

2024 届高三下学期开学摸底考（全国甲卷、乙卷通用）

理科数学

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
- 考试范围：高考全部内容。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

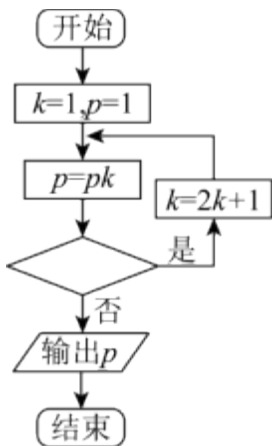
- 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \sqrt{4-x}\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{-1, 5\}$, $D = \{y \mid y = 2^x\}$, 则 $B \cap D =$ ()
- 已知复数 $\frac{3+ai}{1-ai}$ 的虚部是 2, 则 $a =$ ()

- A. $\{1, 2, 3, 4, 5\} - ai$ B. $\{1, 2, 3, 5\}$ C. $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\left| \frac{3+ai}{1-ai} \right|$$

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{7}$ C. 3 D. $\sqrt{11}$

- 执行如图所示的程序框图，若输出 p 的值为 21，则空白框内可以填入的是 ()



- A. $k < 3$ B. $k < 5$ C. $k < 7$ D. $k < 9$

- 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2$, $AC = 4$, $\angle BAC = 120^\circ$, O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$,

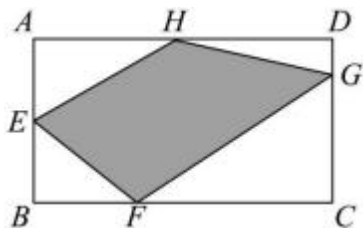
则 $\vec{AO} \cdot \vec{BC}$ 的值为 ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

- 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，若 $a_1 + a_5 + a_9 = 9$, $b_2 b_5 b_8 = 3\sqrt{3}$, 则 $\frac{a_1 + a_8}{b_1 + b_8} =$ ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

- 已知长方形 $ABCD$ 中， $AD = 2AB$, E, H 分别是 AB, AD 的中点， F 是 BC 边上靠近 B 的三等分点， G 是 DC 边上靠近 D 的四等分点。现往长方形 $ABCD$ 中投掷 96 个点，则落在阴影部分内的点有 ()



- A. 46 个 B. 48 个 C. 54 个 D. 72 个

7. 已知平面直角坐标系中，角 α 的终边不在坐标轴上，则“ $\tan\alpha < \sin\alpha < \cos\alpha$ ”是“ α 是第四象限角”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{5}$ ，圆 $(x-a)^2 + y^2 = 9$ 与 C 的一条渐近线相交，且弦长不小于4，则 a 的取值范围是()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{2}]$ C. $(0, 2]$ D. $(0, \frac{5}{2}]$

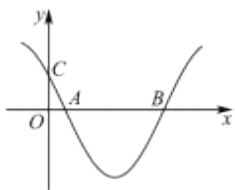
9. 劳动教育是中国特色社会主义教育制度的重要内容，某校计划组织学生参与各项职业体验，让学生在劳动课程中掌握一定的劳动技能，理解劳动创造价值，培养劳动自立意识和主动服务他人，服务社会的情怀。该校派遣甲、乙、丙、丁、戊五个小组到 A 、 B 、 C 三个街道进行打扫活动，每个街道至少去一个小组，则不同的派遣方案有()

- A. 140 B. 150 C. 200 D. 220

10. 已知函数 $f(x) = M\cos(\omega x + \Theta)$ ($M > 0, \omega > 0, \Theta < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，其中 $A(\frac{\pi}{24}, 0)$,

$B(\frac{7\pi}{24}, 0)$, $C(0, 2)$ ，现先将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$ ，再向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度，

得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(-\frac{5\pi}{144}) =$ ()



