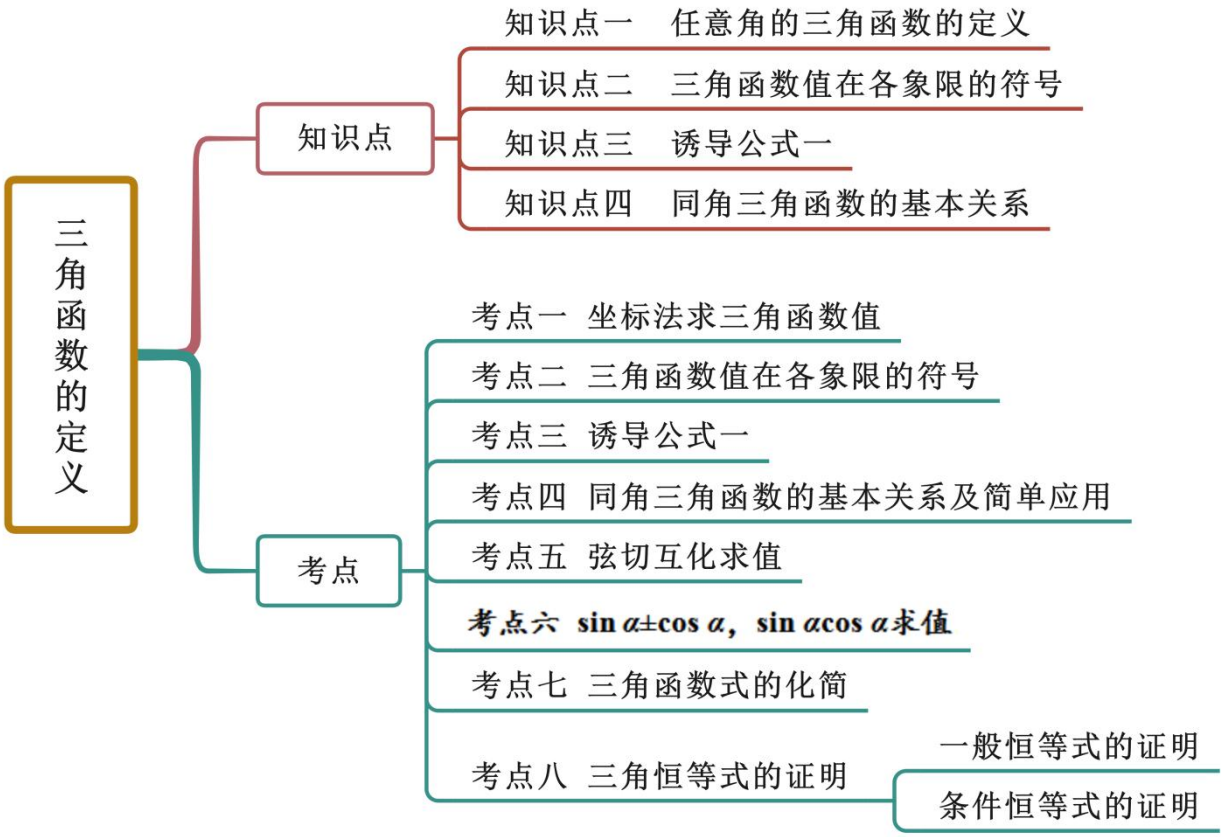
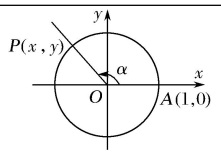
5.2 三角函数的定义（精讲）

本节概要



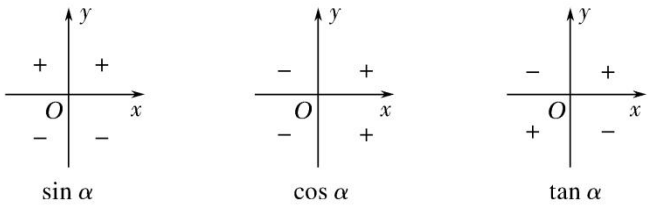
考点展现

一．任意角的三角函数的定义

前提		如图，设α是一个任意角，它的终边与单位圆交于点$P(x，y)$	
定义	正弦	y叫做α的正弦函数，记作$\sin\alpha$，即$\sin\alpha=y$	
	余弦	x叫做α的余弦函数，记作$\cos\alpha$，即$\cos\alpha=x$	
	正切	$\frac{y}{x}$叫做α的正切函数，记作$\tan\alpha$，即$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$	
	三角函数	正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上的点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，将它们统称为三角函数	

二．三角函数值在各象限的符号

1.口诀概括为：一全正、二正弦、三正切、四余弦(如图).



