函数问题过程性学习探究型

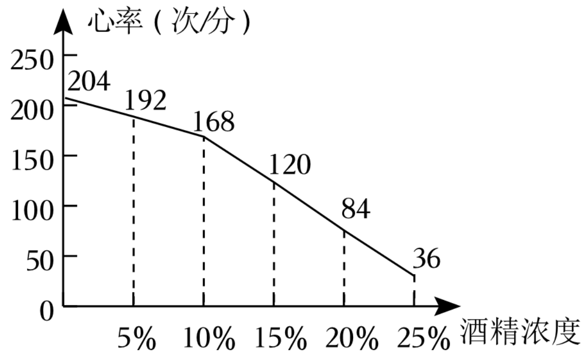
中考解密

函数过程性学习是一种以学生为中心设计执行函数过程性学习方法．函数过程性学习要求学生从真实世界的基本问题出发，围绕复杂的、来自真实情境的主题，在精心设计任务、活动的基础上，以小组方式进行开放性探究，并将学习结果以作品的形式表现出来，最终达到知识建构与自身能力提高．这个也是落实课程标准中的活动建议，函数过程性学习更能有效提高学生发现问题、分析问题和解决问题的能力，此类题可以是纯函数性质探究，也可以结合几何动点探究函数性质，属于创新题．

重点考向

一．选择题

题目 1 (2023•青海)生物兴趣小组探究酒精对某种鱼类的心率是否有影响，实验得出心率与酒精浓度的关系如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 酒精浓度越大，心率越高

B. 酒精对这种鱼类的心率没有影响

C. 当酒精浓度是10%时，心率是168次/分

D. 心率与酒精浓度是反比例函数关系

解：由图象可知，酒精浓度越大，心率越低，故 A 错误；

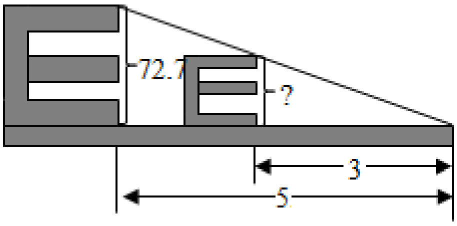
酒精浓度越大，心率越低，酒精对这种鱼类的心率有影响，故 B 错误；

由图象可知，当酒精浓度是10%时，心率是168次/分，故 C 正确；

任意取两个点坐标 $(5\%, 192)$，$(10\%, 168)$，因为 $192\times5\%\neq168\times10\%$，所以心率与酒精浓度不是反比例函数关系，故 D 错误．

故选：C．

题目 2 (2021•兰州)如图，小明探究课本“综合与实践”板块“制作视力表”的相关内容：当测试距离为 $5m$ 时，标准视力表中最大的“ E ”字高度为72.7mm，当测试距离为 $3m$ 时，最大的“ E ”字高度为（　　）



A. 121.17mm　　B. 43.62mm　　C. 29.08mm　　D. 4.36mm

解：由题意得：$CB // DF$，

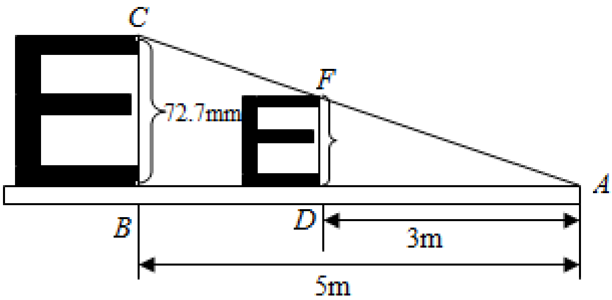
$\frac{DF}{BC}=\frac{AD}{AB}$，

$\because AD=3m$，$AB=5m$，$BC=72.7\text{mm}$，

$\frac{DF}{72.7}=\frac{3}{5}$，

$\therefore DF=43.62(\text{mm})$，

故选：B.



题目 3 (2023·晋城模拟) 观察式子：$\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6$，$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6$；$\sqrt{\frac{49}{100}\times\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{441}{400}}=\frac{21}{20}$，$\sqrt{\frac{49}{100}}\times\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{10}\times\frac{3}{2}=\frac{21}{20}$；$\sqrt{0.25\times0.04}=\sqrt{0.01}=0.1$，$\sqrt{0.25}\times\sqrt{0.04}=0.5\times0.2=0.1$，由此猜想 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$. 上述探究过程蕴含的思想方法是（　　）

A. 特殊与一般　　B. 整体　　C. 转化　　D. 分类讨论

解：探究过程蕴含的思想方法是特殊与一般，

故选：A.

题目 4 (2023·迁安市二模) 如图1和图2是在数学课上甲组和乙组在探究用不同方法：过直线外一点 P 作直线 l 的平行线，用尺规作图保留痕迹，关于两组的作法下列说法正确的是（　　）

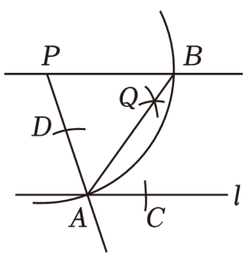


图1

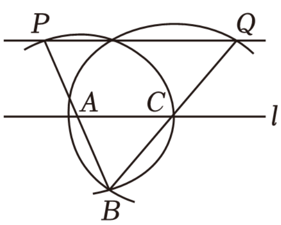


图2

A. 甲组作法正确，乙组作法不正确　　B. 甲组作法不正确，乙组作法正确

C. 甲组和乙组作法都不正确　　D. 甲组和乙组作法都正确

解：图1中，AB 是 $\angle PAC$ 的平分线，

$\therefore \angle PAB=\angle BAC$，

$\because PA=PB$,

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$,

$\therefore \angle PBA=\angle BAC$,

$\therefore PB/\!/l$,

$\therefore$ 甲组作法正确;

