专题 7.2　　相交线与平行线十九大必考点

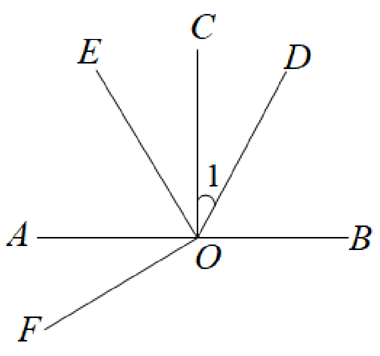
【北师大版】

题型先知

举一反三

【考点 1 余角和补角的计算】

【例 1】（2022·河南平顶山·七年级期中）如图，点 O 在直线 AB 上，$CO\perp AB$，$\angle 1=28^{\circ}$，OE 是$\angle AOD$的平分线，$OF\perp OE$．



(1)求$\angle AOE$的度数.

(2)找出图中与$\angle BOF$互补的角，并求出$\angle BOF$补角的度数.

【答案】(1)59°

(2)$\angle AOF$和$\angle COE$，31°

【分析】（1）利用余角互余关系求得$\angle BOD$，利用邻角补角关系求得$\angle AOD$，进而人求得$\angle AOE$;

（2）利用等角的余角相等，求得与$\angle AOF$相等的角，即求得$\angle BOF$的补角.

（1）

∵ $CO\perp AB$,

∴ $\angle COA=90°$,

∴ $\angle AOD=\angle COA+\angle 1\quad=90°+28°\quad=118°$.

∵OE 平分$\angle AOD$,

∴ $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\times 118°=59°$.

（2）

与$\angle BOF$互补的角是$\angle AOF$和$\angle COE$,

因为$OF\perp OE$,

∴ $\angle EOF=90°$,

∴ $\angle AOF=\angle EOF=\angle AOE=90°-59°=31°$,

∴ $\angle BOF$补角的度数是 31° .

【点睛】本题考查余角、邻补角的定义，利用余角、邻补角的关系是解题关键.

【变式 1-1】（2022·河南·郑州外国语学校经开校区七年级阶段练习）一个角的余角比它的补角的$\frac{1}{5}$还少 2°，则这个角的度数是________.

【答案】70°

【分析】设这个角的度数为 x,由题意列出方程，解方程即可.

【详解】解：设这个角的度数为 x,

根据题意得：$90°-x=\frac{1}{5}$（$180°-x$）-2°，

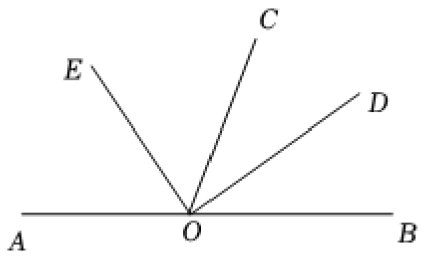
解得：$x=70°$.

所以这个角的度数为 70°.

故答案为：70°

【点睛】本题考查了余角和补角以及一元一次方程的应用；由题意列出方程是解题的关键.

【变式 1-2】（2022·新疆·乌鲁木齐市第 136 中学七年级期末）如图，O 是直线 AB 上一点，OC 为任意一条射线，OD 平分$\angle BOC$，OE 平分$\angle AOC$.



(1)图中$\angle AOD$ 的补角是________和________；$\angle BOD$ 的余角是________和________.

(2)已知$\angle COD=40°$，求$\angle COE$ 的度数.

【答案】(1)$\angle BOD$，$\angle COD$；$\angle COE$，$\angle AOE$

(2)50°

【分析】（1）根据互为补角的和等于180°找出即可；

（2）根据角平分线的定义表示出$\angle BOC$与$\angle AOC$，再根据角平分线的定义即可得解.

（1）

解： $\because OD$平分$\angle BOC$，OE平分$\angle AOC$，

$\therefore \angle BOD=\angle COD$，$\angle AOE=\angle COE$，

$\therefore \angle EOC+\angle COD=\angle AOE+\angle BOD=90°$，

$\therefore \angle BOD+\angle EOC=90°$，

$\because \angle AOD+\angle BOD=180°$，

$\therefore \angle AOD+\angle COD=180°$，

$\therefore \angle AOD$的补角是$\angle BOD$和$\angle COD$；$\angle BOD$的余角是$\angle COE$和$\angle AOE$.

故答案为：$\angle BOD$，$\angle COD$；$\angle COE$，$\angle AOE$.

（2）

解：$\because OD$平分$\angle BOC$，$\angle COD=40°$，

$\therefore \angle BOC=2\angle COD=80°$，

由题意可知，$\angle AOB$是平角，$\angle AOB=\angle AOC+\angle BOC$，

$\therefore \angle AOC=\angle AOB-\angle BOC=180°-80°=100°$，

$\because OE$平分$\angle AOC$，

$\therefore \angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=50°$.

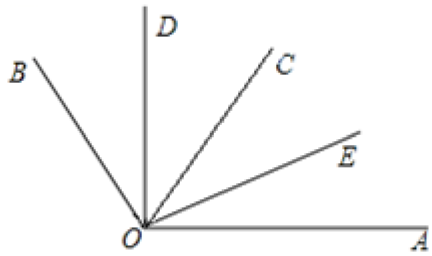
【点睛】本题考查了余角和补角的概念，角度的计算，以及角平分线的定义，准确识图并熟记概念是解题的关键.

【变式 1-3】（2022·全国·七年级）已知：如图所示，OD 平分$\angle BOC$，OE 平分$\angle AOC$．若$\angle BOC$=70°，$\angle AOC$=50°．

（1）求出$\angle AOB$ 及其补角的度数；

（2）求出$\angle DOC$ 和$\angle AOE$ 的度数，并判断$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 是否互补，并说明理由；

（3）若$\angle BOC=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，则$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 是否互补，并说明理由.



【答案】（1）$\angle AOB$=120°，其补角为 60°；（2）$\angle DOE$=60°，$\angle AOB$=120°，$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 互补；（3）$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 不互补，理由见解析.

【分析】（1）由∠AOB=∠BOC+∠AOC，以及补角的定义，即可得到答案；

（2）根据角平分线的定义，即可求出∠DOE 和∠AOE 的度数，然后∠DOE+∠AOB=180°，即可得到答案；

（3）分别求出∠DOE 与∠AOB 的度数，然后进行判断，即可得到答案.

【详解】解：（1）$\angle AOB=\angle BOC+\angle AOC$=70°+50°=120°，

其补角为：180°−$\angle AOB$=180°−120°=60°.

（2）$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 互补；

理由如下：$\because OD$ 平分$\angle BOC$，OE 平分$\angle AOC$，

$\therefore \angle DOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times70°=35°$，$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times50°=25°$.

$\therefore \angle DOE=\angle DOC+\angle COE=35°+25°=60°$.

$\therefore \angle DOE+\angle AOB=60°+120°=180°$，

$\therefore \angle DOE$ 与$\angle AOB$ 互补.

（3）$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 不互补，

理由如下：∵OD 平分$\angle BOC$，OE 平分$\angle AOC$，

∴$\angle DOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\beta$.

∴$\angle DOE=\angle DOC+\angle COE=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$．

∴$\angle DOE+\angle AOB=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$，

∴$\angle DOE$ 与$\angle AOB$ 不互补.

【点睛】本题考查了角平分线的定义，余角的定义，补角的定义，以及角的和差计算，解题的关键是熟练掌握几何图形中的角度的计算，熟练掌握所学的知识进行计算.

【考点 2 同（等）角的余角和补角相等的运用】

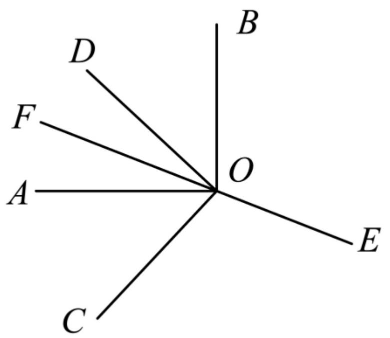
【例 2】（2022·全国·七年级单元测试）如图，在同一平面内，$\angle AOB=\angle COD=90°$，$\angle AOF=\angle DOF$，点$E$为$OF$反向延长线上一点（图中所有角均指小于$180°$的角）．下列结论：

①$\angle COE=\angle BOE$；

②$\angle AOD+\angle BOC=180°$；

③$\angle BOC-\angle AOD=90°$；

④$\angle COE+\angle BOF=180°$．其中正确结论的个数有（　　）



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【答案】C

【分析】由$\angle AOB=\angle COD=90°$，根据等角的余角相等得到$\angle AOC=\angle BOD$，结合$\angle AOF=\angle DOF$即可判断①正确；由$\angle AOD+\angle BOC=\angle AOD+\angle AOC+\angle AOD+\angle BOD$，结合$\angle AOB=\angle COD=90°$即可判断②正确；由$\angle BOC-\angle AOD=\angle AOC+90°-\angle AOD$，而不能判断$\angle AOD=\angle AOC$，即可判断③不正确；由 E、O、F 三点共线得$\angle BOE+\angle BOF=180°$，而$\angle COE=\angle BOE$，从而可判断④正确.

【详解】解：∵$\angle AOB=\angle COD=90°$，

∴$\angle AOC=\angle BOD$，

而$\angle AOF=\angle DOF$，

$\therefore 180°-\angle AOC-\angle AOF=180°-\angle BOD-\angle DOF$，

即$\angle COE=\angle BOE$，所以①正确；

$\angle AOD+\angle BOC=\angle AOD+\angle AOC+\angle AOD+\angle BOD=\angle COD+\angle AOB=180°$，

所以②正确；

$\angle COB-\angle AOD=\angle AOC+90°-\angle AOD$，

而$\angle AOC \neq \angle AOD$，所以③不正确；

$\because E$、O、F三点共线，

$\therefore \angle BOE+\angle BOF=180°$，

$\because \angle COE=\angle BOE$，

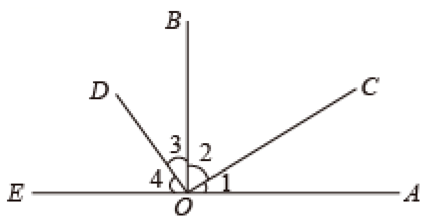
$\therefore \angle COE+\angle BOF=180°$，所以④正确.

所以，正确的结论有 3 个.

故选：C.

【点睛】题考查了余角和补角、角度的计算、余角的性质以及角平分线的定义等知识，准确识图是解题的关键.

【变式 2-1】（2022·全国·七年级专题练习）如图，AOE是一条直线，$OB \perp AE, OC \perp OD$，图中互补的角有（　）



A．4 对　　B．5 对　　C．6 对　　D．7 对

【答案】D

【分析】根据已知条件得到$\angle AOB=\angle COD=\angle BOE=90°$，即可得到三个直角两两互补，进而得到$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，根据补角的定义和等量代换即可得到四对互补的角，问题得解.

【详解】解：$\because OB \perp AE, OC \perp OD$，

$\therefore \angle AOB=\angle COD=\angle BOE=90°$，

$\therefore \angle AOB+\angle COD=180°$，$\angle AOB+\angle BOE=180°$，$\angle COD+\angle BOE=180°$，

$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 3+\angle 4=90°$，$\angle 2+\angle 3=90°$，

$\therefore \angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，

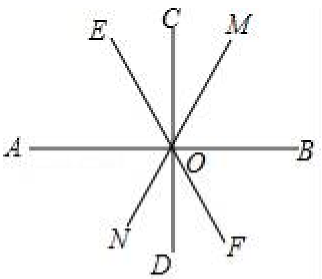
∴∠1+∠COE=180°，∠3+∠COE=180°，∠4+∠AOD=180°，∠2+∠AOD=180°，

∴图中互补的角有 7 对．

故选：D．

【点睛】本题考查了补角的定义，余角的定义，同角（等角）的余角相等等知识，熟知相关知识是解题关键，注意解题时不要忘记所有直角都互补．

【变式 2-2】（2022·河北秦皇岛·七年级期中）如图，已知直线 AB、CD、EF、MN 相交于点 O，CD⊥AB，OC 平分∠EOM，图中∠EOC 的余角的个数是（　　）



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】D

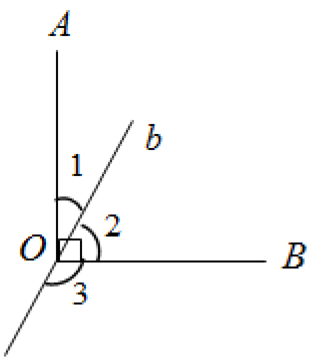
【分析】根据互余的概念和对顶角相等解答即可．

【详解】∠EOC 的余角有∠AOE，∠BOF，∠BOM，∠AON．

故选 D．

【点睛】本题考查了垂线，对顶角的性质，关键是掌握互余的概念．

【变式 2-3】（2022·福建·厦门市松柏中学七年级期末）如图，$\angle AOB=90°$，直线b经过点O．在下面的五个式子中：①$180°-\angle 2$；②$\angle 3$；③$2\angle 1+\angle 2$；④$2\angle 3-2\angle 1-\angle 2$；⑤$180°-\angle 1$，等于$\angle 2$的补角的式子的个数是（　）



A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】C

【分析】根据已知条件得到∠1+∠2=90°，∠2+∠3=180°，利用补角定义依次判断即可.