- A. $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ D. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ，直线 l 过椭圆的右焦点 F ，交椭圆于 A, B 两点， O 为坐标原点， M 为 AB 的中点， N 为 OF 的中点，则线段 MN 的长的取值范围为()

- A. $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

12. 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$ ，实数 a, b 分别满足 $a^2 = \frac{2}{e}$ ， $b = \ln 2$ ，则下列结论成立的是()

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $f(a) > f(b)$ D. $f(a) < f(b)$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

13. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{ae^x} + b\sin x + 2(ab + 0)$, 若 $f(4) = 6$, 则 $f(-4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} |x-2y+1| < 0 \\ x+2y \leq 7 \end{cases}$, 则 $y-2x$ 的最小值是_____.

$$|3x+2y| > 5$$

15. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $2\sqrt{2}$, 高为 h , 且 $1 < h < 4$, 该四棱锥的外接球的表面积为 S , 则 S 的取值范围为_____.

16. 已知锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足

$$(a^2 - b^2 - c^2) \sin C \cos C = bc \cos(B+C), \quad a = \sqrt{2},$$

则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为_____.

三、解答题：本大题共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 2, a_2 = 4$, 当 $n > 2$ 时, $\left\{ \frac{S_{n+1} - S_n}{a_{n+1}} \right\}$ 是 4 的常数列。

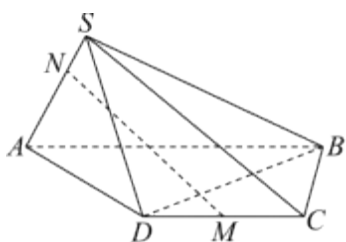
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $n > 2$ 时, 设数列 $\left\{ \frac{n+2}{n(n+1)a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{2}$.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp BC, SA = SD = 1, AB = 2CD = 2BC = 2, SB = \sqrt{3}$,

点 M 为棱 CD 的中点, 点 N 在棱 SA 上, 且 $AN = 3SN$.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 SBC ; (2) 求直线 SC 与平面 SBD 所成角的正弦值.



19. (12 分) 为了进一步推动智慧课堂的普及和应用, A 市现对全市中小学智慧课堂的应用情况进行抽样调查, 统计数据如表:

	经常应用	偶尔应用或者不应用	总计
农村	40		
城市	60		
总计	100	60	160

从城市学校中任选一个学校, 偶尔应用或者不应用智慧课堂的概率是 $\frac{1}{4}$.

(1) 补全 2 根 2 列联表, 判断能否有 99.5% 的把握认为智慧课堂的应用与区域有关, 并阐述理由;

(2)在经常应用智慧课堂的学校中，按照农村和城市的比例抽取 5 个学校进行分析，然后再从这 5 个学校中随机抽取 2 个学校所在的地域进行核实，记其中农村学校有 X 个，求 X 的分布列和数学期望.

2

$$n(ad-bc)^2$$

$$\text{附: } K = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.500	0.050	0.005
k	0.445	3.841	7.789

20. (12 分) 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ 经过点 $P(-2, 1)$, 过点 $Q(-1, 0)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同交点 A, B , 且直线 PA 交 x 轴于 M , 直线 PB 交 x 轴于 N .

(1) 求直线 l 斜率的取值范围;

(2) 证明: 存在定点 T , 使得 $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QT}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QT}$ 且 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 4$.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ae^x + x^2 + x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) + \ln a - x^2 - x - \ln x$, 且 $h(x)$ 恰有 2 个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

选修 4-4: 坐标系与参数方程

22. (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = |x + y|$ (其中 $y > 0$), 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t > 0$),

曲线 $C_2: \begin{cases} x = t \sin \alpha \\ y = t \cos \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标

系.

系.

(1) 求 C 的极坐标方程;

(2) 若曲线 C 与 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

选修 4-5: 不等式选讲

23. (10 分)

已知函数 $f(x) = |x - 2a| - |x - 2|$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) < |x - 4| - 1$ 恒成立, 求实数 a 的值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/708041064021006050>