图 2 中,A、C 分别为 PB、QB 的中点,

$\therefore AC$ 是 $\triangle PBQ$ 的中位线,

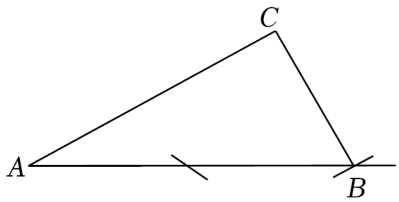
$\therefore AC/\!/PQ$,

$\therefore PQ/\!/l$,

$\therefore$ 乙组作法正确;

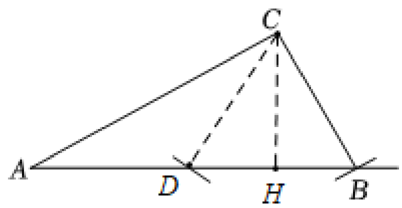
故选:D.

题目 5 (2022• 百色) 活动探究:我们知道,已知两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.如已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=30^\circ$,$AC=3$,$\angle A$ 所对的边为 $\sqrt{3}$,满足已知条件的三角形有两个 (我们发现其中如图的 $\triangle ABC$ 是一个直角三角形),则满足已知条件的三角形的第三边长为 (　　)



A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}-3$　　C. $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}-3$

解:如图,$CD=CB$,作 $CH\perp AB$ 于 H,



$\therefore DH=BH$,

$\because \angle A=30^\circ$,

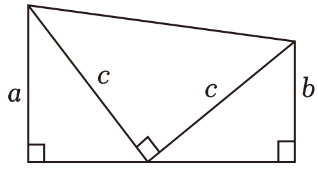
$\therefore CH=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$, $AH=\sqrt{3}CH=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle CBH$ 中,由勾股定理得 $BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{3-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore AB=AH+BH=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$, $AD=AH-DH=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,

故选:C.

题目 6 (2023• 山西模拟) 数学中,常对同一个量 (图形的面积、点的个数等) 用两种不同的方法计算,从而建立相等关系.我们把这种思想叫"算两次""算两次"也称作富比尼原理,是一种重要的数学思想.由它可以推导出很多重要的公式.如图,两个直角边分别为 a,b 的直角三角形和一个两条直角边都是 c 的直角三角形拼成一个梯形,用"算两次"的方法,探究 a,b,c 之间的数量关系,可以验证的是 (　　)



A. 勾股定理　　　　　B. 平方差公式　　　　　C. 完全平方公式　　　　　D. 比例的性质

解：第一次利用梯形的面积公式，图形面积为：$\frac{1}{2}(a+b)^2$，

第二次利用图形的面积和计算为：$2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，

$\therefore \frac{1}{2}(a+b)^2=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，

整理得：$a^2+2ab+c^2=2ab+c^2$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

故选：A.

题目 7 (2023·金昌) 如图1，汉代初期的《淮南万毕术》是中国古代有关物理、化学的重要文献，书中记载了我国古代学者在科学领域做过的一些探索及成就．其中所记载的“取大镜高悬，置水盆于其下，则见四邻矣”，是古人利用光的反射定律改变光路的方法，即“反射光线与入射光线、法线在同一平面上；反射光线和入射光线位于法线的两侧；反射角等于入射角”．为了探清一口深井的底部情况，运用此原理，如图在井口放置一面平面镜可改变光路，当太阳光线 AB 与地面 CD 所成夹角 $\angle ABC=50^\circ$ 时，要使太阳光线经反射后刚好垂直于地面射入深井底部，则需要调整平面镜 EF 与地面的夹角 $\angle EBC=$ (　　)

图1

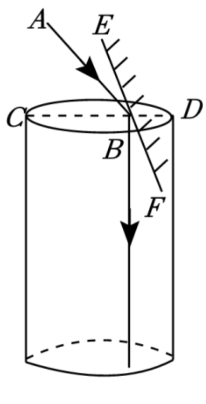


图2

A. 60°　　　　　B. 70°　　　　　C. 80°　　　　　D. 85°

解：如图，

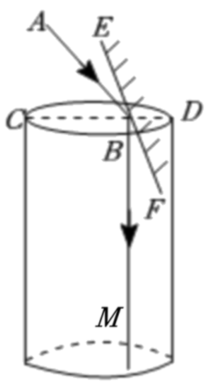


图2

$\because BM\perp CD$，

$\therefore \angle CBM=90^\circ$，

$\because \angle ABC=50^\circ$，

$\therefore \angle ABE+\angle FBM=180^\circ-90^\circ-50^\circ=40^\circ$,

$\because \angle ABE=\angle FBM$,

$\therefore \angle ABE=\angle FBM=20^\circ$,

$\therefore \angle EBC=20^\circ+50^\circ=70^\circ$.

故选:B.