【详解】解：$\because \angle AOB=90°$，

∴∠1+∠2=90°，

∵直线b经过点O，

∴∠2+∠3=180°，

①$180°-\angle 2$；②∠3是等于∠2的补角的式子，

∵2（∠1+∠2）=180°，

∴∠2=180°-（$2\angle 1+\angle 2$），故③符合题意；

∵∠3=180°-∠2，∠1=90°-∠2，

∴2∠3−2∠1−∠2=2（180°-∠2）-2（90°-∠2）-∠2=180°−∠2，故④符合题意；

∵$180°-\angle 1+\angle 2\neq 180°$，

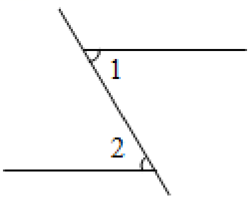
∴⑤不符合题意，

故选：C.

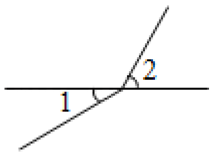
【点睛】此题考查了补角的定义：相加得 180 度的两个角叫互为补角，根据图形对角度进行和差计算是解题的关键.

【考点 3 对顶角的识别及其性质】

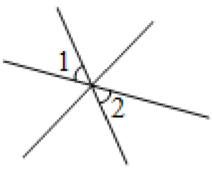
【例 3】（2022·内蒙古呼伦贝尔·七年级期中）下列各图中，∠1 与∠2 是对顶角的是（　　）



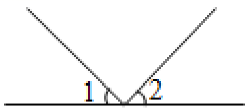
A.



B.



C.



D.

【答案】C

【分析】根据对顶角的概念逐一判断即可.

【详解】解：A、∠1 与∠2 的顶点不相同，故不是对顶角，此选项不符合题意；

B、∠1 与∠2 的一边不是反向延长线，故不是对顶角，此选项不符合题意；

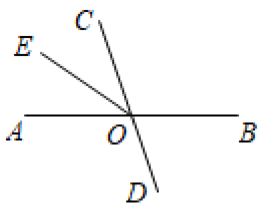
C、∠1 与∠2 是对顶角，故此选项符合题意；

D、∠1 与∠2 的一边不是反向延长线，故不是对顶角，此选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查的是对顶角的判断，有一个公共顶点，并且一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为对顶角,解题关键是熟练掌握定义，正确判断.

【变式 3-1】（2022·广东·揭西县阳夏华侨中学七年级期末）已知：如图，直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分∠AOC，∠EOC=$\frac{2}{5}$∠COB.



(1)图中的对顶角有_______对，它们是_______.

(2)图中互补的角有_______对，它们是_______.

(3)求∠EOD 的度数.

【答案】(1)两；∠AOC 和∠BOD，∠BOC 和∠AOD

(2)八；∠AOC 和∠BOC，∠AOC 和∠AOD，∠BOD 和∠AOD，∠BOD 和∠BOC，∠AOE 和∠BOE，∠EOC 和∠EOD，∠EOC 和∠EOB，∠AOE 和∠EOD

(3)140°

【分析】（1）根据对顶角的定义，判断即可；

（2）根据补角的定义进行判断即可；

（3）根据 OE 平分∠AOC，得出∠EOC=∠AOE，设∠BOC=x，则∠EOC=∠AOE=$\frac{2}{5}x$，列出关于 x 的方程，解方程即可得出∠BOC 的度数，再求出∠DOE 的度数，即可得出结果.

（1）

解：图中的对顶角有：∠AOC 和∠BOD，∠BOC 和∠AOD.

故答案为：两；∠AOC 和∠BOD，∠BOC 和∠AOD.

（2）

图中互补的角有：∠AOC 和∠BOC，∠AOC 和∠AOD，∠BOD 和∠AOD，∠BOD 和∠BOC，∠AOE 和∠BOE，∠EOC 和∠EOD，

∵OE 平分∠AOC，

∴∠AOE=∠COE，

∵∠AOE+∠BOE=180°，

∴∠COE+∠BOE=180°，

∴∠EOC 和∠EOB 互补，

∵∠COE+∠EOD=180°，

∴∠AOE+∠EOD=180°，

∴∠AOE 和∠EOD 互补．

故答案为：八；∠AOC 和∠BOC，∠AOC 和∠AOD，∠BOD 和∠AOD，∠BOD 和∠BOC，∠AOE 和∠BOE，∠EOC 和∠EOD，∠EOC 和∠EOB，∠AOE 和∠EOD．

（3）

∵OE 平分∠AOC，

∴∠EOC＝∠AOE，

设∠BOC＝x，则∠EOC＝∠AOE＝$\frac{2}{5}x$，由平角定义得，

$\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}x+x$＝180°，

解得：x＝100°

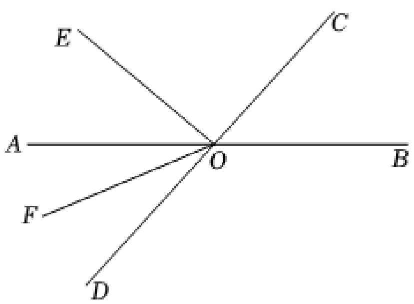
∴∠EOC＝∠AOE＝$\frac{1}{2}$（180°－100°）＝40°，

∴∠DOE＝100°+40°＝140°，

答：∠EOD 的度数为 140°．

【点睛】本题主要考查了对顶角的定义、补角的定义、角平分线的定义，熟练掌握相关定义，根据题意求出∠BOC 的度数，是解题的关键．

【变式 3-2】（2021·山东·济南市钢城区实验学校期末）如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE\perp CD$，OF 平分$\angle AOD$，若$\angle AOD=50°$.求$\angle EOF$的度数.



【答案】65°

【分析】根据角平分线的定义可得$\angle FOD=\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOD=25°$，根据垂线的性质可得$\angle EOD=90°$，再进行解答即可．

【详解】解：$\because OF$ 平分$\angle AOD$，$\angle AOD=50°$，

$\therefore \angle FOD=\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOD=25°$，

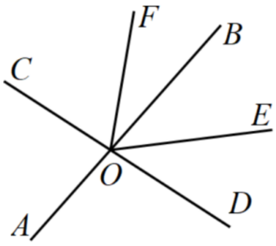
$\because OE\perp CD$，

$\therefore \angle EOD=90°$，

$\therefore \angle EOF=\angle EOD-\angle FOD=90°-25°=65°$．

【点睛】本题主要考查了垂线的性质和角平分线的定义，熟练掌握相关的性质是解答本题的关键．

【变式 3-3】（2022·辽宁·鞍山市第二中学七年级阶段练习）直线AB，CD相交于点O，OE平分$\angle BOD$，OF平分$\angle COE$．



(1)若$\angle AOC=76°$，$\angle BOF=$______度．

(2)若$\angle BOF=36°$，$\angle AOC$的度数是多少？

【答案】(1)33

(2)$\angle AOC$ 的度数是 72°

【分析】（1）根据对顶角、邻补角、角平分线的定义，求出$\angle EOF$ 和$\angle EOB$ 的度数，再根据角的和差即可得$\angle BOF$ 的度数；

（2）根据对顶角、邻补角、角平分线的定义，先用$\angle BOE$ 的等式表示$\angle AOC$，再根据角分线的定义，列出等式即可求得结果．

（1）

$\because \angle AOC=76°$,

$\therefore \angle BOD=\angle AOC=76°$,

$\because OE$平分$\angle BOD$,

$\therefore \angle BOE = \angle DOE = 38°$，

$\because \angle COE + \angle DOE = 180°$，

$\therefore \angle COE = 180° - \angle DOE = 142°$，

$\because OF$平分$\angle COE$，

$\therefore \angle EOF = \angle COF = 71°$，

$\because \angle BOF + \angle BOE = \angle EOF$，

$\therefore \angle BOF = \angle EOF - \angle BOE$

$= 71° - 38°$

$$= 33°$$

故答案为：33；

（2）

设$\angle AOC = x°$，

$\therefore \angle BOD = \angle AOC = x°$，

$\because OE$平分$\angle BOD$，

$\therefore \angle BOE = \angle DOE = \frac{1}{2}x°$，

$\because \angle COE + \angle DOE = 180°$，

$\therefore \angle COE = 180° - \angle DOE = 180° - \frac{1}{2}x°$，

$\because OF$平分$\angle COE$，

$\therefore \angle EOF = \angle COF = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{1}{2}x°\right)°$，

$\because \angle BOF + \angle BOE = \angle EOF$，$\angle BOF = 36°$

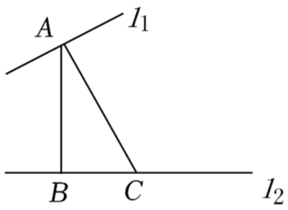
$\therefore 36° + \frac{1}{2}x° = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{1}{2}x°\right)°$，

$\therefore x = 72°$.

【点睛】本题考查了对顶角、邻补角、角平分线的定义，解题关键是观察图形分清楚哪两个角相等，哪些角相加得 180 度.

【考点 4　点到直线的距离、垂线段最短】

【例 4】（2022·福建·厦门双十中学海沧附属学校七年级期末）如图，点 A 在直线 l_1 上，点 B，C 在直线 l_2 上，$AB \perp l_2$，$AC \perp l_1$，AB＝4，BC＝3，则下列说法正确的是（　　）



A．点 A 到直线 l_2 的距离等于 4

B．点 C 到直线 l_1 的距离等于 4

C．点 C 到 AB 的距离等于 4

D．点 B 到 AC 的距离等于 3

【答案】A

【分析】根据点到直线的距离的定义：直线外一点到这条直线的垂线段的长度，即可得到答案.

【详解】解：点 A 到直线 l_2 的距离为 AB 的长，等于 4，故 A 正确；

点 C 到直线 l_1 的距离为 AC 的长，大于 4，故 B 错误；

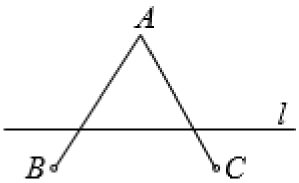
点 C 到 AB 的距离为 BC 的长，等于 3，故 C 错误；

同理，点 B 到 AC 的距离也不是 3，故 D 错误，

故选：A

【点睛】本题考查点到直线的距离，掌握定义是解题的关键.

【变式 4-1】（2022·浙江台州·七年级期中）如图，l 是一条水平线，把一头系着小球的线一端固定在点 A，小球从 B 到 C 从左向右摆动，在这一过程中，系小球的线在水平线下方部分的线段长度的变化是（　）



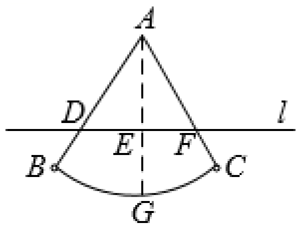
A．从大变小　　B．从小变大　　C．从小变大再变小　　D．从大变小再变大

【答案】C

【分析】根据题意可知：小球在以点 A 为圆心，以 AB 长为半径的圆弧上运动，据此即可解答.

