归纳思想在两种题型中的应用

压轴题密押

通用的解题思路：

解决这类问题的基本思路是观察—归纳—猜想—证明（验证），具体做法是：①认真观察所给的一组数、式、图等，发现它们之间的关系：②分析概括所给数式图的特征，归纳它们的共性和蕴含的变化规律，猜想得出一个一般性的结论；③结合问题所给的材料查是证明或验证结论的正确性。

压轴题预测

题型一：数式规律中的猜想归纳思想

题目 1 (2024• 马鞍山一模) 观察以下等式：

第 1 个等式：$1\times\frac{1+3}{2}-\frac{2}{2}=1$，

第 2 个等式：$\frac{1}{2}\times\frac{4+6}{3}-\frac{2}{3}=1$，

第 3 个等式：$\frac{1}{3}\times\frac{9+9}{4}-\frac{2}{4}=1$，

第 4 个等式：$\frac{1}{4}\times\frac{16+12}{5}-\frac{2}{5}=1$，

……

按照以上规律，解决下列问题：

(1) 写出第 5 个等式：__ $\frac{1}{5}\times\frac{25+15}{6}-\frac{2}{6}=1$ __；

(2) 写出你猜想的第 n 个等式：______（用含 n 的等式表示），并证明.

【分析】(1) 根据前 4 个等式的规律求解此题；

(2) 根据前 5 个等式归纳出此题规律进行求解.

【解答】解：(1) ∵ 第 1 个等式：$1\times\frac{1+3}{2}-\frac{2}{2}=1\times\frac{1^2\times3\times1}{1+1}=1$，

第 2 个等式：$\frac{1}{2}\times\frac{4\times6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2^2+3\times2}{2+1}-\frac{2}{2+1}=1$，

第 3 个等式：$\frac{1}{3}\times\frac{9+9}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{3^2+3\times3}{3+1}-\frac{2}{3+1}=1$，

第 4 个等式：$\frac{1}{4}\times\frac{16+12}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{4}\times\frac{4^2+3\times4}{4+1}-\frac{2}{4+1}=1$，

∴ 第 5 个等式：$\frac{1}{5}\times\frac{5^2+3\times5}{5+1}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{25+15}{6}-\frac{2}{5}=1$，

故答案为：$\frac{1}{5}\times\frac{25+15}{6}-\frac{2}{5}=1$；

(2) 由题意得，

第 1 个等式：$1\times\frac{1+3}{2}-\frac{2}{2}=1\times\frac{1^2\times3\times1}{1+1}=1$，

第 2 个等式：$\frac{1}{2}\times\frac{4\times6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2^2+3\times2}{2+1}-\frac{2}{2+1}=1$，

第 3 个等式：$\frac{1}{3}\times\frac{9+9}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{3^2+3\times3}{3+1}-\frac{2}{3+1}=1$，

第 4 个等式：$\frac{1}{4}\times\frac{16+12}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{4}\times\frac{4^2+3\times4}{4+1}-\frac{2}{4+1}=1$，

……，

∴第 n 个等式：$\frac{1}{n}\times\frac{n^2+3n}{n+1}-\frac{2}{n+1}=1$.

故答案为：$\frac{1}{n}\times\frac{n^2+3n}{n+1}-\frac{2}{n+1}=1$.

【点评】此题考查了算式规律的归纳能力，关键是能准确理解题意，并通过观察、计算、归纳进行求解.

题目 2 (2024•包河区一模) 观察下列等式：

$a_1=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{1\times3}$；

$a_2=\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2\times4}$；

$a_3=\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4}=\frac{4}{3\times5}$；

…

(1) 猜想并写出第 6 个等式 $a_6=$ __ $\frac{1}{6\times7\times8}+\frac{1}{7}=\frac{7}{6\times8}$ ______；

(2) 猜想并写出第 n 个等式 $a_n=$ ______；

(3) 证明 (2) 中你猜想的正确性.

【分析】(1) 根据所给的等式的形式进行求解即可；

(2) 分析所给的等式的形式，进行总结即可；

(3) 把 (2) 中的左边进行整理，从而可求证.

【解答】解：(1) 由题意得：第 6 个等式 $a_6=\frac{1}{6\times7\times8}+\frac{1}{7}=\frac{7}{6\times8}$.

故答案为：$\frac{1}{6\times7\times8}+\frac{1}{7}=\frac{7}{6\times8}$；

(2) 由题意得：第 n 个等式 $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+2)}$.