题目 8 (2022• 无锡) 雪花、风车 …… 展示着中心对称的美,利用中心对称,可以探索并证明图形的性质. 请思考在下列图形中,是中心对称图形但不一定是轴对称图形的为 (　　)

A. 扇形　　B. 平行四边形　　C. 等边三角形　　D. 矩形

解:A. 扇形是轴对称图形,不是中心对称图形,故此选项不合题意;

B. 平行四边形不一定是轴对称图形,是中心对称图形,故此选项符合题意;

C. 等边三角形是轴对称图形,不是中心对称图形,故此选项不合题意;

D. 矩形既是轴对称图形,又是中心对称图形,故此选项不合题意;

故选:B.

题目 9 (2023• 德阳) 在“点燃我的梦想,数学皆有可能”数学创新设计活动中,“智多星”小强设计了一个数学探究活动;对依次排列的两个整式 m,n 按如下规律进行操作:

第 1 次操作后得到整式中 m,n,$n-m$;

第 2 次操作后得到整式中 m,n,$n-m$,$-m$;

第 3 次操作后 ……

其操作规则为:每次操作增加的项,都是用上一次操作得到的最末项减去其前一项的差,小强将这个活动命名为“回头差”游戏.

则该“回头差”游戏第 2023 次操作后得到的整式串各项之和是 (　　)

A. $m+n$　　B. m　　C. $n-m$　　D. $2n$

解:第 1 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$;

第 2 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$,$-m$;

第 3 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$,$-m$,$-n$;

第 4 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$,$-m$,$-n$,$-n+m$;

第 5 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$,$-m$,$-n$,$-n+m$,m;

第 6 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$,$-m$,$-n$,$-n+m$,m,n;

第 7 次操作后得到的整式串 m,n,$n-m$,$-m$,$-n$,$-n+m$,m,n,$n-m$;

……

第 2023 次操作后得到 的整式串 m,n,$n-m$,$-m$,$-n$,$-n+m$,……m,n,$n-m$;共 2025 个整式;

归纳可得,以上整式串每六次一循环. 每 6 个整式的整式之和为:$m+n+(n-m)+(-m)+(-n)+(-n+m)=0$,

$\because 2025\div 6=337\cdots 3$,

$\therefore$ 第 2023 次操作后得到的整式中,求最后三项之和即可.

$\therefore$ 这个和为 $m+n+(n-m)=2n$.

故选:D.

题目 10 (2023• 东湖区校级二模) 数学小组将两块全等的含 30° 角的三角尺按较长的直角边重合的方式摆放,并通过平移对特殊四边形进行探究. 如图 1,其中 $\angle ADB=\angle CBD=30^\circ$,$\angle ABD=\angle BDC=90^\circ$,$AB=CD=3$,将 $Rt\triangle BCD$ 沿射线 DB 方向平移,得到 $Rt\triangle B'C'D'$. 分别连接 AB',DC' (如图 2 所示),下列有

关四边形 $AB'C'D$ 的说法正确的是（　　）

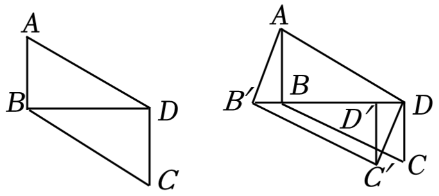


图1　　　　图2

A. 先是平行四边形，平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度后是菱形

B. 先是平行四边形，平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度后是矩形，再平移 $2\sqrt{3}$ 个单位长度后是菱形

C. 先是平行四边形，平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度后是矩形，再平移 $3\sqrt{3}$ 个单位长度后是正方形

D. 在 $Rt\triangle BCD$ 平移的过程中，依次出现平行四边形、矩形、菱形、正方形

解：A．在 $Rt\triangle ABB'$ 中，$AB=3$，$BB'=\sqrt{3}$，

$\therefore AB'=\sqrt{AB^2+BB'^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=30°$，

$\therefore AD=2AB=2\times3=6$，

$\therefore BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=3\sqrt{3}$，

$\because \triangle ABD\cong\triangle CDB$，

$\therefore CD=AB=3$，$BC=AD=6$，

$\therefore B'C'=6$，

$\therefore AB'\neq B'C'$，

$\therefore$ 四边形 $AB'C'D$ 是平行四边形，但不是菱形，故 A 选项不符合题意；

B．当 $BB'=\sqrt{3}$ 时，

$\because \tan\angle AB'B=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle AB'B=60°$，

$\because \angle CBD=30°$，$BC\parallel B'C'$，

$\therefore \angle C'B'D'=30°$，

$\therefore \angle AB'C'=90°$，四边形 $AB'C'D$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $AB'C'D$ 是矩形，

当 $BB'=3\sqrt{3}$ 时，$AB'=\sqrt{AB^2+BB'^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6=B'C'$，

$\therefore$ 四边形 $AB'C'D$ 是菱形，故 B 选项符合题意；

C．由 B 可知先是平行四边形，平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度后是矩形，

当 $BB'=4\sqrt{3}$ 时，$AB'=\sqrt{AB^2+BB'^2}=\sqrt{3^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{57}\neq B'C'$，

$\therefore$ 四边形 $AB'C'D$ 不是正方形，故 C 选项不符合题意；

D．由 B 知，$Rt\triangle BCD$ 平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度后是矩形，移动的其它位置不是矩形，故一定不是正方形，故 D 选项不符合题意．

故选：B．

二．填空题

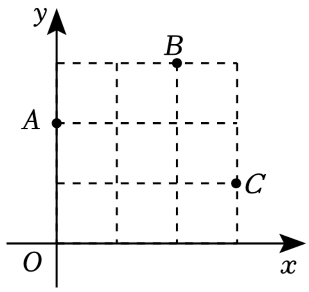
题目 11 (2023• 福山区一模)3 月 28 日电 28 日，我国首单以人民币结算的进口液化天然气 (LNG) 采购交易达成，标志着我国在油气贸易领域的跨境人民币结算交易探索迈出实质性一步，数据显示，2022 年上海石油天然气交易中心天然气双边交易量达到 928.58 亿立方米．928.58 亿用科学记数法表示为 __9.2858×

10^{10}__.