【详解】解：根据题意可知：小球在以点 A 为圆心，以 AB 长为半径的圆弧上运动，

如图：过点 A 作$AE\perp l$与点 E，交弧 BC 于点 G，



$\therefore AD=AF>AE$，$AB=AG=AC$，

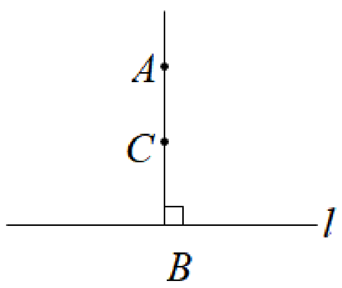
$\therefore AB-AD=AC-AF<AG-AE$，即$BD=CF<EG$，

故系小球的线在水平线下方部分的线段长度的变化是从小变大再变小，

故选：C．

【点睛】本题考查了垂线段最短，圆的相关概念，理解垂线段的性质是解决本题的关键．

【变式 4-2】（2022·吉林·公主岭市陶家中学七年级阶段练习）如图，因为$AB\perp l$，$BC\perp l$，B为垂足，所以AB和BC重合，其理由是（　　）



A．两点确定一条直线

B．在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

C．垂直同一条直线的两条直线平行

D．垂线段最短

【答案】B

【分析】利用“平面内，经过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”，逐一分析，排除错误答案即可．

【详解】解：A.点 A、C 可以确定一条直线，但不可以确定三点 B、A、C 都在直线 l 的垂线上，故本选项错误；

B.直线 BA、BC 都经过一个点 B，且都垂直于直线 l，故本选项正确；

C.在同一平面内，经过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，故本选项错误；

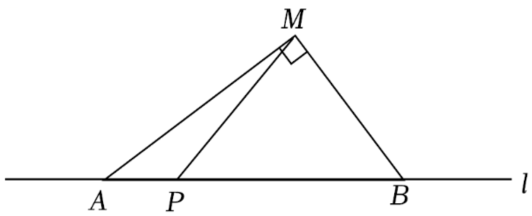
D.此题没涉及到线段的长度，故本选项错误；

故选：B．

【点睛】本题考查了垂直的定义、两点确定一条直线、垂线段最短，熟练掌握和运用各定义和性质是解决

本题的关键.

【变式4-3】（2022·江苏·九年级）如图，点 A、点 B 是直线 l 上两点，AB＝10，点 M 在直线 l 外，MB＝6，MA＝8，$\angle AMB$＝90°，若点 P 为直线 l 上一动点，连接 MP，则线段 MP 的最小值是____.



【答案】4.8

【分析】根据垂线段最短可知：当 $MP\perp AB$ 时，MP 有最小值，利用三角形的面积可列式计算求解 MP 的最小值.

【详解】解：当 $MP\perp AB$ 时，MP 有最小值，

$\because AB$＝10，MB＝6，MA＝8，$\angle AMB$＝90°，

$\therefore AB\bullet MP$＝$AM\bullet BM$，

即 10MP＝6×8，

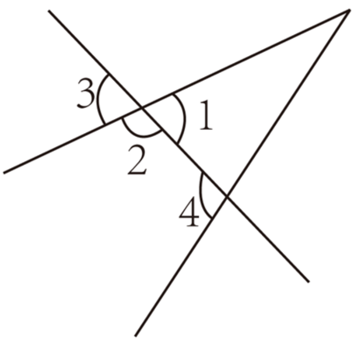
解得 MP＝4.8.

故答案为：4.8.

【点睛】本题主要考查垂线段最短，三角形的面积，找到 MP 最小时的 P 点位置是解题的关键.

【考点5　同位角、内错角、同旁内角的判断】

【例5】（2022·河南新乡·七年级期末）如图所示，下列说法不正确的是（　　）



A．∠1 和∠2 是同旁内角　　B．∠1 和∠3 是对顶角

C．∠3 和∠4 是同位角　　D．∠1 和∠4 是内错角

【答案】A

【分析】根据对顶角、邻补角、同位角、内错角定义判断即可.

【详解】A. ∠1 和∠2 是邻补角，故此选项错误；

B. ∠1 和∠3 是对顶角，此选项正确；

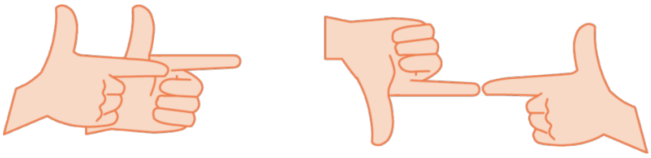
C. ∠3 和∠4 是同位角，此选项正确；

D. ∠1 和∠4 是内错角，此选项正确；

故选 A.

【点睛】此题考查对顶角，邻补角，同位角，内错角， 同旁内角，解题关键在于掌握各性质定义.

【变式 9-1】（2022·青海·中考真题）数学课上老师用双手形象的表示了“三线八角”图形，如图所示（两大拇指代表被截直线，食指代表截线）.从左至右依次表示（　　）



A．同旁内角、同位角、内错角

B．同位角、内错角、对顶角

C．对顶角、同位角、同旁内角

D．同位角、内错角、同旁内角

【答案】D

【分析】两条线 a、b 被第三条直线 c 所截，在截线的同旁，被截两直线的同一方，把这种位置关系的角称为同位角；两个角分别在截线的异侧，且夹在两条被截线之间，具有这样位置关系的一对角互为内错角；两个角都在截线的同一侧，且在两条被截线之间，具有这样位置关系的一对角互为同旁内角．据此作答即可．

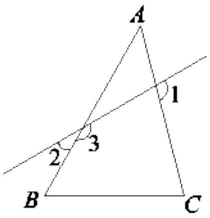
【详解】解：根据同位角、内错角、同旁内角的概念，可知

第一个图是同位角，第二个图是内错角，第三个图是同旁内角．

故选：D．

【点睛】本题考查了同位角、内错角、同旁内角，解题的关键是掌握同位角、内错角、同旁内角，并能区别它们．

【变式 9-2】（2022·河北保定·七年级期末）如图所示，下列说法错误的是(　　)



A．∠C 与∠1 是内错角

B．∠2 与∠3 是内错角

C．∠A 与∠B 是同旁内角

D．∠A 与∠3 是同位角

【答案】B

【分析】根据同位角，同旁内角，内错角的定义可以得到 A、C、D 是正确的，∠2 与∠3 是邻补角，不是内错角．

【详解】A、∠C 与∠1 是内错角，故本选项正确；

B、∠2 与∠3 是邻补角，故本选项错误；

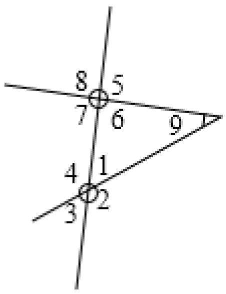
C、∠A 与∠B 是同旁内角，故本选项正确；

D、∠A 与∠3 是同位角，故本选项正确．

故选 B．

【点睛】本题主要考查了同位角，内错角，同旁内角的概念，比较简单．

【变式 9-3】（2022·河南·商水县希望初级中学七年级期末）如图所示，同位角有a对，内错角有b对，同旁内角有c对，则$a+b-c$的值是____________



【答案】6

【分析】根据同位角，内错角，同旁内角的定义分别得到 a，b，c 的值，即可求解．

【详解】∵同位角有：∠8 与∠4，∠5 与∠1，∠7 与∠3，∠6 与∠2，∠4 与∠9，∠7 与∠9，共 6 对；内错角有：∠7 与∠1，∠6 与∠4，∠5 与∠9，∠2 与∠9，共 4 对，同旁内角有：∠7 与∠4，∠6 与∠1，∠1 与∠9，∠6 与∠9 共 4 对，

∴a=6，b=4,c=4，

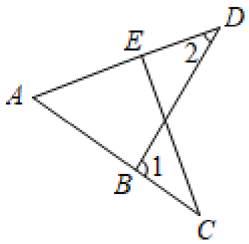
∴$a+b-c$=6，

故答案是：6．

【点睛】本题主要考查同位角，内错角，同旁内角的定义，掌握它们的定义，是解题的关键．

【考点 6　三线八角中的截线问题】

【例 6】（2022·四川省广元市宝轮中学七年级期末）如图，已知∠1 和∠2 是内错角，则下列表述正确的是（　　）



A．∠1 和∠2 是由直线 AD、AC 被 CE 所截形成的

B．∠1 和∠2 是由直线 AD、AC 被 BD 所截形成的

C．∠1 和∠2 是由直线 DA、DB 被 CE 所截形成的

D．∠1 和∠2 是由直线 DA、DB 被 AC 所截形成的

【答案】B

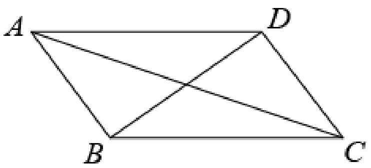
【分析】根据内错角的定义进行判断即可求解．

【详解】解：如图，∠1 和∠2 是由直线 AD、AC 被 BD 所截形成的内错角．

故选：B

【点睛】本题考查了内错角的判断，熟知内错角的定义是解题关键，弄清哪两条直线被第三条直线所截才能形成内错角是解题关键．

【变式 2-1】（2022·山东济宁·七年级期末）如图，$\angle ABD$与$\angle BDC$是（　）形成的内错角



A．直线AD、BC被直线BD所截　　B．直线AB、CD被直线BD所截

C．直线AB、CD被直线AC所截　　D．直线AD、BC被直线AC所截

【答案】B

【分析】根据内错角的定义即可完成．

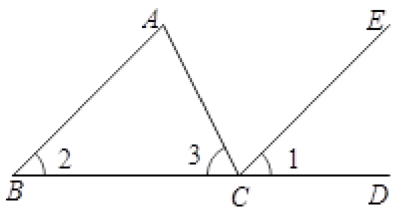
【详解】由图知，$\angle ABD$与$\angle BDC$是直线AB、CD被直线BD所截形成的内错角

故选：B

【点睛】本题考查了内错角的识别，两条直线被第三条直线所截，若两个角在两条截线之间，且在被截线

的两旁，则称这对角为内错角，掌握内错角的含义是正确识别内错角的关键.

【变式 2-2】（2022·甘肃·陇西县巩昌中学七年级期末）如图，∠2 与∠3 是直线______、____被第三条直线_____所截形成的_______.



【答案】 AB AC BD 同旁内角

【分析】根据同旁内角的定义即可判断.

【详解】由同旁内角的概念可知：

如图所示，∠2 与∠3 是直线 AB，AC 被直线 BD 所截而成的同旁内角；

故答案为：AB；AC；BD；同旁内角；

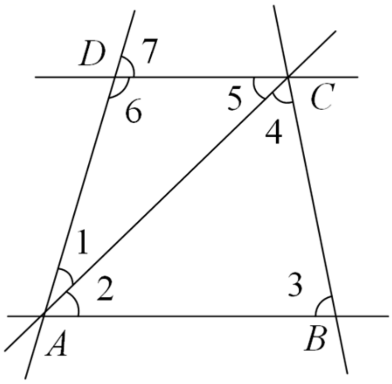
【点睛】本题考查了同旁内角的定义，熟悉掌握同旁内角的定义是解题的关键.

【变式 2-3】（2022·全国·七年级）如图所示，从标有数字的角中找出：

(1)直线 CD 和 AB 被直线 AC 所截构成的内错角.

(2)直线 CD 和 AC 被直线 AD 所截构成的同位角.

(3)直线 AC 和 AB 被直线 BC 所截构成的同旁内角.



【答案】(1)直线 CD 和 AB 被直线 AC 所截构成的内错角是∠2 和∠5； (2)直线 CD 和 AC 被直线 AD 所截构成的同位角是∠1 和∠7；(3)直线 AC 和 AB 被直线 BC 所截构成的同旁内角是∠3 和∠4

【分析】根据两条直线被第三条直线所截，所形成的角中，两角在两条直线的中间，第三条直线的两旁，可得内错角，两角在两直线的中间，第三条直线的同侧，可得同旁内角，两角在两条直线的同侧，第三条直线的同侧，可得同位角.

【详解】解：(1)直线 CD 和 AB 被直线 AC 所截构成的内错角是∠2 和∠5.

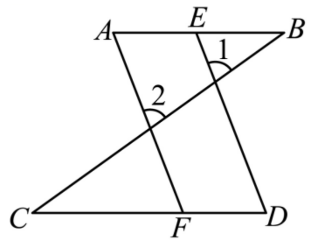
(2)直线 CD 和 AC 被直线 AD 所截构成的同位角是∠1 和∠7.

(3)直线 AC 和 AB 被直线 BC 所截构成的同旁内角是∠3 和∠4.

【点睛】此题主要考查了三线八角，关键是掌握同位角的边构成 F 形，内错角的边构成 Z 形，同旁内角的边构成 U 形.

【考点 7　根据平行线的判定与性质进行证明】

【例 7】（2022·浙江台州·七年级期末）如图，已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle A=\angle D$．求证：$\angle B=\angle C$．



证明：∵$\angle 1=\angle 2$（已知），

∴______∥______（________________________）．

∴$\angle A=\angle BED$（________________________）．

∵$\angle A=\angle D$（已知），

∴$\angle BED=\angle D$（等量代换）．

∴______∥______（________________________）．

∴$\angle B=\angle C$（________________________）．

【答案】DE；AF；同位角相等，两直线平行；两直线平行，同位角相等；AB；CD；内错角相等，两直线平行；两直线平行，内错角相等

【分析】先通过已知条件证明 $DE\parallel AF$，再由两直线平行同位角相等和等量代换证出 $AB\parallel CD$，再根据两直线平行，内错角相等得出$\angle B=\angle C$.