2.根据三角函数的定义可知：

(1)正弦函数值的符号取决于纵坐标 y 的符号；

(2)余弦函数值的符号取决于横坐标 x 的符号；

(3)正切函数值的符号是由 x，y 的符号共同决定的，即 x，y 同号为正，异号为负.

三. 诱导公式一

(1)语言表示：终边相同的角的同一三角函数的值相等.

(2)式子表示：$\begin{cases}\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\sin\alpha,\\ \cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\cos\alpha,\\ \tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\tan\alpha,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{Z}$.

四.同角三角函数的基本关系

描述方式 / 基本关系	基本关系式	语言描述
平方关系	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	同一个角α的正弦、余弦的平方和等于 1
商数关系	$\operatorname{Tan}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)$	同一个角α的正弦、余弦的商等于角α的正切

2.同角三角函数基本关系式的变形

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,\\ \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},\\ \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},\\ (\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha.\end{cases}$

(2)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha,\\ \cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.\end{cases}$

思路点拨

一．三角函数的定义

(1)若已知角，则只需确定出该角的终边与单位圆的交点坐标，即可求出各三角函数值．

(2)若已知角α终边上一点 $P(x，y)(x\neq0)$是单位圆上一点，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(3)若已知角α终边上一点 $P(x，y)$不是单位圆上一点，则先求 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，再求 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$.

(4)若已知角α终边上的点的坐标含参数，则需进行分类讨论．

二．三角函数式的化简

(1)化切为弦，即把正切函数都化为正、余弦函数，从而减少函数名称，达到化繁为简的目的.

(2)对于含有根号的，常把根号里面的部分化成完全平方式，然后去根号达到化简的目的.

(3)对于化简含高次的三角函数式，往往借助于因式分解，或构造 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，以降低函数次数，达到化简的目的.

三．已知 tan α的值，求关于 sin α，cos α齐次式的值的方法

(1)对只含有 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$的齐次式，可根据同角三角函数的商数关系，通过除以某一齐次项，转化为只含有正切的式子，即化弦为切，整体代入.

(2)对于形如$\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$或$\frac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$的分式，分子、分母同时除以 $\cos\alpha$，$\cos^2\alpha$，将正、余弦转化为正切，从而求值.

(3)对于形如 $a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$的式子，将其看成分母为 1 的分式，再将分母 1 变形为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，转化为形如$\frac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$的式子求值.

四．已知 sin $\alpha\pm$cos α，sin αcos α求值问题

一般利用三角恒等式，采用整体代入的方法求解.涉及的三角恒等式有：

(1)$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$；

(2)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$；

(3)$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$；

(4)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$.

上述三角恒等式告诉我们，已知 $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta-\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$中的任何一个，则另两个式子的值均可求出.

五．证明三角恒等式常用的方法

(1)从左向右推导或从右向左推导，一般由繁到简；

(2)左右归一法，即证明左右两边都等于同一个式子；

(3)化异为同法，即针对题设与结论间的差异，有针对地变形，以消除差异；

(4)变更命题法，如要证明$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，可证 $ad=bc$，或证$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$等；

(5)比较法，即设法证明“左边－右边＝0”或“$\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=1$”.

六．含有条件的三角恒等式证明的常用方法

(1)直推法：从条件直推到结论；

(2)代入法：将条件代入到结论中，转化为三角恒等式的证明；

(3)换元法：把条件和要证明的式子的三角函数问题转换为代数问题，利用代数即可完成证明.



考点一 坐标法求三角函数值

【例 1-1】（2023 春·四川眉山·高一校考期中）已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴非负半轴重合，终边经过点$P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则$\sin\alpha=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】因为$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，由三角函数的定义可知，点$P$为角$\alpha$的终边与单位圆的交点，所以：$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选：B.

【例 1-2】（2022 秋·内蒙古呼伦贝尔·高一海拉尔第一中学校考期末）已知角θ的顶点为原点，起始边为x轴非负半轴，若点$P(4,y)$是角θ终边上一点，且$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则$y=$（　）

A．8　　B．–8　　C．6　　D．–6

【答案】B

【解析】因为点$P(4,y)$是角θ终边上一点，且$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由三角函数的定义可得$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{y^2+4^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则$y<0$，解得$y=-8$.

故选：B.