解：928.58 亿 $=92858000000=9.2858\times10^{10}$.

故答案为：9.2858×10^{10}.

题目 12 (2023• 杭州) 在"探索一次函数 $y=kx+b$ 的系数 k，b 与图象的关系"活动中，老师给出了直角坐标系中的三个点：$A(0,2)$，$B(2,3)$，$C(3,1)$．同学们画出了经过这三个点中每两个点的一次函数的图象，并得到对应的函数表达式 $y_1=k_1x+b_1$，$y_2=k_2x+b_2$，$y_3=k_3x+b_3$．分别计算 k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3 的值，其中最大的值等于 __5__ .



解：解法一：设直线 AB 的解析式为 $y_1=k_1x+b_1$，

将点 $A(0,2)$，$B(2,3)$ 代入得，$\begin{cases} b_1=2 \\ 2k_1+b_1=3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k_1=\dfrac{1}{2} \\ b_1=2 \end{cases}$，

$\therefore k_1+b_1=\dfrac{5}{2}$，

设直线 AC 的解析式为 $y_2=k_2x+b_2$，

将点 $A(0,2)$，$C(3,1)$ 代入得，$\begin{cases} b_2=2 \\ 3k_2+b_2=1 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k_2=-\dfrac{1}{3} \\ b_2=2 \end{cases}$，

$\therefore k_2+b_2=\dfrac{5}{3}$，

设直线 BC 的解析式为 $y_3=k_3x+b_3$，

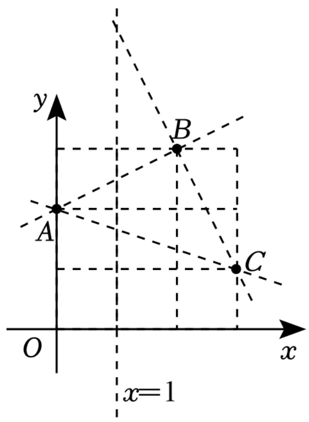
将点 $B(2,3)$，$C(3,1)$ 代入得，$\begin{cases} 2k_3+b_3=3 \\ 3k_3+b_3=1 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k_3=-2 \\ b_3=7 \end{cases}$，

$\therefore k_3+b_3=5$，

$\therefore k_1+b_1=\dfrac{5}{2}$，$k_2+b_2=\dfrac{5}{3}$，$k_3+b_3=5$，其中最大的值为 5.

解法二：如图，作直线 AB、AC、BC，作直线 $x=1$，



设直线 AB 的解析式为 $y_1 = k_1x + b_1$，直线 AC 的解析式为 $y_2 = k_2x + b_2$，直线 BC 的解析式为 $y_3 = k_3x + b_3$，
由图象可知，直线 $x = 1$ 与直线 BC 的交点最高，
即当 $x = 1$ 时，$k_1 + b_1$，$k_2 + b_2$，$k_3 + b_3$ 其中最大的值为 $k_3 + b_3$，
将点 $B(2, 3)$，$C(3, 1)$ 代入得，$\begin{cases} 2k_3 + b_3 = 3 \\ 3k_3 + b_3 = 1 \end{cases}$，
解得：$\begin{cases} k_3 = -2 \\ b_3 = 7 \end{cases}$，
$\therefore k_3 + b_3 = 5$，
$k_1 + b_1$，$k_2 + b_2$，$k_3 + b_3$ 其中最大的值为 $k_3 + b_3 = 5$.
故答案为：5.

题目 13 (2023• 杏花岭区校级模拟) 我省积极探索保障粮食安全，做强精品粮油，始终坚持“藏粮于地、藏粮于技”战略，稳定粮食面积，提升基础保障能力，增强科技支撑能力，牢牢把饭碗端在自己手中，某农科所在相同条件下做某种作物种子发芽率的试验，结果如表所示：

种子个数 n	1000	1500	2500	4000	8000	15000	20000	30000
发芽种子个数 m	899	1365	2245	3644	7272	13680	18160	27300
发芽种子频率 $\frac{m}{n}$	0.899	0.910	0.898	0.911	0.909	0.912	0.908	0.910

则该作物种子发芽的概率约为 <u>0.91</u>．(结果保留两位小数)
解：观察表格发现，随着实验次数的增多，种子发芽的频率逐渐稳定在 0.91 附近，
所以估计该作物种子发芽的概率约为 0.91，
故答案为：0.91.