【详解】证明：∵$\angle 1=\angle 2$（已知），

∴$DE\parallel AF$（同位角相等，两直线平行）．

∴$\angle A=\angle BED$（两直线平行，同位角相等）．

∵$\angle A=\angle D$（已知），

∴$\angle BED=\angle D$（等量代换）．

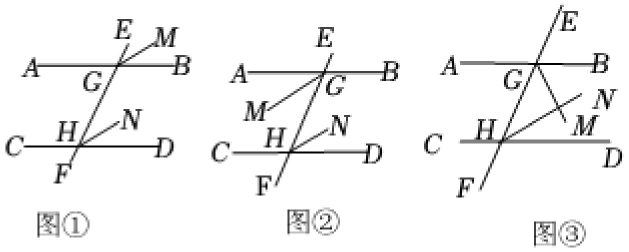
∴$AB\parallel CD$（内错角相等，两直线平行）．

∴$\angle B=\angle C$（两直线平行，内错角相等）．

故答案为：DE；AF；同位角相等，两直线平行；两直线平行，同位角相等；AB；CD；内错角相等，两直线平行；两直线平行，内错角相等.

【点睛】本题考查平行线的性质和判定的应用，能灵活运用定理进行推理是解此题的关键.

【变式 7-1】（2022·黑龙江·逊克县教师进修学校七年级期末）如图所示，$AB\parallel CD$，直线 EF 分别交 AB，CD 于点 G，H，HN 是$\angle DHG$ 的平分线.



(1)如果 GM 是$\angle BGE$ 的平分线，（如图①）试判断并证明 GM 和 HN 的位置关系；

证明：$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle BGE=$______（两直线平行，同位角相等．）

$\because GM$ 是$\angle BGE$ 的平分线，

$\therefore$______$=$______$=\frac{1}{2}\angle BGE$

$\because HN$ 是$\angle DHG$ 的平分线

$\therefore$______$=$______$=\frac{1}{2}\angle DHG$

$\therefore \angle MGE=\angle NHG$（等量代换）

$\therefore GM$ 和 HN 的位置关系是______，（____________________）.

(2)如果 GM 是$\angle AGH$ 的平分线，（如图②）（1）中的结论还成立吗？（不必证明）

(3)如果 GM 是$\angle BGH$ 的平分线，（如图③）（1）中的结论还成立吗？如果不成立，GM 与 HN 又有怎样的位置关系？请直接写出你的猜想不必证明.

【答案】(1)$\angle DHG$；$\angle BGM$；$\angle MGE$；$\angle DHN$；$\angle NHG$；$GM\parallel HN$；同位角相等，两直线平行；

(2)成立

(3)不成立，$GM\perp HN$.

【分析】（1）根据平行线的性质可得$\angle BGE=\angle DHG$，再利用角平分线的定义和等量代换可得$\angle MGE=\angle NHG$，再利用平行线的判定即可；

（2）根据平行线的性质可得$\angle AGH=\angle DHG$，，再利用角平分线的定义和等量代换可得$\angle HGM=\angle NHG$，再利

用平行线的判定即可；

（3）设 GM 与 HN 交于点 P，根据平行线的性质可得$\angle BGH+\angle DHG=180°$，再利用角平分线的定义和等量代换可得$\angle HGM+\angle NHG=90°$，然后利用三角形内角和定理可求出$\angle GPH=90°$即可解答．

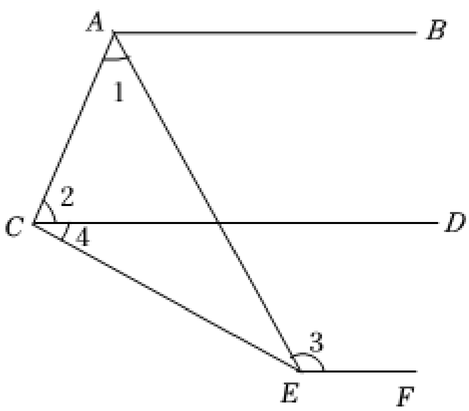
（1）证明：$\because AB\parallel CD\therefore\angle BGE=\angle DHG$（两直线平行，同位角相等．）$\because GM$ 是$\angle BGE$ 的平分线，$\therefore\angle BGM=\angle MGE=\frac{1}{2}\angle BGE\because HN$ 是$\angle DHG$ 的平分线$\therefore\angle DHN=\angle NHG=\frac{1}{2}\angle DHG\therefore\angle MGE=\angle NHG$（等量代换）$\therefore GM$ 和 HN 的位置关系是$GM\parallel HN$（同位角相等，两直线平行）．

（2）解：（1）中的结论还成立，理由如下：$\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle AGH=\angle DHG$，$\because GM$ 是$\angle AGH$ 的平分线，$\therefore\angle AGM=\angle HGM=\angle AGH$，$\because HN$ 是$\angle DHG$ 的平分线，$\therefore\angle GHN=\angle DHN=\angle DHG$，$\therefore\angle HGM=\angle NHG$（等量代换）$\therefore GM\parallel HN$.

（3）（3）（1）中的结论不成立，$GM\perp HN$，理由：如图：设 GM 与 HN 交于点 P，$\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle BGH+\angle DHG=180°$，$\because GM$ 是$\angle BGH$ 的平分线，$\therefore\angle BGM=\angle HGM=\frac{1}{2}\angle BGH$，$\because HN$ 是$\angle DHG$ 的平分线，$\therefore\angle GHN=\angle DHN=\frac{1}{2}\angle DHG$，$\therefore\angle HGM+\angle NHG=\frac{1}{2}\angle BGH+\frac{1}{2}\angle DHG=90°$，$\therefore\angle GPH=180°-(\angle HGM+\angle NHG)=90°\therefore GM\perp HN$.

【点睛】本题主要考查了平行线的判定与性质、角平分线的定义等知识点，熟练掌握平行线的判定与性质是解答本题的关键．

【变式 7-2】（2022·辽宁葫芦岛·七年级期末）如图已知：$AB\parallel CD$，$CD\parallel EF$，AE 平分$\angle BAC$，$AC\perp CE$，有以下结论：①$AB\parallel EF$；②$2\angle1-\angle4=90°$；③$2\angle3-\angle2=180°$；④$\angle3+\frac{1}{2}\angle4=135°$，其中，正确的结论有____．（填序号）



【答案】①②③④

【分析】根据平行线的性质逐一分析判断即可．

【详解】解：$\because AB\parallel CD$，$CD\parallel EF$，

$\therefore AB\parallel EF$，故①正确；

$\because AE$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAC=2\angle 1$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle BAC+\angle 2=180°$，

$\therefore 2\angle 1+\angle 2=180°$（1），

$\because AC\perp CE$，

$\therefore \angle 2+\angle 4=90°$（2），

$\therefore$（1）-（2）得，$2\angle 1-\angle 4=90°$，故②正确；

$\because AB\parallel EF$，

$\therefore \angle BAE+\angle 3=180°$，

$\because AE$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle 1=\angle BAE$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=180°$，

$\therefore 2\angle 1+2\angle 3=360°$（3），

$\because 2\angle 1+\angle 2=180°$（1），

（3）-（1）得，$2\angle 3-\angle 2=180°$，故③正确；

$\because CD\parallel EF$，

$\therefore \angle CEF+\angle 4=180°$，

$\therefore \angle 3+\angle AEC+\angle 4=180°$，

$\because AE\perp CE$，

$\therefore \angle 1+\angle AEC=90°$，

$\therefore \angle AEC=90°-\angle 1$，

$\therefore \angle 3+\angle 4-\angle 1=90°$，

$\because 2\angle 1-\angle 4=90°$，

$\therefore \angle 1=45°+\frac{1}{2}\angle 4$，

$\therefore \angle 3+\frac{1}{2}\angle 4=135°$，故④正确．

综上，正确的结论有：①②③④．

故答案为：①②③④．

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，熟练应用判定定理和性质定理是解题的关键，平行线的性质：两直线平行，同位角相等；两直线平行，同旁内角互补；两直线平行，内错角相等．平行线的判定是由角的数量关系判断两直线的位置关系．平行线的性质是由平行关系来寻找角的数量关系．应用平行线的判定和性质定理时，一定要弄清题设和结论，切莫混淆．

【变式 7-3】（2022·广东·广州市第四中学七年级期末）如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=\angle C$．

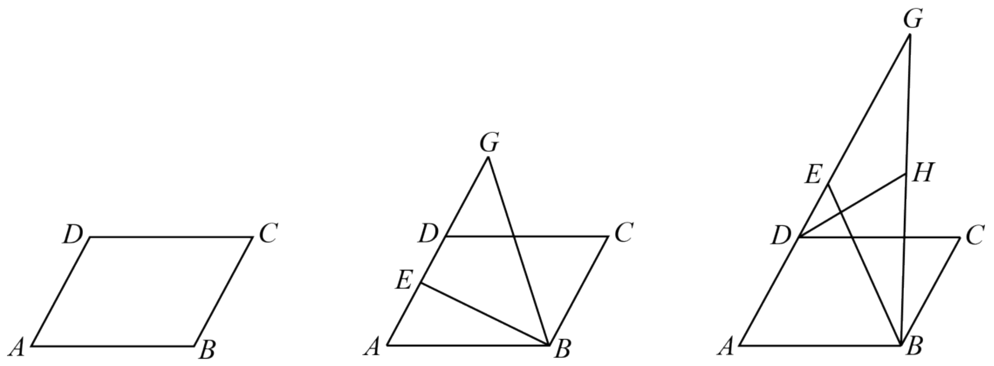


图1 图2 图3

(1)求证：$\angle B=\angle D$；

(2)如图 2，点 E 在线段 AD 上，点 G 在线段 AD 的延长线上，连接 BG，$\angle AEB=2\angle G$，求证：BG 是$\angle EBC$ 的平分线；

(3)如图 3，在(2)的条件下，点 E 在线段 AD 的延长线上，$\angle EDC$ 的平分线 DH 交 BG 于点 H，若$\angle ABE=66°$，求$\angle BHD$ 的度数．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

(3)57°

【分析】（1）根据平行线的性质得到$\angle A+\angle B=180°$，进而推出$\angle C+\angle B=180°$，即可证明 $AB\parallel CD$，得到$\angle A+\angle D=180°$，据此即可证明结论；

（2）先由平行线的性质得到$\angle CBG=\angle G$，$\angle AEB=\angle CBE$，进而推出$\angle EBG=\angle CBG=\angle G$，即可证明 BG 是$\angle EBC$ 的平分线；

（3）设$\angle GDH=\angle HDC=\alpha$，设$\angle EBG=\angle CBG=\beta$，根据平行线的性质推出 $66°+2\beta+2\alpha=180°$，则 $\alpha+\beta=57°$，过点 H 作 $HP\parallel AB$ 交 AG 于 P，得到$\angle PHB+\angle ABH=180°$，推出$\angle DHP=\angle HDC=\alpha$，则$\angle DHP+\angle BHD+\angle ABE+\angle GBE=180°$ 即 $\alpha+\angle BHD+66°+\beta=180°$，$\angle BHD=57°$；

（1）

解：$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle A+\angle B=180°$，

$\because \angle A=\angle C$，

$\therefore \angle C+\angle B=180°$，

$\therefore AB\parallel CD$，

$\therefore \angle A+\angle D=180°$，

$\therefore \angle B=\angle D$；

（2）

解：$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle CBG=\angle G$，$\angle AEB=\angle CBE$，

$\because \angle AEB=2\angle G$，

$\therefore \angle CBE=2\angle G$，

$\therefore \angle EBG+\angle CBG=2\angle G$，

$\therefore \angle EBG=\angle CBG=\angle G$，

$\therefore BG$ 是$\angle EBC$ 的平分线；

（3）

解：$\because DH$ 是$\angle GDC$ 的平分线，

$\therefore \angle GDH=\angle HDC$，

设$\angle GDH=\angle HDC=\alpha$，

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle BCD=\angle GDC=2\alpha$，

设$\angle EBG=\angle CBG=\beta$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180°$，

$\therefore \angle ABE+\angle EBC+\angle BCD=180°$，

$\therefore 66°+2\beta+2\alpha=180°$，

$\therefore \alpha+\beta=57°$，

过点 H 作 $HP\parallel AB$ 交 AG 于 P，

∴∠PHB+∠ABH=180°，

∵AB∥CD，

∴CD∥HP，

∴∠DHP=∠HDC=α，

∴∠DHP+∠BHD+∠ABE+∠GBE=180°

即 α+∠BHD+66°+β=180°，

∴∠BHD=57°；

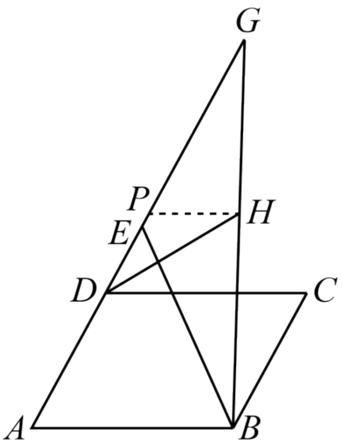
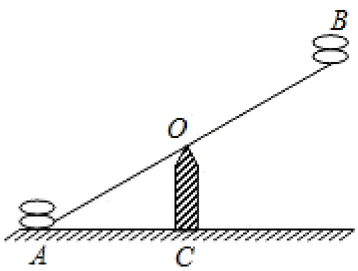


图3

【点睛】本题主要考查了平行线的性质与判定，熟知平行线的性质与判定条件是解题的关键.