故答案为：$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+2)}$；

(3) (2) 中的等式左边 $=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1+n^2+2n}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{n+1}{n(n+2)}$

= 右边.

故猜想成立.

【点评】本题主要考查数字的变化规律，解答的关键是由所给的等式总结出存在的规律.

题目 3 (2024•嘉善县一模) 观察下面的等式：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$，$\sqrt{4+\frac{1}{6}}=5\sqrt{\frac{1}{6}}$，…

(1) 写出 $\sqrt{2023+\frac{1}{2025}}$ 的结果；

(2) 按照上面的规律归纳出一个一般的结论；(用含 n 的等式表示，n 为正整数)

(3) 试运用相关知识，推理说明你所得到的结论是正确的.

【分析】(1) 由上述等式得，$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$，所以 $\sqrt{2023+\frac{1}{2025}}=2024\sqrt{\frac{1}{2025}}$；

(2) 观察上面的等式可得，$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$；

(3) 计算 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}$ 是否等于 $(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

【解答】解：(1) 由上述等式得，$\sqrt{2023+\frac{1}{2025}}=2024\sqrt{\frac{1}{2025}}$；

(2)$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$；

(3)$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n+2}}=\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

【点评】本题考查了算术平方根，关键是从等式中找到规律.

题目 4 (2024•新乐市一模) 每个人都拥有一个快乐数字，我们把自己出生的年份减去组成这个年份的数字之和，所得的差就是我们自己的快乐数字. 比如我国著名的数学家华罗庚出生于1910年，他的快乐数字是 $1910-(1+9+1+0)=1899$.

(1) 某人出生于1949年，他的快乐数字是 $\underline{\quad 1926 \quad}$；

(2) 你再举几个例子并观察，这些快乐数字都能被 ______ 整除，请你用所学知识说明你的猜想.

(3) 请你重新对快乐数字定义，并写出一个你找到的规律 (直接写出结果，不用证明).

【分析】(1) 根据快乐数字的定义即可解决问题.

(2) 按要求举几个例子，并发现规律即可解决问题.

(3) 根据 (2) 中发现的规律，进行重新定义即可.

【解答】解：(1) 由题知，

$1949-(1+9+4+9)=1926$，

即他的快乐数字是1926.

故答案为：1926.

(2) 例如：1986，1995，

$1986-(1+9+8+6)=1962$，

$1995-(1+9+9+5)=1971$，

观察发现，这些快乐数字都能被9整除.

证明如下，

令这个四位数为：$1000a+100b+10c+d$，$(a\neq 0)$，

则 $1000a+100b+10c+d-(a+b+c+d)$

$=999a+99b+9c$

$=9(111a+11b+c)$，

故此代数式是9的倍数，

所以猜想是正确的.

(3) 定义如下，

若一个四位数的千位数字与十位数字相等，个位数字与百位数字相等，则称这个数为“快乐数字”.

发现的规律是，

“快乐数字”能被101整除. (答案不唯一).

【点评】本题考查数字变化的规律，理解题中“快乐数字”的定义是解题的关键.

题目 5 (2024•长安区一模) 某班数学小组在研究个位数字为5的两位数的平方的规律时，得到了下列等式：

第1个等式：$15^2=15\times15=225=(1\times2)\times100+25$；

第2个等式：$25^2=25\times25=625=(2\times3)\times100+25$；

第3个等式：$35^2=35\times35=1225=(3\times4)\times100+25$；

…

按照以上规律，解决下列问题：

(1) 填空：$75^2=75\times75=$ __5625__ $=$ ______；

(2) 已知 $1\leqslant x\leqslant9$ 且 n 为整数，猜想第 n 个等式（用含 n 的等式表示），并证明.

【分析】(1) 计算 $75\times75=5625$，根据上述等式得 $5625=(7\times8)\times100+25$；

(2) 根据上述等式，得出规律 $(10n+5)^2=n(n+1)\times100+25$，($1\leqslant n\leqslant9$，且 n 为整数)，再证明即可.

【解答】解：(1)5625；

$(7\times8)\times100+25$；

(2) $(10n+5)^2=n(n+1)\times100+25$，($1\leqslant n\leqslant9$，且 n 为整数)

证明：$(10n+5)^2=100n^2+100n+25$

$=(n^2+n)\times100+25$

$=n(n+1)\times100+25$，

∴猜测的算式正确.