【例 1-3】（2023 秋·高一课时练习）已知角α的终边上一点的坐标为$\left(\sin\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3}\right)$，则角$\alpha$的最小正值为（　）

A．$\frac{5\pi}{6}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$

C．$-\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{11\pi}{6}$

【答案】D

【解析】因为角α终边上一点的坐标为$\left(\sin\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3}\right)$，所以有$\tan\alpha=\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}<0,\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，所以角$\alpha$是第四象限角，所以角$\alpha$的最小正值为$2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$，

故选：D

【一隅三反】

1．（2023 春·河北张家口·高一统考期中）若$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，且角α的终边经过点$M\left(2,y\right)$，则$y=$（　）

A．$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B．$\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】由已知可得，$r=|OM|=\sqrt{4+y^2}$，

根据三角函数的定义可得$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}=-\frac{1}{2}<0$，所以，$y<0$，且$\frac{y^2}{4+y^2}=\frac{1}{4}$，

所以，$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.故选：D.

2．（2023 秋·云南大理 ）已知角α的终边落在直线$y=2x$上，则$\sin\alpha$的值为（　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【解析】设直线$y=2x$上任意一点P的坐标为$(m,2m)$（$m\neq0$），

则$OP=\sqrt{m^2+\left(2m\right)^2}=\sqrt{5}|m|$（$O$为坐标原点），

根据正弦函数的定义得：$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2m}{OP}=\frac{2m}{\sqrt{5}|m|}$，

$m>0$时，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；　$m<0$时，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以选项 D 正确，选项 A，B，C 错误，

故选：D.

3．（2023 春·四川眉山·高一校考期中）（多选）已知角α的终边经过点$P(-4m,3m)(m\neq0)$，则$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值可能为（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$-\frac{2}{5}$

【答案】CD

【解析】已知角α的终边经过点$P(-4m,3m)(m\neq 0)$

所以$\sin\alpha=\frac{3m}{\sqrt{(-4m)^2+(3m)^2}}=\frac{3m}{|5m|}$，$\cos\alpha=\frac{-4m}{\sqrt{(-4m)^2+(3m)^2}}=\frac{-4m}{|5m|}$

则当$m>0$时，$\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，此时$2\sin\alpha+\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{5}$；

当$m<0$时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5}$，此时$2\sin\alpha+\cos\alpha=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}$；

所以$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值可能为$\frac{2}{5}$或$-\frac{2}{5}$.

故选：CD.

4（2023春·广西钦州·高一统考期末）（多选）已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边上存两点$A(-1,a)$，$B(b,1)$且$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则（　）

A．$a=-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$b=-2\sqrt{2}$

C．$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】BCD

【解析】因为角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边上存两点$A(-1,a)$，$B(b,1)$且$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

所以$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{1}{3}$，

所以$a^2=\frac{1}{8},b^2=8$，

由$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{3}$，可知$a>0$，所以角$\alpha$为第二象限的角，所以$b<0$，

所以$a=\frac{\sqrt{2}}{4},b=-2\sqrt{2}$，所以A错误，B正确，

所以$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{1}{b}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以CD正确，

故选：BCD

考点二 三角函数值在各象限的符号

【例 2-1】（2023·全国·高一专题练习）若 $\sin\alpha<0$ 且 $\tan\alpha>0$，则 α 的终边所在象限为（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】C

【解析】因为 $\sin\alpha<0$，则 α 的终边在第三、四象限或 y 轴负半轴上，

因为 $\tan\alpha>0$，则 α 的终边在第一、三象限，

因此，α 的终边所在象限为第三象限.

故选：C.

【例 2-2】（2023 秋·高一课时练习）当 x 为第二象限角时，$\dfrac{\sin x}{|\sin x|}-\dfrac{|\cos x|}{\cos x}=$（　）

A．1　　B．0

C．2　　D．－2

【答案】C

【解析】因为 x 是第二象限角，所以 $\dfrac{\sin x}{|\sin x|}-\dfrac{|\cos x|}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{-\cos x}=1+1=2$，

故选：C

【例 2-3】（2023 春·新疆·高一八一中学校考期中）若 $|\cos\theta|=\cos\theta$，$|\tan\theta|=-\tan\theta$，则 $\dfrac{\theta}{2}$ 的终边在（　）

A．第一、三象限

B．第二、四象限

C．第一、三象限或在 x 轴的非负半轴上

D．第二、四象限或在 x 轴上

【答案】D

【解析】因为 $|\cos\theta|=\cos\theta$，可得 $\cos\theta\geq0$，则 θ 是第一、四象限或 x 轴正半轴，

又因为 $|\tan\theta|=-\tan\theta$，可得 $\tan\theta\leq0$，则 θ 是二、四象限或 x 轴，

所以 θ 是第四象限或 x 轴正半轴，

所以 $k\cdot360°+270°<\theta\leq k\cdot360°+360°,k\in Z$，

可得 $k\cdot180°+135°<\dfrac{\theta}{2}\leq k\cdot180°+180°,k\in Z$，

令 $k=2n,n\in Z$，可得 $n\cdot360°+135°<\dfrac{\theta}{2}\leq n\cdot360°+180°,n\in Z$，

则 $\dfrac{\theta}{2}$ 在二象限或 x 轴负半轴；

令$k=2n+1,n\in Z$，可得$n\cdot 360°+315°<\frac{\theta}{2}\le n\cdot 360°+360°,n\in Z$，

则$\frac{\theta}{2}$在四象限或x轴正半轴，

综上可得，$\frac{\theta}{2}$的终边在第二、四象限或在x轴上.