【考点 8 直线旋转中的平行线的判定】

【例 8】（2022·河南洛阳·七年级期末）如图所示是跷跷板示意图，横板AB绕中点 O 上下转动，立柱OC与地面垂直，当横板AB的 A 端着地时，测得$\angle OAC=28°$，则在玩跷跷板时，小明坐在 A 点处，他上下最大可以转动的角度为（　）

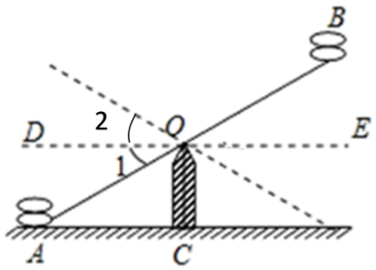


A．28°　　　　　B．56°　　　　　C．62°　　　　　D．84°

【答案】B

【分析】此题可以构造平行线，根据平行线的性质进行分析计算.

【详解】解：如图所示，



过点 O 作 DE∥AC，

则有∠1=$\angle OAC=28°$

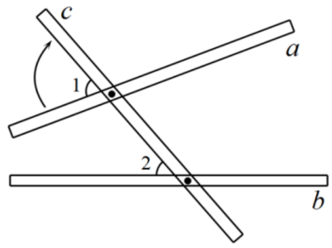
而∠2=∠1，

所以，上下最大可以转动的角度为∠2=∠1=56°.

故选：B.

【点睛】本题是一道生活问题，将其转化为关于平行线的问题，解题关键是利用“两直线平行,同位角相等”解答.

【变式 8-1】（2022·山东临沂·七年级期末）如图将木条 a，b 与 c 钉在一起，$\angle 1=75°$，要使木条 a 与 b 平行，木条 a 顺时针旋转了 35°，∠2 是（　）

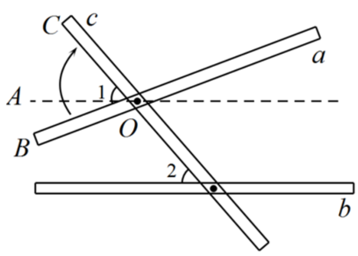


A．25°　　　B．35°　　　C．40°　　　D．50°

【答案】C

【分析】根据平行线的判定定理求解即可.

【详解】解：如图，



根据题意得，∠1=75°，∠AOB=35°，

∴∠AOC=∠1-∠AOB=40°，

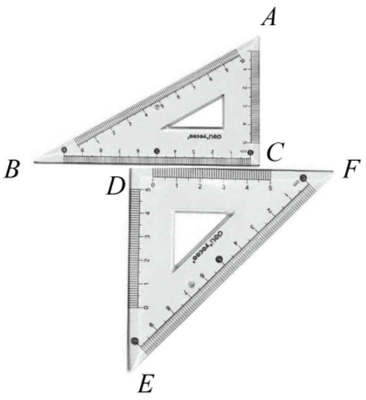
当∠2=∠AOB 时，a∥b，

∴∠2=40°，

故选：C.

【点睛】此题考查了平行线的判定，熟记平行线的判定定理是解题的关键.

【变式 8-2】（2022·云南昆明·七年级期末）小明把一副三角板摆放在桌面上，如图所示，其中边 BC，DF 在同一条直线上，现将三角板 DEF 绕点 D 顺时针旋转，当 EF 第一次与 AB 平行时，$\angle CDF$的度数是（

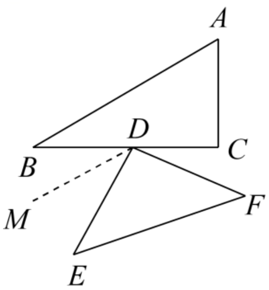


A． 15°　　　　B． 30°　　　　C． 45°　　　　D． 75°

【答案】A

【分析】过点 D 作 $DM\parallel AB$，则 $AB\parallel DM\parallel EF$，由平行线的性质得出$\angle B=\angle MDB$=30°，$\angle MDE=\angle E$=45°，则可求出答案.

【详解】解：过点 D 作 $DM\parallel AB$，则 $AB\parallel DM\parallel EF$，



∴$\angle B=\angle MDB$=30°，$\angle MDE=\angle E$=45°，

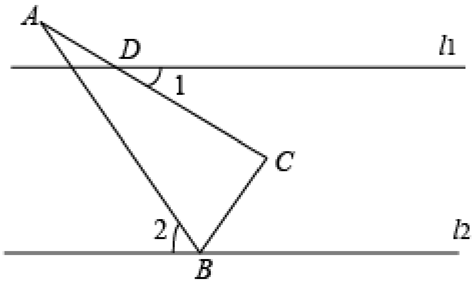
∴$\angle BDE=\angle BDM+\angle EDM$=30°+45°=75°，

∴$\angle CDF$=90°-$\angle BDE$=90°-75°=15°.

故答案为：15°.

【点睛】本题考查了旋转的性质，平行线的判定和性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

【变式 8-3】（2022·湖南永州·七年级期末）如图，直线$l_1\parallel l_2$，现将一个含 30°角的直角三角板的锐角顶点B放在直线l_2上，将三角板绕点B旋转，使直角顶点C落在l_1与l_2之间的区域，边AC与直角l_1相交于点D，若$\angle 1=35°$，则图中的$\angle 2$的值为（　）

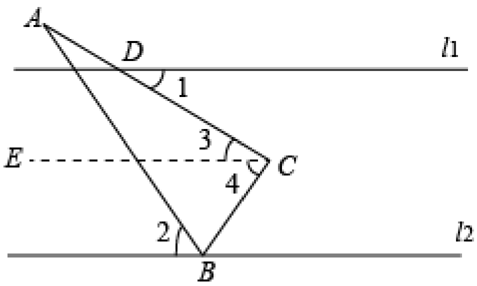


A．65°　　　　B．75°　　　　C．85°　　　　D．80°

【答案】A

【分析】过 A 作 $CE\parallel l_1$，得到 $CE\parallel l_1\parallel l_2$，根据平行线的性质得出∠3，进而求得∠4，再根据平行线的性质可求出答案．

【详解】解：过 C 作 $CE\parallel l_1$，



∵$l_1\parallel l_2$，

∴$CE\parallel l_1\parallel l_2$，

∴∠3=∠1=35°，

∴∠4=90°-∠3=55°，

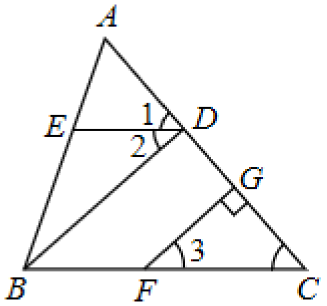
∴∠2=180°-∠4-∠ABC=180°-55°-60°=65°．

故选：A．

【点睛】题考查了平行线的性质和判定，能灵活运用平行线的性质和判定定理进行推理是解此题的关键．

【考点 9　与垂线有关的角度计算或证明】

【例 9】（2022·湖南·测试·编辑教研五七年级期末）如图，已知∠1=∠C，∠2=∠3，$FG\perp AC$ 于 G，你能说明 BD 与 AC 互相垂直吗？



【答案】见解析

【分析】根据∠1＝∠C，得 $ED\parallel BC$，所以∠2＝∠DBC，再由∠2＝∠3，得∠DBC＝∠3，所以 $BD\parallel FG$，即可得 $FG\perp AC$．

【详解】证明：∵∠1=∠C，

∴ $ED\parallel BC$，

∴∠2=∠DBC，

∵∠2=∠3，

∴∠DBC=∠3

∴$BD\parallel FG$，

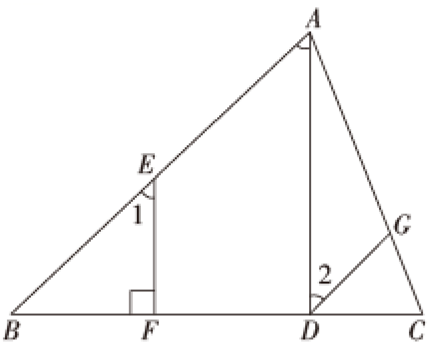
∵$FG\perp AC$，

∴$BD\perp AC$．

【点睛】本题综合考查了平行线的性质及判定，正确识别“三线八角”中的同位角、内错角、同旁内角是正确答题的关键，不能遇到相等或互补关系的角就误认为具有平行关系，只有同位角相等、内错角相等、同旁内角互补，才能推出两被截直线平行．

【变式 9-1】（2022·安徽合肥·七年级期末）请补充完整下列推理过程及证明过程中的依据．

如图，已知$DG//BA$，$EF\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$．试证明：$AD\perp BC$．



解：因为$DG//BA$（已知），

所以$\angle 2=\angle BAD$（____________）．

因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

所以______（等量代换），

所以$EF//$______（____________）.

所以$\angle EFB=$______（两直线平行，同位角相等）

因为$EF\perp BC$（已知），

所以$\angle EFB=90°$（____________）.

所以$\angle ADF=90°$（等量代换），

所以______（垂直的定义）.

【答案】两直线平行，内错角相等；$\angle 1=\angle BAD$；AD；同位角相等，两直线平行；$\angle ADB$；垂直的定义；$AD\perp BC$

【分析】根据平行线的判定定理与性质定理求解即可.

【详解】解：因为$DG//BA$（已知），

所以$\angle 2=\angle BAD$（两直线平行，内错角相等），

因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

所以$\angle 1=\angle BAD$（等量代换），

所以$EF//AD$（同位角相等，两直线平行），

所以$\angle EFB=\angle ADB$（两直线平行，同位角相等），

因为$EF\perp BC$（已知），

所以$\angle EFB=90°$（垂直的定义），

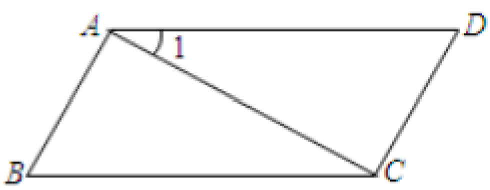
所以$\angle ADF=90°$（等量代换），

所以$AD\perp BC$（垂直的定义），

故答案为：两直线平行，内错角相等；$\angle 1=\angle BAD$；AD；同位角相等，两直线平行；$\angle ADB$；垂直的定义；$AD\perp BC$.

【点睛】此题考查了平行线的判定与性质，熟记平行线的判定定理与性质定理是解题的关键.

【变式 9-2】（2022·江苏盐城·七年级期末）如图，$AB\perp AC$，垂足为A，$\angle 1=30°$，$\angle B=60°$.



（1）AD与BC平行吗？为什么？

（2）根据题中的条件，能判断AB与CD平行吗？如果能，请说明理由：如果不能，添加一个条件，使它们平行（不必说明理由）.

【答案】（1）平行，理由见解析；（2）不能，可添加$CD\perp AC$.

【分析】（1）根据平行线的判定定理，即可得到结论；

（2）根据平行线的判定定理，即可得到结论.

【详解】（1）平行．理由如下：

∵$AB\perp AC$，

∴∠BAC=90°，

∵$\angle 1=30°$，

∴$\angle BAD=\angle BAC+\angle 1=120°$.

∵$\angle B=60°$，

∴$\angle B+\angle BAD=60°+120°=180°$，

∴$AD\parallel BC$；

（2）不能判断AB与CD平行，添加$CD\perp AC$即可判断AB与CD平行.

∵ $AB\perp AC$，

∴∠BAC=90°，

∵$CD\perp AC$，

∴∠ACD=90°，

∴$AB\parallel CD$.