【点评】本题考查的是数字的变化规律和列代数式，从题目中找出数字与等式的变化规律是解题的关键.

题目 6 (2024•庐江县一模) 观察下列等式：

第1个等式：$\frac{3}{1}-\frac{2}{3}=\frac{3^2+1^2}{3}+a$；

第2个等式：$\frac{4}{2}-\frac{2}{4}=\frac{4^2+2^2}{8}+a$；

第3个等式：$\frac{5}{3}-\frac{2}{5}=\frac{5^2+3^2}{15}+a$；

第4个等式：$\frac{6}{4}-\frac{2}{6}=\frac{6^2+4^2}{24}+a$；

…

按照以上规律，解决下列问题：

(1) 各等式都成立时，$a=$ __-1__；

(2) 在 (1) 的条件下，写出你猜想的第 n 个等式（用含 n 的式子表示），并证明.

【分析】(1) 根据所给等式，求出 a 得值即可解决问题.

(2) 观察所给等式发现规律即可解决问题.

【解答】解：(1) 由题知，

因为 $\frac{3}{1}-\frac{2}{3}=\frac{3^2+1^2}{3}+a$，

解得 $a=-1$，

所以 a 的值为 -1.

故答案为：-1.

(2) 因为第1个等式：$\frac{3}{1}-\frac{2}{3}=\frac{3^2+1^2}{3}-1$；

第2个等式：$\frac{4}{2}-\frac{2}{4}=\frac{4^2+2^2}{8}-1$；

第 3 个等式：$\frac{5}{3}-\frac{2}{5}=\frac{5^2+3^2}{15}-1$；

第 4 个等式：$\frac{6}{4}-\frac{2}{6}=\frac{6^2+4^2}{24}-1$；

…，

观察所给等式各部分的变化规律可知，

第 n 个等式：$\frac{n+2}{n}-\frac{2}{n+2}=\frac{(n+2)^2+n^2}{n(n+2)}-1$；

证明如下，

左边 $=\frac{(n+2)^2-2n}{n(n+2)}=\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}$；

右边 $=\frac{n^2+4n+4+n^2-(n^2+2n)}{n^2+2n}=\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}$；

左边 $=$ 右边，

所以此等式成立.

【点评】本题考查数字变化的规律，能根据所给等式发现各部分的变化规律进而得出第 n 的等式是解题的关键.

题目 7 (2023· 利辛县模拟) 观察下列等式：

第①个等式：$1^2+2^2=3^2-2^2$，

第②个等式：$2^2+3^2=7^2-6^2$，

第③个等式：$3^2+4^2=13^2-12^2$，

第④个等式：$4^2+5^2=21^2-20^2$，

…

根据上述规律解决下列问题：

(1) 写出第⑤个等式；

(2) 写出你猜想的第? 个等式 (用含 n 的式子表示)，并证明.

【分析】(1) 根据等式的计算规律分析即可；

(2) 利用等式的计算规律写出猜想，再运用平方差公式计算证明.

【解答】解：(1) 第⑤个等式为：$5^2+6^2=31^2-30^2$；

(2) 第? 个等式 (用含 n 的式子表示) 为：$n^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2-[n(n+1)]^2$，

证明：左边 $=n^2+(n^2+2n+1)=2n^2+2n+1$，

右边 $=[n(n+1)+1+n(n+1)]\cdot[n(n+1)+1-[n(n+1)]=2n^2+2n+1$，

$\because$ 左边 $=$ 右边，

$\therefore n^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2-[n(n+1)]^2$.

【点评】本题考查了数字规律的探究，熟练掌握平方差公式的应用是解答本题的关键.

题目 8 (2023· 全椒县三模) 观察下列等式：

第 1 个等式：$\frac{2^2}{1}-1-2=1$；

第 2 个等式：$\frac{3^2}{2}-2-2=\frac{1}{2}$；

第 3 个等式：$\frac{4^2}{3}-3-2=\frac{1}{3}$；

第 4 个等式：$\frac{5^2}{4}-4-2=\frac{1}{4}$；

第 5 个等式：$\frac{6^2}{5}-5-2=\frac{1}{5}$；

…；

按照以上规律，解决下列问题

(1) 写出第 6 个等式：$\underline{\quad\frac{7^2}{6}-6-2=\frac{1}{6}\quad}$；

(2) 写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示)，并验证其正确性.

