ ，则问题得解.

(1)

设 $m+n=x$ ， $m-n=y$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} ax+by=6 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} ax+by=6 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} m+n=-2, \\ m-n=4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m=1, \\ n=-3 \end{cases},$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} m=1, \\ n=-3 \end{cases};$$

(2)

$$\text{设} \frac{x+y}{2} = m, \frac{x-y}{3} = n, \text{ 则原方程组可化为} \begin{cases} m-n=4 \\ 4m+3n=16 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m=4, \\ n=0 \end{cases},$$

$$\text{即有} \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 4 \\ \frac{x-y}{3} = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases},$$

$$\text{即: 方程组的解为} \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases};$$

(3)

$$\text{设} \frac{2x}{5} = m, \frac{3y}{5} = n, \text{ 则原方程组可化为} \begin{cases} 5ma_1 + 5nb_1 = 5c_1 \\ 5ma_2 + 5nb_2 = 5c_2 \end{cases},$$

$$\text{化简, 得} \begin{cases} a_1m + b_1n = c_1 \\ a_2m + b_2n = c_2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{关于 } x, y \text{ 的二元一次方程组} \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ 的解为} \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m=4 \\ n=-3 \end{cases}, \text{ 即有} \begin{cases} \frac{2x}{5} = 4 \\ \frac{3y}{5} = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=10 \\ y=-5 \end{cases},$$

$$\text{故方程组的解为: } \begin{cases} x=10 \\ y=-5 \end{cases}.$$

**【点睛】** 本题考查了用换元法解二元一次方程组的知识, 紧密结合题目给出的示例, 合理换元是解答本题的关键.

**【变式 8-1】** (2022·上海市复旦实验中学八年级期末) 用换元法解方程组  $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{6}{y+1} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases}$  时, 可设  $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y+1} = v$ ,

则原方程组可化为关于  $u, v$  的整式方程组为\_\_\_\_\_.

$$\text{【答案】} \begin{cases} 5u-6v=1 \\ u+2v=1 \end{cases}$$

【分析】将 $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y+1} = v$ 代入原方程组即可得.

【详解】解：将 $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y+1} = v$ 代入方程组 $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{6}{y+1} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases}$

得： $\begin{cases} 5u - 6v = 1 \\ u + 2v = 1 \end{cases}$ ,

故答案为： $\begin{cases} 5u - 6v = 1 \\ u + 2v = 1 \end{cases}$ .

【点睛】本题考查了解二元一次方程组，熟练掌握换元法是解题关键.

【变式 8-2】（2022·陕西·西大附中浐灞中学八年级期末）解方程组： $\begin{cases} x + y = 22 \text{①} \\ 4(x + y) - 5(x - y) = -2 \text{②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 20 \\ y = 2 \end{cases}$

【分析】把 $x + y$ 和 $x - y$ 分别作为整体，然后利用加减消元法解答，即可求解.

【详解】解： $\begin{cases} x + y = 22 \text{①} \\ 4(x + y) - 5(x - y) = -2 \text{②} \end{cases}$ ,

由① $\times 4$ -②得： $x - y = 18 \text{③}$ ,

由①+③得： $2x = 40$ ,

解得： $x = 20$ ,

把 $x = 20$ 代入③得： $20 - y = 18$ ,

解得： $y = 2$ ,

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x = 20 \\ y = 2 \end{cases}$ .

【点睛】本题主要考查了解二元一次方程组，利用整体代入思想解答是解题的关键.

【变式 8-3】（2022·北京朝阳·七年级期末）阅读下列材料并填空：

(1) 对于二元一次方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 54 \\ x + 3y = 36 \end{cases}$ 我们可以将 $x, y$ 的系数和相应的常数项排成一个数表 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 54 \\ 1 & 3 & 36 \end{pmatrix}$ ，求得一次方程组的解 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ ，用数可表示为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ 。用数表可以简化表达解一次方程组的过程如下，请补全其中的空白：

上行 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 54 \\ 1 & 3 & 36 \end{pmatrix}$   $\xrightarrow{\text{上行}-\text{下行}}$   $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 18 \\ 1 & 3 & 36 \end{pmatrix}$   $\xrightarrow{\text{上行}\times 3}$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 36 \end{pmatrix}$   $\longrightarrow$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 30 \end{pmatrix}$   $\xrightarrow{\text{下行}\div 3}$   $( )$

从而得到该方程组的解为 $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$ 。

(2) 仿照 (1) 中数表的书写格式写出解方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$ 的过程。

**【答案】** (1)  $\begin{cases} x=6 \\ y=10 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

**【详解】** 试题分析：(1) 下行-上行后将下行除以 3 将 y 的系数化为 1 即可得到方程的解；

(2) 类比 (1) 中方法通过加减法将 x、y 的系数化为 1 即可。

试题解析：(1) 下行-上行  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{cases} x=6 \\ y=10 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{array}{l} \text{上行} \\ \text{下行} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{下行} \times 3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{下行}-\text{上行}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{下行} \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{上行}-\text{下行}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{上行} \div 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{从而得到方程}$$

组成的解为  $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ 。

### 【考点 9 二元一次方程组的新定义问题】

**【例 9】** (2022·贵州·铜仁市第十一中学七年级阶段练习) 我们规定： $[m]$  表示不超过  $m$  的最大整数，例如：

$[3.1] = 3$ ， $[0] = 0$ ， $[-3.1] = -4$ ，则关于  $x$  和  $y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} [x] + y = 3.2 \\ x - [y] = [3.2] \end{cases}$  的解为 ( )

- A.  $\begin{cases} x=3.2 \\ y=0.2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x=2.4 \\ y=1.2 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x=3 \\ y=0.2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x=3.4 \\ y=0.2 \end{cases}$

**【答案】** C

**【分析】** 根据  $[m]$  的意义可得  $[3.2]=3$ ， $[x]$  和  $[y]$  均为整数，两方程相减可求出  $y=0.2$ ， $[y]=0$ ，将  $[y]=0$  代入第二个方程可求出  $x$ 。

**【详解】** 解：  $\begin{cases} [x] + y = 3.2 \text{ ①} \\ x - [y] = [3.2] \text{ ②} \end{cases}$ ，

$\because [m]$  表示不超过  $m$  的最大整数，

$\therefore [3.2]=3$ ， $[x]$  和  $[y]$  均为整数，

$\therefore x$  为整数，即  $[x]=x$ ，

$\therefore \text{①} - \text{②}$  得：  $y + [y] = 0.2$ ，

$\therefore y=0.2$ ， $[y]=0$ ，

将  $[y]=0$  代入  $\text{②}$  得：  $x=3$ ，

$$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=0.2 \end{cases}$$

故选：C。

**【点睛】** 此题考查了新定义以及解二元一次方程组，解题的关键是正确理解  $[m]$  的意义。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/707164023026010003>