题目 14 (2023• 榆树市校级模拟) 在“探索函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数 a，b，c 与图象的关系“活动中，师给出了直角坐标系中的四个点 $A(0, 2)$，$B(1, 0)$，$C(3, 1)$，$D(2, 3)$．同学们探索了经过这四个点中的三个点的二次函数图象，发现运些图象对应的函数表达式各不相同，其中 a 的最大值为 <u>$\frac{5}{2}$</u>．
解：由图象知，A、B、D 组成的二次函数图象开口向上，$a > 0$；
A、B、C 组成的二次函数开口向上，$a > 0$；
B、C、D 三点组成的二次函数开口向下，$a < 0$；
A、D、C 三点组成的二次函数开口向下，$a < 0$；
即只需比较 A、B、D 组成的二次函数和 A、B、C 组成的二次函数即可.
设 A、B、C 组成的二次函数为 $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$，

把 $A(0,2)$, $B(1,0)$, $C(3,1)$ 代入上式得 $\begin{cases} c_1=2 \\ a_1+b_1+c_1=0 \\ 9a_1+3b_1+c_1=1 \end{cases}$,

解得 $a_1=\dfrac{6}{5}$;

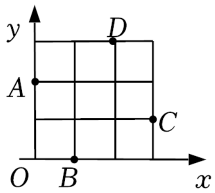
设 A、B、D 组成的二次函数为 $y=ax^2+bx+c$,

把 $A(0,2)$, $B(1,0)$, $D(2,3)$ 代入上式得 $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$,

解得 $a=\dfrac{5}{2}$,

即 a 最大的值为 $\dfrac{5}{2}$.

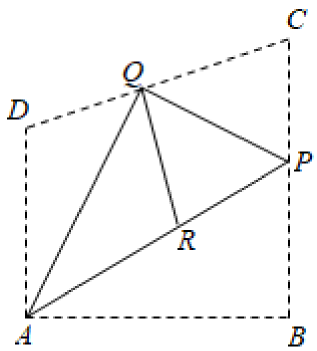
故答案为: $\dfrac{5}{2}$.



题目 15 (2020·安徽)在数学探究活动中,敏敏进行了如下操作:如图,将四边形纸片 $ABCD$ 沿过点 A 的直线折叠,使得点 B 落在 CD 上的点 Q 处.折痕为 AP;再将 $\triangle PCQ$,$\triangle ADQ$ 分别沿 PQ,AQ 折叠,此时点 C,D 落在 AP 上的同一点 R 处.请完成下列探究:

(1)$\angle PAQ$ 的大小为 __30__°;

(2)当四边形 $APCD$ 是平行四边形时,$\dfrac{AB}{QR}$ 的值为 __$\sqrt{3}$__.



解:(1)由折叠的性质可得:$\angle B=\angle AQP$,$\angle DAQ=\angle QAP=\angle PAB$,$\angle DQA=\angle AQR$,$\angle CQP=\angle PQR$,$\angle D=\angle ARQ$,$\angle C=\angle QRP$,

$\because \angle QRA+\angle QRP=180°$,

$\therefore \angle D+\angle C=180°$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle B+\angle DAB=180°$,

$\because \angle DQR+\angle CQR=180°$,

$\therefore \angle DQA+\angle CQP=90°$,

$\therefore \angle AQP=90°$,

$\therefore \angle B=\angle AQP=90°$,

$\therefore \angle DAB=90^\circ$，

$\therefore \angle DAQ=\angle QAP=\angle PAB=30^\circ$，

故答案为：30；

(2) 由折叠的性质可得：$AD=AR$，$CP=PR$，

$\because$ 四边形 $APCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD=PC$，

$\therefore AR=PR$，

又 $\because \angle AQP=90^\circ$，

$\therefore QR=\dfrac{1}{2}AP$，

$\because \angle PAB=30^\circ$，$\angle B=90^\circ$，

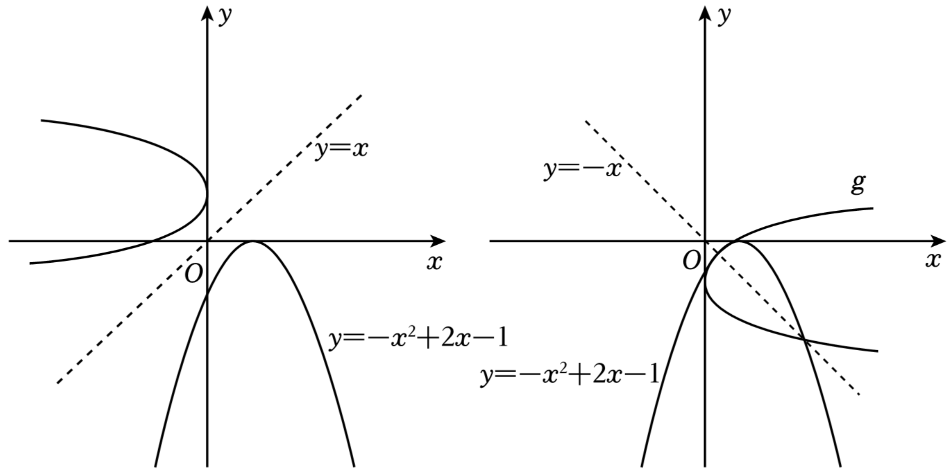
$\therefore AP=2PB$，$AB=\sqrt{3}PB$，

$\therefore PB=QR$，

$\therefore \dfrac{AB}{QR}=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$．

题目 16 (2023•临淄区一模) 华罗庚说过："复杂的问题要善于'退'，足够地'退'，'退'到最原始而不失重要性的地方，是学好数学的一个诀窍．"可见，复杂的问题有时要"退"到本质上去研究．如图，已知抛物线 $y=-x^2+2x-1$ 的图象与 f 的图象关于直线 $y=x$ 对称，我们把探索线的变化规律"退"到探索点的变化规律上去研究，可以得到图象 f 所对应的关于 x 与 y 的关系式为 $x=-y^2+2y-1$．若抛物线 $y=-x^2+2x-1$ 与 g 的图象关于 $y=-x$ 对称，则图象 g 所对应的关于 x 与 y 的关系式为 $\underline{\ x=y^2+2y+1\ }$．