故选：D.

【一隅三反】

1.（2022秋·黑龙江齐齐哈尔·高一统考期末）“$\cos\theta<0$且$\tan\theta>0$”是“θ为第三象限角”的（　）

A．充要条件　　B．必要不充分条件

C．充分不必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】充分性：由$\cos\theta<0$可知$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

由$\tan\theta>0$可知$2k\pi<\theta<\frac{\pi}{2}+2k\pi$或$\pi+2k\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

综上，$\pi+2k\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\theta$为第三象限角.

必要性：若θ为第三象限角，则$\cos\theta<0$且$\tan\theta>0$.

所以“$\cos\theta<0$且$\tan\theta>0$”是“θ为第三象限角”的充要条件.

故选：A

2.（2023春·贵州遵义·高一统考期中）若$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}>0$，$\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}>0$，则$\alpha$是（　）

A．第一象限角　　B．第二象限角

C．第三象限角　　D．第四象限角

【答案】A

【解析】由$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\cos\alpha>0$，$\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}>0$，

得$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$，

所以α是第一象限角.

故选：A.

3.（2023秋·广东·高一统考期末）已知θ为第二或第三象限角，则（　）

A．$\sin\theta\tan\theta<0$　　B．$\cos\theta\tan\theta<0$

C．$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$　　D．$\sin\theta\cos\theta>0$

【答案】A

【解析】若角θ为第二象限角，则$\sin\theta>0,\cos\theta<0,\tan\theta<0$，

此时$\sin\theta\tan\theta<0,\cos\theta\tan\theta>0,\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}<0,\sin\theta\cos\theta<0$；

若角θ为第三象限角，则$\sin\theta<0,\cos\theta<0,\tan\theta>0$，

此时$\sin\theta\tan\theta<0,\cos\theta\tan\theta<0,\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}<0,\sin\theta\cos\theta>0$；

所以当θ为第二或第三象限角时，$\sin\theta\tan\theta<0,\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$.

故选：A.

考点三 诱导公式一

【例 3-1】（2023 秋·高一课时练习）$\sin\left(-1380^\circ\right)$的值为（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$

C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】$\sin\left(-1380^\circ\right)=\sin\left(-4\times360^\circ+60^\circ\right)$
$=\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故选：D.

【例 3-2】（2023 春·四川宜宾·高一校考阶段练习）$\sin\dfrac{2023\pi}{4}=$（　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【解析】$\sin\dfrac{2023\pi}{4}=\sin\left(506\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.

【一隅三反】

1．（2023 春·天津南开·高一学业考试）$\cos540°$的值为（　）.

A．1　　B．0　　C．-1　　D．不存在

【答案】C

【解析】$\cos540°=\cos\left(540°-360°\right)=\cos180°=-1$.故选：C

2．（2023 春·广东河源·高一校考阶段练习）$\cos\left(-1860°\right)=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】$\cos\left(-1860°\right)=\cos(-10\times180°-60°)=\cos(-60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

故选：C

3．（2023 秋·山东菏泽·高一山东省郓城第一中学校考期末）$\cos 390^{\circ}=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】$\cos 390^{\circ}=\cos\left(360^{\circ}+30^{\circ}\right)=\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

4．（2023 秋 单元测试）代数式 $\sin(-330°)\cos 390°$ 的值为（　　）

A．$-\frac{3}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】B

【解析】$\sin(-330°)\cos\ 390°=\sin(-360°+30°)\cos(360°+30°)=\sin 30°\cos 30°=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$．故选：B.

考点四 同角三角函数公式的简单应用

【例 4-1】（2023·全国·高一课堂例题）已知α是第二象限角，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，则$\cos\alpha=$（　　）

A．$-\frac{12}{13}$　　B．$-\frac{5}{13}$　　C．$\frac{5}{13}$　　D．$\frac{2}{13}$

【答案】A

【解析】 因为α是第二象限角，所以$\cos\alpha<0$，又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$．故选：A

【例 4-2】（2023 春·云南曲靖·高一校考阶段练习）若α是第四象限的角，且$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，则$\cos\alpha=$_____.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【解析】因为α是第四象限的角，且$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，所以$\alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

所以$\cos\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\frac{1}{2}$.故答案为：$\frac{1}{2}$

【一隅三反】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/708071125000006132