【分析】(1) 根据前 5 个等式规律写出第 6 个等式；

(2) 根据前 5 个等式猜想出第 n 个等式并验证.

【解答】解：(1) ∵ 第 1 个等式：$\frac{2^2}{1}-1-2=1$；

第 2 个等式：$\frac{3^2}{2}-2-2=\frac{1}{2}$；

第 3 个等式：$\frac{4^2}{3}-3-2=\frac{1}{3}$；

第 4 个等式：$\frac{5^2}{4}-4-2=\frac{1}{4}$；

第 5 个等式：$\frac{6^2}{5}-5-2=\frac{1}{5}$，

可得第 6 个等式为：$\frac{7^2}{6}-6-2=\frac{1}{6}$，

故答案为：$\frac{7^2}{6}-6-2=\frac{1}{6}$；

(2) 由题意可猜想得，第 n 个等式为：$\frac{(n+1)^2}{n}-n-2=\frac{1}{n}$，

证明：∵ $\frac{(n+1)^2}{n}-n-2$

$=\frac{n^2+2n+1}{n}-\frac{n(n+2)}{n}$

$=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n}$

$=\frac{1}{n}$，

∴ 第 n 个等式为：$\frac{(n+1)^2}{n}-n-2=\frac{1}{n}$.

【点评】此题考查了算式规律的归纳能力，关键是能准确理解题意，并通过观察、计算、归纳进行求解.

题目 9 (2023·夏邑县校级三模) 设 $\overline{a5}$ 是一个两位数，其中 a 是十位上的数字 ($1\leqslant a\leqslant 9$). 例如：当 $a=4$ 时，$\overline{a5}$ 表示的两位数是 45.

(1) 尝试：

①当 $a=1$ 时，$15^2=225=1\times2\times100+25$；

②当 $a=2$ 时，$25^2=625=2\times3\times100+25$；

③当 $a=3$ 时，$35^2=1225=3\times4\times100+25$；

④当 $a=4$ 时，$45^2=2025=\underline{\quad 4\times5\times100+25\quad}$.

(2) 归纳：$\overline{a5}^2$ 与 $100a(a+1)+25$ 有怎样的大小关系？试说明理由.

(3) 运用：若 $\overline{a5}^2$ 与 $100a$ 的和为 6325，求 a 的值.

【分析】(1) 根据规律直接得出结论即可；

(2) 根据 $\overline{a5}^2=(10a+5)(10a+5)=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$ 即可得出结论；

(3) 根据题意列出方程求解即可.

【解答】解: (1) ①当 $a=1$ 时, $15^2=225=1\times2\times100+25$;

②当 $a=2$ 时, $25^2=625=2\times3\times100+25$;

③当 $a=3$ 时, $35^2=1225=3\times4\times100+25$;

∴③当 $a=4$ 时, $35^2=2025=4\times5\times100+25$,

故答案为: $4\times5\times100+25$;

(2) $\overline{a5}^2=100a(a+1)+25$, 理由如下:

$\overline{a5}^2=(10a+5)(10a+5)$

$=100a^2+100a+25$

$=100a(a+1)+25$;

(3) 由题知, $\overline{a5}^2-100a=6325$,

即 $100a^2+100a+25-100a=6325$,

解得 $a=75$ 或 -7(舍去),

∴ a 的值为 7.

【点评】本题主要考查数字的变化规律, 根据数字的变化规律得出 $\overline{a5}^2=100a(a+1)+25$ 的结论是解题的关键.

题目 10 (2023•凤台县校级三模) 观察等式:

第 1 个等式: $\dfrac{3}{2\times4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\times3\times4}$;

第 2 个等式: $\dfrac{4}{3\times5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3\times4\times5}$;

第 3 个等式: $\dfrac{5}{4\times6}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{4\times5\times6}$;

…

根据以上等式的规律, 解答下列问题:

(1) 直接写出第 5 个等式: $\underline{\dfrac{7}{6\times8}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{6\times7\times8}}$;

(2) 猜想并写出第 n 个等式, 证明你所猜想的正确性.

【分析】先分别找出分子分母的规律, 再猜想出等式, 并证明即可.

【解答】解: (1) 先得到第一个分数的分子分母分别为 7, 6×8,

第二个分数的分子分母分别为 1, 7,

第三个分数的分子分母分别为 1, $6\times7\times8$,

故得: $\dfrac{7}{6\times8}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{6\times7\times8}$.