解：设 (x, y) 为图象 g 上任意点，则关于 $y=-x$ 的对称点为 $(-y, -x)$，

把 $(-y, -x)$ 代入 $y=-x^2+2x-1$ 得：$-x=-y^2-2y-1$，

$\therefore x=y^2+2y+1$，

故答案为：$x=y^2+2y+1$．

题目 17 (2022•钢城区) 利用图形的分、和、移、补探索图形关系，是我国传统数学的一种重要方法．如图 1，BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线，将 $\triangle BCD$ 分割成两对全等的直角三角形和一个正方形，然后按图 2 重新摆放，观察两图，若 $a=4$，$b=2$，则矩形 $ABCD$ 的面积是 $\underline{\ 16\ }$．

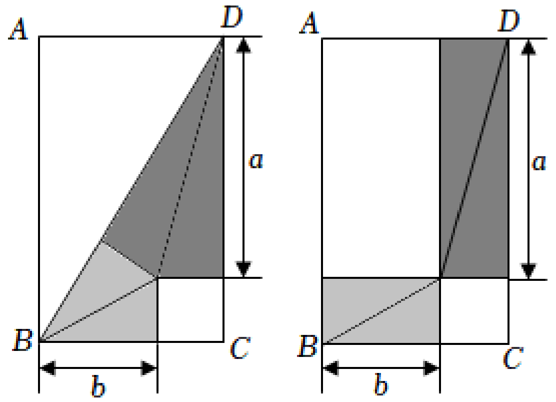


图1　　　　图2

解：设小正方形的边长为 x，

$\because a=4, b=2$，

$\therefore BD=2+4=6$，

在 $Rt\triangle BCD$ 中，$DC^2+BC^2=DB^2$，

即 $(4+x)^2+(x+2)^2=6^2$，

整理得，$x^2+6x-8=0$，

而长方形面积为 $=(x+4)(x+2)=x^2+6x+8=8+8=16$

$\therefore$ 该矩形的面积为 16，

解法二：由题意得第一个矩形的左上角的三角形面积 = 第二个矩形左上角的长方形的面积 $=4\times2=8$，所以原矩形面积为 16

故答案为：16.

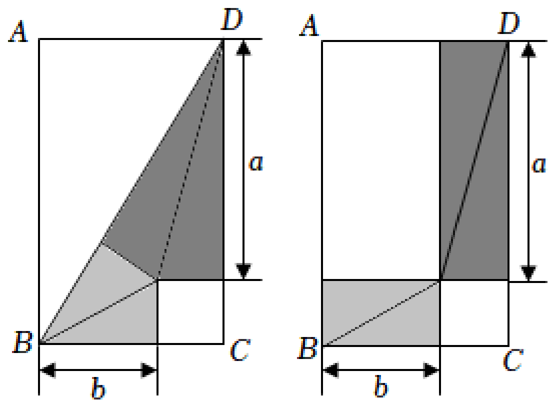
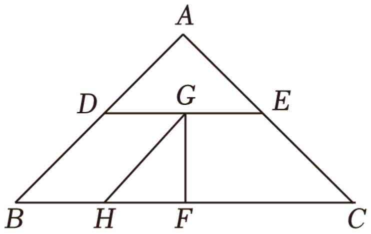
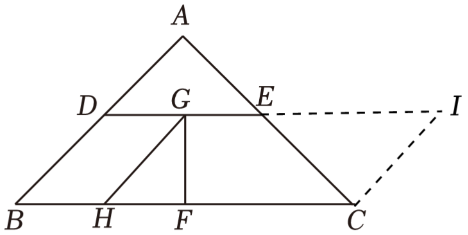


图1　　　　图2

题目 18 (2023·十堰) 在某次数学探究活动中，小明将一张斜边为 4 的等腰直角三角形 $ABC(\angle A=90°)$ 硬纸片剪切成如图所示的四块（其中 D, E, F 分别 AB, AC, BC 的中点，G, H 分别为 DE, BF 的中点），小明将这四块纸片重新组合拼成四边形（相互不重叠，不留空隙），则所能拼成的四边形中周长的最小值为 ___8___，最大值为 ___$8+2\sqrt{2}$___.



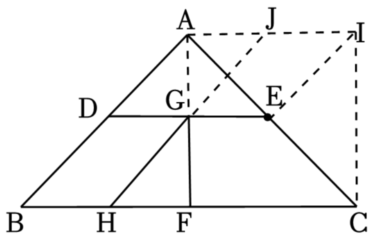
解：如图，



$BC=4$，$AC=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，$CI=BD=CE=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$DI=BC=4$，

$\therefore$ 四边形 $BCID$ 周长 $=4+4+2\sqrt{2}=8+2\sqrt{2}$；

如图，



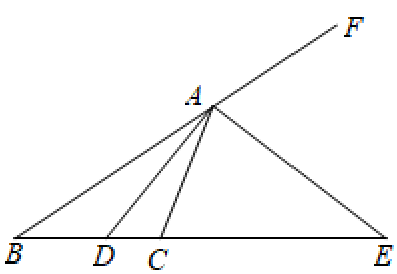
$AF=AI=IC=FC=2$，

$\therefore$ 四边形 $AFCI$ 周长为 $2\times4=8$；

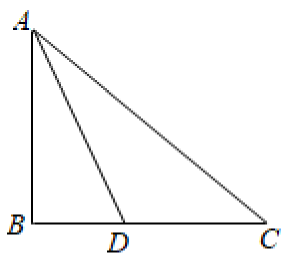
故答案为：8，$8+2\sqrt{2}$.