【点睛】本题主要考查平行线的判定定理，掌握“同旁内角互补，两直线平行”，“内错角相等，两直线平行”，是解题的关键.

【变式 9-3】（2022·全国·七年级）已知：直线 MN、PQ 被 AB 所截，且 $MN\parallel PQ$，点 C 是线段 AB 上一定点，点 D 是射线 AN 上一动点，连接 CD.

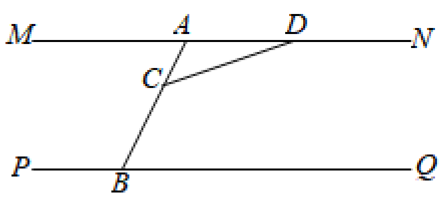


图1

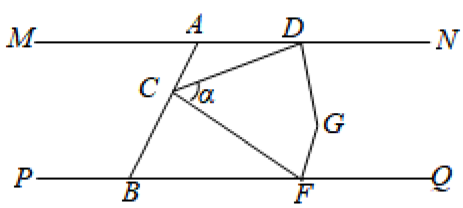


图2

(1)在图 1 中过点 C 作 $CE\perp CD$，与射线 BQ 交于 E 点.

①依题意补全图形；

②求证：$\angle ADC+\angle BEC=90°$；

(2)如图 2 所示，点 F 是射线 BQ 上一动点，连接 CF，$\angle DCF=\alpha$，分别作$\angle NDC$ 与$\angle CFQ$ 的角平分线交于点 G，请用含有 α 的代数式来表示$\angle DGF$，并说明理由．

【答案】(1)见解析

(2)$\angle DGF=180°-\frac{1}{2}\alpha$，理由见解析

【分析】（1）①根据要求作出图形即可．②过点 C 作 $CT\parallel MN$．利用平行线的性质和判定以及垂线的性质解决问题．

（2）$\angle DGF=180°-12\alpha$．利用（1）中基本结论可得$\angle ADC+\angle BFC=\angle DCF=\alpha$，$\angle GDN+\angle GFQ=\angle DGF$，再利用角平分线的定义及邻补角的性质即可求解．

(1)

解：①图形如图所示．

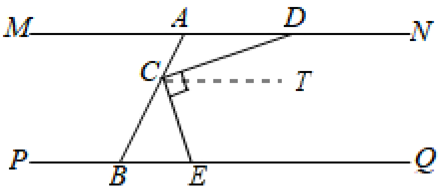


图1

②证明：过点 C 作 $CT\parallel MN$.

∵$CE\perp CD$，

∴$\angle ECD=90°$，

∵$CT\parallel MN$，$MN\parallel PQ$，

∴$CT\parallel MN\parallel PQ$，

∴$\angle ADC=\angle DCT$，$\angle BEC=\angle ECT$，

∴$\angle ADC+\angle BEC=\angle DCT+\angle ECT=\angle ECD=90°$．

(2)

解：$\angle DGF=180°-\frac{1}{2}\alpha$，理由如下：

如图，

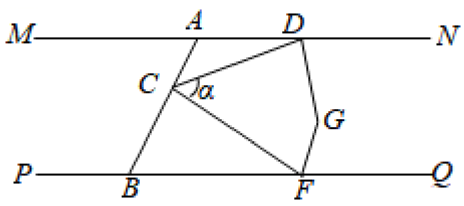


图2

由（1）的结论可知：$\angle ADC+\angle BFC=\angle DCF=\alpha$，$\angle GDN+\angle GFQ=\angle DGF$，

$\because DG$ 平分$\angle NDC$，GF 平分$\angle CFQ$，

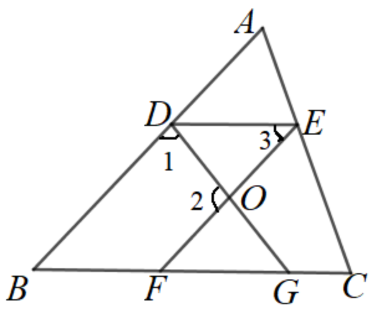
$\therefore \angle GDN=\frac{1}{2}\angle CDN$，$\angle GFQ=\frac{1}{2}\angle CFQ$，

$\therefore \angle DGF=\frac{1}{2}$（$\angle CDN+\angle CFQ$）$=\frac{1}{2}$（$180°-\angle ADC+180°-\angle BFC$）$=\frac{1}{2}$（$360°-\angle DCF$）$=180°-\frac{1}{2}\alpha$.

【点睛】本题考查平行线的性质，角平分线的定义，邻补角的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造平行线解决问题.

【考点 10　利用平行线的判定与性质计算角度】

【例 10】（2022·福建福州·七年级期末）如图，在△ABC中，点 D，E 分别在 AB，AC 上，点 F，G 在 BC 上，EF 与 DG 交于点 O，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle B=\angle 3$.



(1)判断 DE 与 BC 的位置关系，并证明；

(2)若$\angle AED+\angle EFC=118°$，求$\angle A$的度数.

【答案】(1)证明见解析；

(2)62°

【分析】（1）由$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 2+\angle DOE=180°$，得到$\angle 1=\angle DOE$，则$BD \parallel EF$，$\therefore$ $\angle B=\angle EFC$，由$\angle B=\angle 3$，$\angle 3=\angle EFC$，即可证明$DE \parallel BC$；

（2）由（1）的结论得到$\angle 3=\angle EFC$，则$\angle AEF=118°$，再由同旁内角的性质得到$\angle A$的度数即可.

（1）

$\because\ \angle 1+\angle 2=180^{\circ}$，$\angle 2+\angle DOE=180^{\circ}$，

$\therefore\ \angle 1=\angle DOE$，

$\therefore\ BD\parallel EF$，

$\therefore\ \angle B=\angle EFC$，

$\because\ \angle B=\angle 3$，

$\therefore\ \angle 3=\angle EFC$，

$\therefore\ DE\parallel BC$.

（2）

由（1）知： $\angle 3=\angle EFC$

$\because\ \angle AED+\angle EFC=118^{\circ}$

$\therefore\ \angle 3+\angle AED=\angle AEF=118^{\circ}$

由（1）知$BD\parallel EF$,

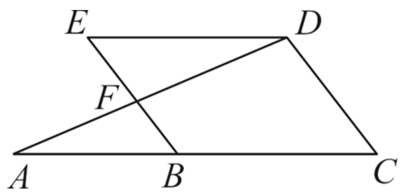
且$\angle AEF$、$\angle A$互为同旁内角，

$\therefore \angle AEF+\angle A=180^{\circ}$，

$$\therefore \angle A=180^{\circ}-\angle AEF=180^{\circ}-118^{\circ}=72^{\circ}$$

【点睛】本题考查平行线的性质与判定，熟练掌握平行线的性质与判定式关键.

【变式 10-1】（2022·河南漯河·七年级期末）已知：如图，$\angle A=\angle ADE$，$\angle C=\angle E$.



(1)若$\angle EDC=3\angle C$，求$\angle C$ 的度数；

(2)判断 BE 与 CD 的位置关系，并证明你的猜想.

【答案】(1)45°

(2)$BE\parallel CD$；证明见解析

【分析】（1）根据$\angle A=\angle ADE$，得到 $DE\parallel AC$，从而得到$\angle EDC+\angle C=180^{\circ}$，结合$\angle EDC=3\angle C$，代入计算即可.

（2）根据$\angle A=\angle ADE$，得到 $DE\parallel AC$，从而得到$\angle E=\angle ABE$，结合$\angle C=\angle E$，得到$\angle ABE=\angle C$，得到 $BE\parallel CD$.

（1）

$\because \angle A=\angle ADE$，

$\therefore DE\parallel AC$，

$\therefore \angle EDC+\angle C=180°$，

$\because \angle EDC=3\angle C$，

$\therefore 4\angle C=180°$，

$\therefore \angle C=45°$．

（2）

BE 与 CD 的位置关系是 $BE\parallel CD$．理由如下：

$\because \angle A=\angle ADE$，

$\therefore DE\parallel AC$，

$\therefore \angle E=\angle ABE$，

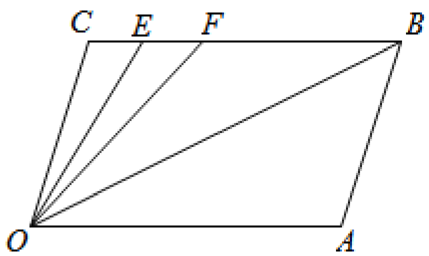
$\because \angle C=\angle E$，

$\therefore \angle ABE=\angle C$，

$\therefore BE\parallel CD$．

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，熟练掌握平行线的判定和性质是解题的关键．

【变式 10-2】（2022·广东湛江·七年级期末）如图所示，已知射线$CB\parallel OA$，$\angle C=\angle OAB=110°$，E、F在CB上，且满足$\angle FOB=\angle AOB$，OE平分$\angle COF$，根据上述条件，解答下列问题：



(1)证明：$OC\parallel AB$；

(2)求$\angle EOB$的度数；

(3)若平行移动AB，那么$\angle OBC:\angle OFC$的值是否随之变化？若不变，求出这个比值；若变化，请说明理由．

【答案】(1)见解析

(2)$\angle EOB=35°$

(3)不变，$\angle OBC:\angle OFC=1:2$．

【分析】（1）根据平行线的性质得出$\angle COA$，再根据$\angle COA+\angle OAB=180^{\circ}$，可得$OC\parallel AB$；

（2）根据$\angle FOB=\angle AOB$， OE平分$\angle COF$，即可得出$\angle EOB=\angle EOF+\angle FOB=\frac{1}{2}\angle COA$ ，即可得出答案；

（3）根据平行线的性质，即可得出$\angle OBC=\angle BOA,\angle OFC=\angle FOA$，再根据

$\angle FOA=\angle FOB+\angle AOB=2\angle AOB$ ，即可得出答案．

（1）

$\because CB\parallel OA$，$\angle C=\angle OAB=110^{\circ}$，

$\therefore \angle COA=180^{\circ}-\angle C=180^{\circ}-110^{\circ}=70^{\circ}$，

$\therefore \angle COA+\angle OAB=180^{\circ}$，

$\therefore OC\parallel AB$；

（2）

$\because \angle FOB=\angle AOB$，

$\therefore OB$平分$\angle AOF$，

又OE平分$\angle COF$，

$\therefore \angle \mathrm{EOB}=\angle \mathrm{EOF}+\angle \mathrm{FOB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{COA}=\frac{1}{2}\times 70^{\circ}=35^{\circ}$；

（3）

不变．

$\because CB\parallel OA$，

$\therefore \angle \mathrm{OBC}=\angle \mathrm{BOA}$，$\angle \mathrm{OFC}=\angle \mathrm{FOA}$，

$\therefore \angle OBC:\angle OFC=\angle AOB:\angle FOA$，

又$\because \angle \mathrm{FOA}=\angle \mathrm{FOB}+\angle \mathrm{AOB}=2\angle \mathrm{AOB}$，

$\therefore \angle OBC:\angle OFC=\angle AOB:\angle FOA=\angle AOB:2\angle AOB=1:2$．

【点睛】本题考查平行线、角平分线的性质及三角形内角和定理，熟记各性质并准确识图理清各角间的关系时解题关键．

【变式 10-3】（2022·北京密云·七年级期末）已知：点 C 是$\angle AOB$ 的 OA 边上一点（点 C 不与点 O 重合），点 D 是$\angle AOB$ 内部一点，射线 CD 不与 OB 相交．

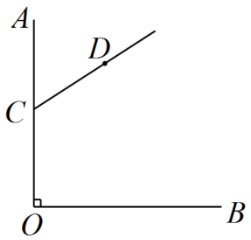


图1

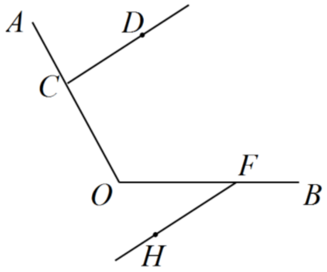


图2

(1)如图 1，$\angle AOB$＝90°，$\angle OCD$＝120°，过点 O 作射线 OE，使得 $OE//CD$．（其中点 E 在$\angle AOB$ 内部）．

①依据题意，补全图 1；

②直接写出$\angle BOE$ 的度数．

(2)如图 2，点 F 是射线 OB 上一点，且点 F 不与点 O 重合，当$\angle AOB=\alpha(0°<\alpha\le 180°)$时，过点 F 作射线 FH，使得 $FH//CD$（其中点 H 在$\angle AOB$ 的外部），用含α的代数式表示$\angle OCD$ 与$\angle BFH$ 的数量关系，并证明．