题目 19 (2021·大庆) 已知，如图①，若 AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的内角平分线，通过证明可得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，同理，若 AE 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的外角平分线，通过探究也有类似的性质．请你根据上述信息，求解如下问题：

如图②，在 $\triangle ABC$ 中，$BD=2$，$CD=3$，AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，则 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线长 l 的取值范围是 $\underline{\quad \frac{1}{2}<l<\frac{25}{2} \quad}$.



图①



图②

解：$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，

$\because BD=2$，$CD=3$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}$,

作$\angle BAC$的外角平分线AE,与CB的延长线交于点E,

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CE}$,

$\therefore \dfrac{BE}{5+BE}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore BE=10$,

$\therefore DE=12$,

$\because AD$是$\angle BAC$的角平分线,AE是$\angle BAC$外角平分线

$\therefore \angle EAD=90^\circ$,

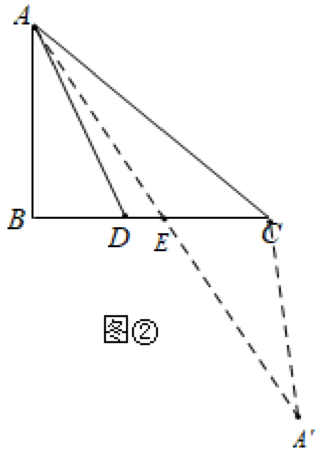
$\therefore$点A在以DE为直径的圆上运动,

取BC的中点为F,

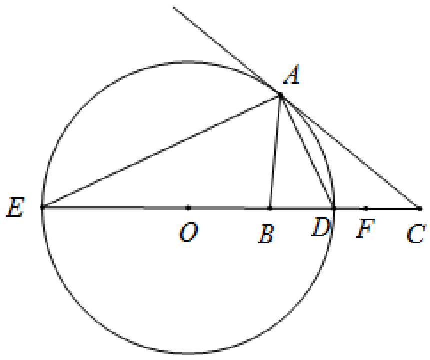
$\therefore DF<AF<EF$,

$\therefore \dfrac{1}{2}<l<\dfrac{25}{2}$,

故答案为:$\dfrac{1}{2}<l<\dfrac{25}{2}$.



图②



解法2:$\because AD$是$\triangle ABC$的内角平分线,

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$,

$\because BD=2$,$CD=3$,

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}$,

可设$AB=2k$,$AC=3k$,

在$\triangle ABC$中,$BC=5$,

$\therefore 5k>5$,$k<5$,

$\therefore 1<k<5$,

E是BC边的中点,延长AE至A',使得$AE=A'E$,连结$A'C$,

$\therefore A'C=AB$,

$\therefore k<2l<5k$,

$\therefore \dfrac{k}{2}<l<\dfrac{5}{2}k$,

$\therefore \dfrac{1}{2}<l<\dfrac{25}{2}$,

故答案为:$\dfrac{1}{2}<l<\dfrac{25}{2}$.

三．解答题

题目 20 (2023·广西)【探究与证明】折纸,操作简单,富有数学趣味,我们可以通过折纸开展数学探究,探索数学奥秘.

【动手操作】如图1,将矩形纸片$ABCD$对折,使AD与BC重合,展平纸片,得到折痕EF:折叠纸片,使点B落在EF上,并使折痕经过点A,得到折痕AM,点B,E的对应点分别为B',E'展平纸片,连接AB',BB',BE'. 请完成:

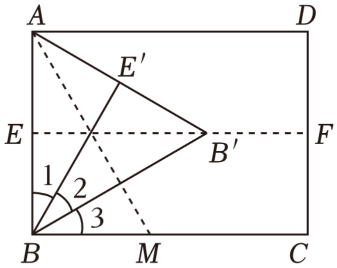
(1) 观察图1中$\angle 1$,$\angle 2$和$\angle 3$,试猜想这三个角的大小关系;

(2) 证明 (1) 中的猜想;

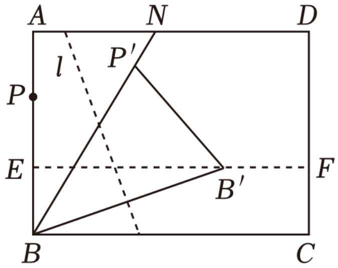
【类比操作】如图2,N为矩形纸片$ABCD$的边AD上的一点,连接BN,在AB上取一点P,折叠纸片,使

B，P 两点重合，展平纸片，得到折痕 EF；折叠纸片，使点 B，P 分别落在 EF，BN 上，得到折痕 l，点 B，P 的对应点分别为 B'，P'，展平纸片，连接 BB'，$P'B'$．请完成：

(3) 证明 BB' 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线.