【答案】(1)①见解析；②30°

(2)$\angle OCD+\angle BFH=360°-\alpha$，证明见解析

【分析】（1）①根据题意补图即可；

②根据平行线的性质求出即可；

（2）过点 O 作 $OM\parallel CD\parallel FH$，根据平行线的性质得出两角的数量关系即可．

(1)

解：①依据题意，补全图 1 如下：

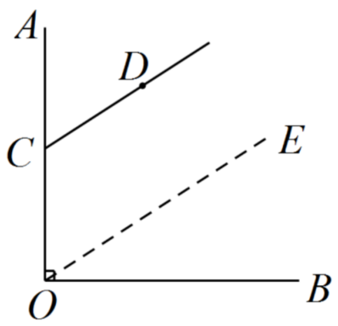


图1

②$\because CD\parallel OE$，

$\therefore \angle OCD+\angle COE=180°$，

∵∠*OCD*＝120°，

∴∠*COE*＝60°，

∵∠*AOB*＝90°，

∴∠*BOE*＝90°﹣∠*COE*＝90°﹣60°＝30°；

(2)

解：∠*OCD*+∠*BFH*＝360°﹣α，

证明：过点 *O* 作 *OM*∥*CD*∥*FH*，

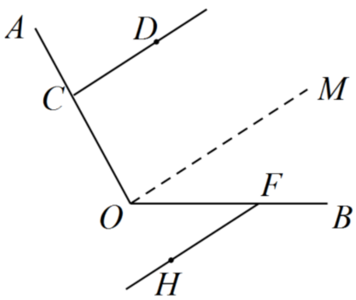


图2

∴∠*OCD*+∠*COM*＝180°，∠*MOF*＝∠*OFH*，

又∵∠*BFH*+∠*OFH*＝180°，

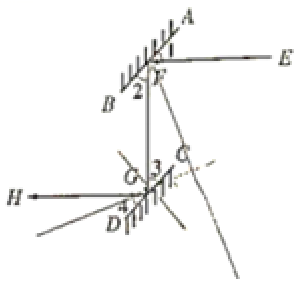
∴180°﹣∠*OCD*+180°﹣∠*BFH*＝α，

∴∠*OCD*+∠*BFH*＝360°﹣α．

【点睛】本题主要考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键．

【考点 11　平行线的性质在生活中的应用】

【例 11】（2022·湖北武汉·七年级期末）如图线段 AB 和 CD 表示两面镜子，且直线 AB∥直线 CD，光线 EF 经过镜子 AB 反射到镜子 CD，最后反射到光线 GH.光线反射时，∠1=∠2，∠3=∠4，下列结论：①直线 EF 平行于直线 GH；②∠FGH 的角平分线所在的直线垂直于直线 AB；③∠BFE 的角平分线所在的直线垂直于∠4 的角平分线所在的直线；④当 CD 绕点 G 顺时针旋转 90 时，直线 EF 与直线 GH 不一定平行，其中正确的是（　）



A. ①②③④　　　B. ①②③　　　C. ②③　　　D. ①③

【答案】B

【分析】根据平行线的性质定理逐个证明，看是否正确即可.

【详解】①正确，根据 AB//CD，可得$\angle 2=\angle 3$，再根据已知可得$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，进而证明$\angle EFC=\angle FGH$,因此可得 EF//GH；

②正确，根据∠3=∠4，可得∠FGH 的角平分线所在的直线垂直于直线 AB；

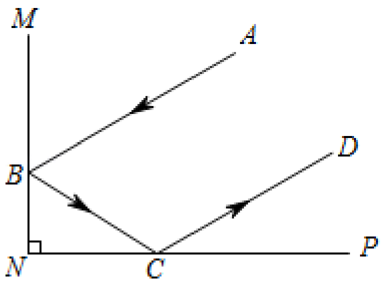
③正确，因为①证明了$\angle 1=\angle 4$ ，所以只要证明$\angle 1$ 的角平分线垂直于$\angle BFE$ 的角平分线即可；

④不正确，因为$\angle 2+\angle 3=90^{\circ}$,所以$\angle EFC+\angle FGH=180^{\circ}$，即 EF//GH.

故正确的有①②③，因此选 B.

【点睛】本题主要考查平行线的性质和定理，这是基本知识点，必须熟练掌握.

【变式 11-1】（2022·江苏宿迁·七年级期末）实验证明：平面镜反射光线的规律是：射到平面镜上的光线和被反射出的光线与平面镜所夹的锐角相等，如图有两块互相垂直的平面镜MN,NP，一束光线AB射在其中一块MN上，经另外一块NP反射，两束光线会平行吗？若不平行，请说明理由，若平行，请给予证明

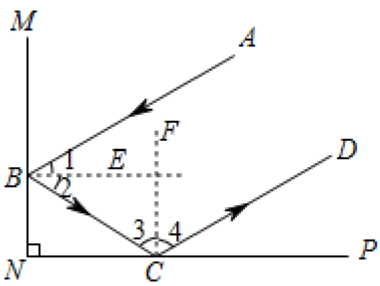


【答案】会，理由见解析

【分析】作$BE\perp NB$，$CF\perp NC$，根据$NB\perp NC$可得出$\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4=90°$，再由平行线的判定定理即可得出结论.

【详解】解：$AB//CD$.

理由如下：作$BE\perp NB$，$CF\perp NC$，如图，



$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$BE//NC$，

$\therefore \angle 2=\angle NCB$，

$\therefore \angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4=90°$，

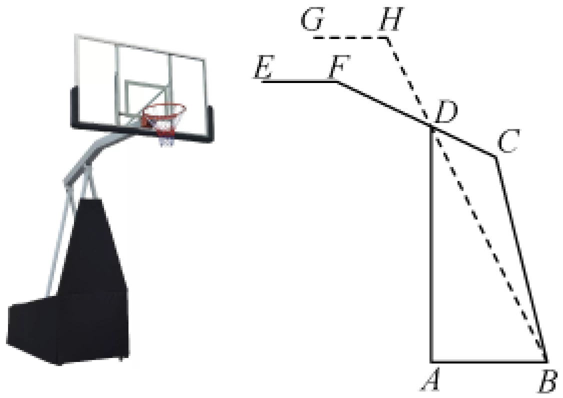
$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180°$，

$\therefore AB//CD$.

【点睛】本题考查的是平行线的判定与性质，熟知入射角等于反射角是解答此题的关键.

【变式 11-2】（2022·浙江杭州·七年级期末）（1）若组成$\angle 1$和$\angle 2$的两条边互相平行，且$\angle 1$是$\angle 2$的 2 倍小 15°，求$\angle 1$的度数.

（2）如图，放置在水平操场上的篮球架的横梁EF始终平行于AB,EF与上拉杆CF形成的$\angle F=145°$，主柱AD垂直于地面，通过调整CF和后拉杆BC的位置来调整篮筐的高度．当$\angle CDB=25°$时，点 H，D，B 在同一直线上，求$\angle H$的度数.



【答案】（1）15°或 115°；（2）120°

【分析】（1）根据$\angle 1$，$\angle 2$ 的两边分别平行，所以$\angle 1$，$\angle 2$ 相等或互补列出方程求解则得到答案.

（2）过 D 点作 $DI\parallel EF$，根据两直线平行，同旁内角互补可求$\angle FDI$=35°，根据平角的定义可求$\angle ADB$=30°，根据直角三角形的性质可求$\angle ABH$=60°，再根据两直线平行，同旁内角互补可求$\angle H$.

【详解】解：（1）①当$\angle 1=\angle 2$ 时，

$\because \angle 1=2\angle 2-15°$，

$\therefore \angle 1=2\angle 1-15°$，

解得$\angle 1=15°$；

②当$\angle 1+\angle 2=180°$时，

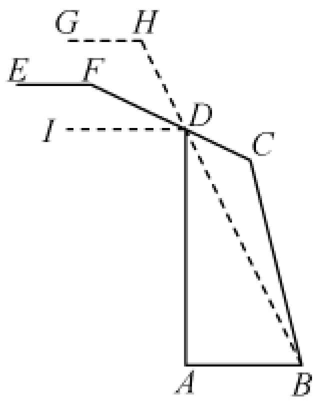
$\because \angle 1=2\angle 2-15°$，

$\therefore \angle 2+2\angle 2-15°=180°$，

解得$\angle 2=65°$，

$\therefore \angle 1=180°-\angle 2=115°$；

（2）过 D 点作 $DI\parallel EF$，



∵$\angle F$=145°，

∴$\angle FDI$=35°，

∴$\angle ADB$=180°-90°-35°-25°=30°，

∴$\angle ABH$=90°-30°=60°．

∵$GH\parallel AB$，

∴$\angle H$=180°-60°=120°．

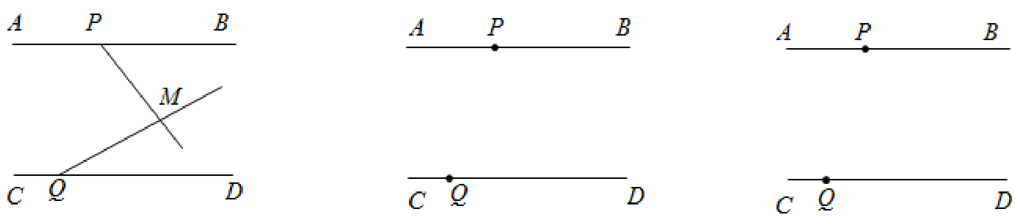
【点睛】本题考查了平行线的性质，平行线性质定理：两直线平行，同位角相等；两直线平行，同旁内角互补； 两直线平行，内错角相等．

【变式 11-3】（2022·湖南·师大附中梅溪湖中学七年级期末）梅溪湖公园某处湖道两岸所在直线（$AB\parallel CD$）如图所示，在湖道两岸安装探照灯 P 和 Q，若灯 P 射线自 PA 逆时针旋转至 PB 便立即回转，灯 Q 射线自 QD 逆时针旋转至 QC 便立即回转，每天晚间两灯同时开启不停交叉照射巡视．设灯 P 转动的速度是 10 度/秒，灯 Q 转动的速度是 4 度/秒，湖面上点 M 是音乐喷泉的中心．

（1）若把灯 P 自 PA 转至 PB，或者灯 Q 自 QD 转至 QC 称为照射一次，请求出 P、Q 两灯照射一次各需要的时间；

（2）12 秒时，两光束恰好在 M 点汇聚，求$\angle PMQ$；

（3）在两灯同时开启后的 35 秒内，请问开启多长时间后，两灯的光束互相垂直？



(备用图)

【答案】（1）P、Q 两灯照射一次各需要的时间分别为 18 秒、45 秒；（2）$\angle PMQ=108°$；（3）当开启 $15s$ 或$\frac{135}{7}s$ 或$\frac{225}{7}s$ 后，两灯的光束互相垂直．

【分析】（1）直接利用 180 除以两灯的速度即可求得结果；

（2）过点M作$FM//AB$，利用平行线的相关性质求解即可；

（3）分三种情况：①当两灯开启时间小于 18 秒时，②当两灯开启时间大于 18 秒，小于 36 秒时，PM返回时，第一次与DM相遇，③当两灯开启时间大于 18 秒，小于 35 秒时，PM返回时，第二次与DM相遇，分别根据两灯的光束互相垂直，利用平行线的相关性质，找准等量关系，列出方程求解即可．

【详解】解：（1）∵灯 P 转动的速度是 10 度/秒，灯 Q 转动的速度是 4 度/秒，

∴P 灯照射一次需要的时间是：$\frac{180}{10}=18$（秒）

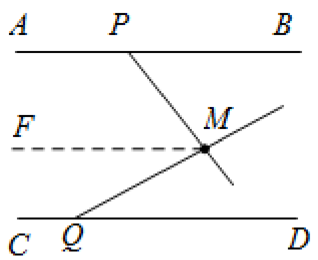
Q 灯照射一次需要的时间是：$\frac{180}{4}=45$（秒）；

（2）∵转动 12 秒时，两光束恰好在 M 点汇聚，

∴$\angle APM=10^{\circ}\times 12=120^{\circ}$,

$\angle DQM=4^{\circ}\times 12=48^{\circ}$，

如下图示，过点M作$FM//AB$，



则有$FM//AB//CD$

∴$\angle APM+\angle PMF=180^{\circ}$，　$\angle FMQ=\angle DQM=48^{\circ}$，

∴$\angle PMF=180^{\circ}-\angle APM=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$，