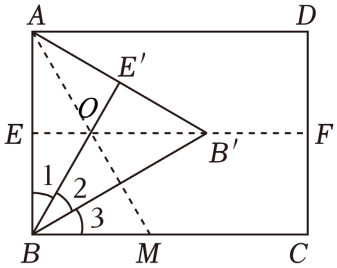
（图 1）



（图 2）

(1) 解：$\angle 1=\angle 2=\angle 3$；

(2) 证明：如图 1，



（图 1）

设 AM，EF 交于点 O，

由题意得：EF 是 AB 的垂直平分线，AM 是 BB' 的垂直平分线，$AB=AB'$，

$\therefore AB'=BB'$，$OA=OB=OB'$，

$\therefore AB'=BB'=AB$，O 为外心，

$\therefore \angle ABB'=60^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=30^\circ$，

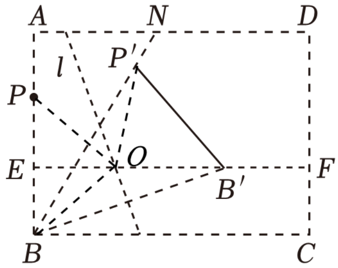
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle 3=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3$；

(3) 证明：如图 2，



（图 2）

同理 (2) 得：$OB=OB'=OP=OP'$，$BP'=PB'=BB'$，

$\therefore \angle P'BO=\angle B'BO$，$\angle OBB'=\angle BB'O$，

$\because EF\parallel BC$，

$\therefore \angle OB'B=\angle B'BC$，

$\therefore \angle P'BO=\angle B'BO=\angle B'BC$，

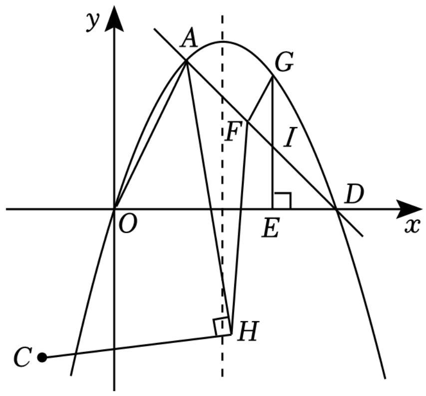
$\therefore BB'$ 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线.

题目 21 (2023• 绵阳) 如图，抛物线经过 $\triangle AOD$ 的三个顶点，其中 O 为原点，$A(2,4)$，$D(6,0)$，点 F 在线段 AD 上运动，点 G 在直线 AD 上方的抛物线上，$GF/\!/AO$，$GE\perp DO$ 于点 E，交 AD 于点 I，AH 平分 $\angle OAD$，$C(-2,-4)$，$AH\perp CH$ 于点 H，连接 FH.

(1) 求抛物线的解析式及 $\triangle AOD$ 的面积；

(2) 当点 F 运动至抛物线的对称轴上时，求 $\triangle AFH$ 的面积；

(3) 试探究 $\dfrac{FG}{GI}$ 的值是否为定值？如果为定值，求出该定值；不为定值，请说明理由.



解：(1) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx(a\neq 0)$.

将 $A(2,4)$，$D(6,0)$ 代入，得 $\begin{cases}4a+2b=4\\36a+6b=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=3\end{cases}$，

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$.

设点 O 到 AD 的距离为 d，点 A 的纵坐标为 y_A，

$\therefore S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot d=\dfrac{1}{2}OD\cdot y_A=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

(2) $\because y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{9}{2}$，

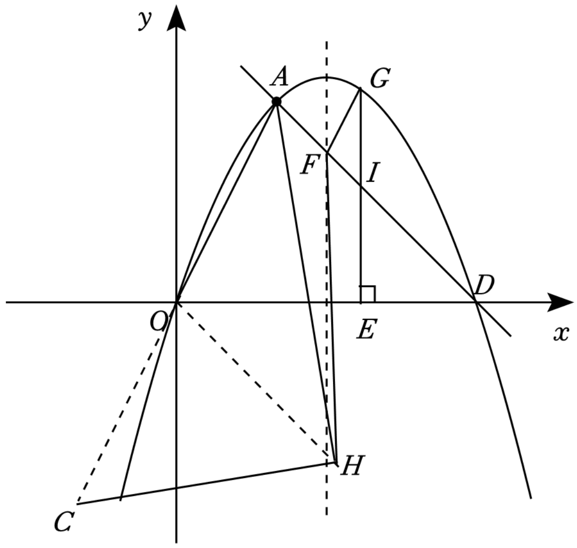
$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$.

当点 F 运动至对称轴上时，点 F 的横坐标为 3，

则 $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{3-2}{6-2}=\dfrac{1}{4}$，

即 $AF=\dfrac{1}{4}AD$.

如图，连接 OC、OH，



由点$C(-2,4)$,得点A与点C关于原点O对称,

$\therefore$点A、O、C三点共线,且O为AC的中点.

$\because AH\perp CH$,

$\therefore OH=\frac{1}{2}AC=OA$,

$\therefore \angle OAH=\angle AHO$.

$\because AH$平分$\angle CAD$,

$\therefore \angle OAH=\angle DAH$,

$\therefore \angle AHO=\angle DAH$,

$\therefore HO\parallel AD$,

$\therefore HO$与AD间的距离为d,

$\therefore$点H到AD的距离为d.

$\because S_{\triangle AFH}=\frac{1}{2}\times AF\times d$, $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times AD\times d=12$,

$\therefore S_{\triangle AFH}=\frac{1}{2}\times AF\times d=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}AD\times d=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2}\times AD\times d)=\frac{1}{4}\times 12=3$.

$\therefore$当点F运动至抛物线的对称轴上时,$\triangle AFH$的面积为3;

(3)如图,过点A作$AL\perp OD$于点L,过点F作$FK\perp GE$于点K.