∴$\angle PMQ=\angle PMF+\angle FMQ=60^{\circ}+48^{\circ}=108^{\circ}$；

（3）①当两灯开启时间小于 18 秒时，

如图 1 所示，

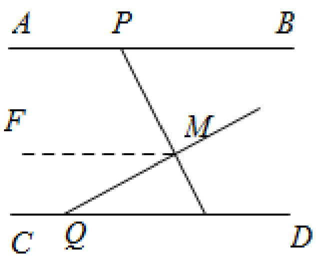


图1

过点M作$FM//AB$，

则有$FM//AB//CD$

$\because \angle APM = 10t$，$\angle FMQ = \angle DQM = 4t$，

$\therefore \angle PMF = 180^{\circ} - \angle APM = 180^{\circ} - 10t$，

$\because$两灯的光束互相垂直，

$\therefore$依题意可得：$180^{\circ} - 10t + 4t = 90^{\circ}$

解之得：$t = 15$；

②当两灯开启时间大于 18 秒，小于 35 秒时，

PM返回时，第一次与DM相遇，则如图 2 所示，

过点M作$FM//AB$，

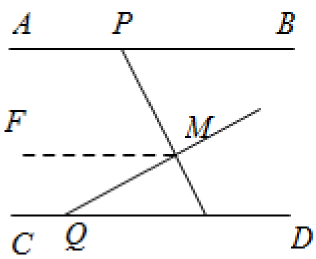


图2

则有$FM//AB//CD$

$\therefore \angle PMF = \angle BPM = 10t - 180^{\circ}$，　$\angle FMQ = \angle DQM = 4t$，

$\because$两灯的光束互相垂直，

$\therefore$依题意可得：$10t - 180^{\circ} + 4t = 90^{\circ}$

解之得：$t = \frac{135}{7}$；

③当两灯开启时间大于 18 秒，小于 35 秒时，

PM返回时，第二次与DM相遇，则如图 3 所示，

过点M作$FM//AB$，

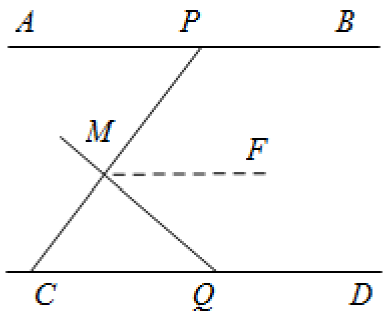


图3

则有$FM//AB//CD$

$\because \angle BPM = 10t - 180^{\circ}$，$\angle DQM = 4t$，

$\therefore \angle PMF = 180^{\circ} - \angle BPM = 360^{\circ} - 10t$，

$$\angle FMQ = 180^{\circ} - \angle DQM = 180^{\circ} - 4t$$

∵两灯的光束互相垂直，

∴依题意可得：$360^{\circ} - 10t + 180^{\circ} - 4t = 90^{\circ}$

解之得：$t = \frac{225}{7}$；

综上所述，当开启 15s 或$\frac{135}{7}$s 或$\frac{225}{7}$s 后，两灯的光束互相垂直．

【点睛】本题主要考查了平行线的性质以及角的和差关系的运用，解决问题的关键是运用分类思想进行求解，熟悉相关性质是解题的关键．

【考点 12　利用平行线的判定与性质探究角度之间的关系】

【例 12】（2022·河北唐山·七年级期末）已知三角形 ABC，$EF \parallel AC$交直线AB于点 E，$DF \parallel AB$交直线AC于点 D．

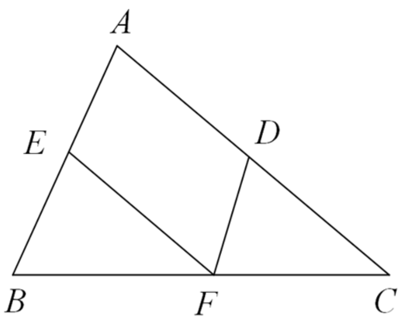
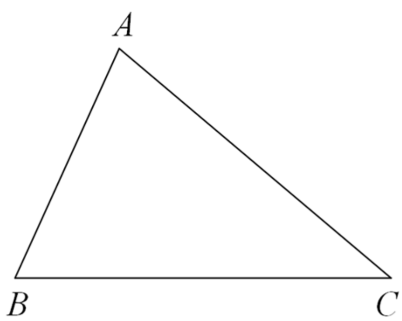


图 1



备用图

(1)如图 1，若点 F 在边BC上，直接写出$\angle BAC$与$\angle EFD$的数量关系；

(2)若点 F 在边BC的延长线上，（1）中的数量关系还成立吗？若成立，给予证明；若不成立，又有怎样的数量关系，请在备用图中画出图形并说明理由．

【答案】(1)$\angle BAC=\angle EFD$

(2)不成立，当点 F 在边 BC 的延长线上时，$\angle BAC+\angle EFD$=180°，图见解析，证明见解析

【分析】（1）根据平行线的性质即可得到$\angle BAC$ 与$\angle EFD$ 的数量关系；

（2）首先作出图形，再结合平行线的性质即可得到结论．

（1）

解：$\angle BAC$=$\angle EFD$，

证明：∵$EF\parallel AC$，

∴$\angle BAC$=$\angle BEF$，

∵$DF\parallel AB$，

∴$\angle EFD$=$\angle BEF$，

∴$\angle BAC$=$\angle EFD$；

（2）

如图 2，当点 F 在边 BC 的延长线上时，（1）中的数量关系不成立，

数量关系为:$\angle BAC+\angle EFD$=180°，

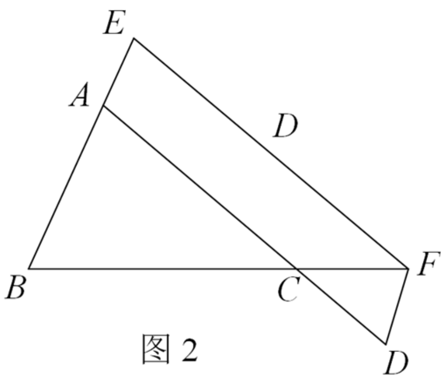


图 2

证明：∵$DF\parallel AB$，

∴$\angle D$=$\angle BAC$．

∵$EF\parallel AC$，

∴$\angle EFD+\angle D$=180°，

∴$\angle BAC+\angle EFD$=180°．

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，解题的关键是掌握两直线平行，同位角相等以及两直线平行，同旁内角互补等知识．

【变式12-1】（2022·湖北襄阳·七年级期末）如图，已知$AM \parallel BN$，P是射线AM上一动点（不与点A重合），BC，BD分别平分$\angle ABP$与$\angle PBN$，分别交射线AM于点C，D．

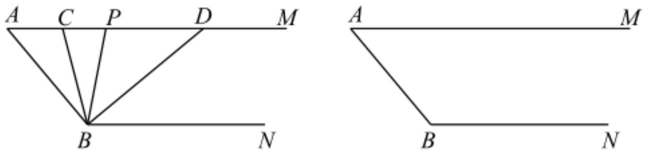


图1　　　　备用图

(1)若$\angle A = 50°$，求$\angle CBD$的度数；

(2)在点P的运动过程中，$\angle BPA$与$\angle BDA$的数量关系是否随之发生变化？若变化，请说明理由；若不变，请求出$\angle BPA$与$\angle BDA$的数量关系；

(3)当点P运动到使$\angle ACB=\angle ABD$时，探究$\angle ABC$与$\angle DBN$的数量关系，并证明你的结论．

【答案】(1)65°

(2)在点P的运动过程中，$\angle BPA$与$\angle BDA$的数量关系不随之发生变化，$\angle BPA=2\angle BDA$

(3)$\angle ABC=\angle DBN$．证明见解析

【分析】（1）根据$AM \parallel BN$，可得$\angle A+\angle ABN=180°$，从而得到$\angle ABN=130°$，再由BC，BD分别平分$\angle ABP$与$\angle PBN$，可得$\angle CBD=\frac{1}{2}(\angle ABP+\angle PBN)$，即可求解；

（2）根据$AM \parallel BN$，可得$\angle BPA=\angle PBN$，$\angle ADB=\angle DBN$，再由$\angle PBD=\angle DBN=\frac{1}{2}\angle PBN$，可得$\angle PBN=2\angle BDA$，即可求解；

（3）根据$AM \parallel BN$，可得$\angle ACB=\angle CBN$，再由$\angle ACB=\angle ABD$，可得$\angle CBN=\angle ABD$，即可求解．

（1）

解：$\because AM \parallel BN$，

$\therefore \angle A+\angle ABN=180°$，

又$\angle A=50°$，

$\therefore \angle ABN=130°$，

$\because BC$，BD分别平分$\angle ABP$与$\angle PBN$，

$\therefore \angle CBP=\frac{1}{2}\angle ABP$，$\angle PBD=\angle DBN=\frac{1}{2}\angle PBN$，

$\therefore\angle CBD=\angle CBP+\angle PBD=\frac{1}{2}(\angle ABP+\angle PBN)=65°$.

（2）

解：在点 P 的运动过程中，$\angle BPA$ 与 $\angle BDA$ 的数量关系不随之发生变化，$\angle BPA=2\angle BDA$．理由如下：

$\because AM\parallel BN$，

$\therefore\angle BPA=\angle PBN$，$\angle ADB=\angle DBN$，

又$\because\angle PBD=\angle DBN=\frac{1}{2}\angle PBN$，

$\therefore\angle PBN=2\angle BDA$，

$\therefore\angle BPA=2\angle BDA$．

（3）

解：$\angle ABC=\angle DBN$．理由如下：

$\because AM\parallel BN$，

$\therefore\angle ACB=\angle CBN$，

$\because\angle ACB=\angle ABD$，

$\therefore\angle CBN=\angle ABD$，

即$\angle ABC+\angle CBD=\angle DBN+\angle CBD$，

$\therefore\angle ABC=\angle DBN$.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，有关角平分线的计算，熟练掌握平行线的性质定理是解题的关键．

【变式 12-2】（2022·安徽合肥·七年级期末）已知：直线$AB\parallel CD$，经过直线AB上的定点P的直线EF交CD于点O，点M，N为直线CD上的两点，且点M在点O右侧，点N的左侧时，连接PM，PN，满足$\angle MPN=\angle MNP$.

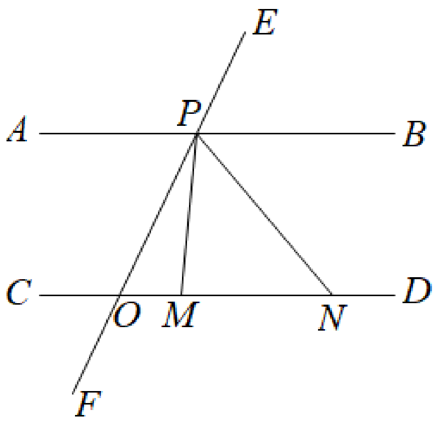


图1

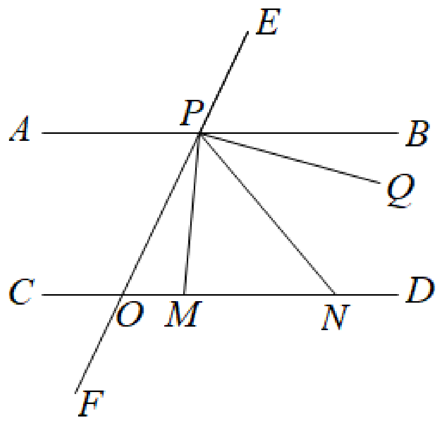


图2

(1)如图1，若$\angle MPO=25°$，$\angle MNP=50°$，直接写出$\angle COP$的度数为：______.

(2)如图2，射线PQ为$\angle MPE$的角平分线，用等式表示$\angle NPQ$与$\angle POM$之间的数量关系，并证明.

【答案】(1)125°

(2)$\angle POM=2\angle NPQ$，见解析

【分析】（1）根据平行线的性质以及题干中$\angle MPN=\angle MNP$即可推出$\angle COP$的度数.

（2）结合平行线性质和题干条件进行推理即可找到$\angle NPQ$与$\angle POM$的等量关系.

（1）

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle COP=\angle BPO$，$\angle BPN=\angle MNP=50°$.

$\because \angle MPO=25°$，$\angle MPN=\angle MNP=50°$，

$\therefore \angle COP=\angle BPO=\angle MPO+\angle MPN+\angle BPN=25°+50°+50°=125°$.

（2）

结论：$\angle POM=2\angle NPQ$.

理由：

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle EPB=\angle POD$，$\angle BPN=\angle PNM$.

又$\because$射线PQ为$\angle MPE$的角平分线，

$\therefore \angle EPQ=\angle MPQ=\frac{1}{2}\angle MPE$.

$\because \angle MPN=\angle PNM=\angle NPB$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/708137071024007003