(2) 第 n 个等式: $\dfrac{n+2}{(n+1)(n+3)}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

证明: ∵左边 $=\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{(n^2+4n+4)-(n^2+4n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$ 右边,

∴得证.

【点评】本题主要考查学生找出分子分母的规律, 再猜想出等式的能力, 用分式运算证明是难点.

题目 11 (2023•萧县三模)观察下列等式:第1个等式:$1+1-\frac{1}{5}=\frac{3^2}{1\times5}$;

第2个等式:$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4^2}{2\times6}$;

第3个等式:$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{5^2}{3\times7}$;

…

按照以上规律,解决下列问题:

(1)写出第4个等式:__$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6^2}{4\times8}$__;

(2)写出你猜想的第n个等式(用含n的等式表示),并证明.

【分析】(1)根据题目中的三个等式各部分的变化规律,可解决问题.

(2)根据此等式各部分的变化规律,可归纳猜想出第n个等式. 将所得等式的左边通分,与右边相等,则可得出此等式成立..

【解答】解:(1)由题知,

第4个等式为:$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6^2}{4\times8}$.

故答案为:$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6^2}{4\times8}$;

(2)猜想第n个等式为:$1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}=\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}$.

证明:左边$=\frac{n(n+4)}{n(n+4)}+\frac{n+4}{n(n+4)}-\frac{n}{n(n+4)}=\frac{n^2+4n+4}{n(n+4)}=\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}=$右边,

所以此等式成立.

【点评】本题考查了数式变化规律的归纳猜想问题,抓住等式中各部分的变化规律是解决问题的关键.

题目 12 (2023•无为市四模)观察下列等式:

第1个等式: :$\frac{1}{1}-\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$;

第2个等式:$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{3}$;

第3个等式:$\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{4}$;

第4个等式:$\frac{1}{4}-\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{5}$;

……

按照以上规律,解决下列问题:

(1)写出第5个等式:__$\frac{1}{5}-\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{6}$__.

(2)写出你猜想的第n个等式(用含n的式子表示),并证明.

【分析】(1)根据所给的等式的形式进行求解即可;

(2)利用所给的规律进行求解即可.

【解答】解:(1)按照以上规律,第5个等式为:$\frac{1}{5}-\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{6}$;

故答案为:$\frac{1}{5}-\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{6}$;

(2)按照以上规律,第n个等式为:$\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}$. 证明如下:

等式左边$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}$

$=\dfrac{n+1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=\dfrac{n}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{n+1}$,

等式右边$=\dfrac{1}{n+1}$,

∵等式左边=等式右边,

∴等式成立.

【点评】本题主要考查分式的加减法,数字的变化规律,解题的关键是读懂题意,找到已知等式的规律.

题目 13 (2023·思明区模拟)“歌唱家在家唱歌”“蜜蜂酿蜂蜜”这两句话从左往右读和从右往左读,结果完全相同. 文学上把这样的现象称为“回文”,数学上也有类似的“回文数”,比如252,7887,34143. 小明在计算两位数减法的过程中意外地发现有些等式从左往右读的结果和从右往左读的结果一样,如:$65-38=83-56$;$91-37=73-19$;$54-36=63-45$. 数学上把这类等式叫做“减法回文等式”.

(1) ①观察以上等式,请你再写出一个“减法回文等式”;

②请归纳“减法回文等式”的被减数$\overline{ab}$(十位数字为a,个位数字为b)与减数$\overline{cd}$应满足的条件,并证明.

(2) 两个两位数相乘,是否也存在“乘法回文等式”? 如果存在,请你直接写出“乘法回文等式”的因数$\overline{xy}$与因数$\overline{mn}$应满足的条件.

【分析】(1) ①根据题意写出一个“减法回文等式“即可;

②由已知“减法回文等式”的定义证明即可;

(2) 类似“减法回文等式”定义得到“乘法回文等式”,再根据“乘法回文等式”定义证明即可.

【解答】解:(1) ①观察已知等式,再写出一个“减法回文等式”可以是$81-72=27-18$(答案不唯一);

②归纳“减法回文等式”的被减数$\overline{ab}$(十位数字为a,个位数字为6)与减数$\overline{cd}$应满足的条件是$a-c=d-b$,证明如下:

∵$\overline{ab}-\overline{cd}=\overline{dc}-\overline{ba}$,即$10a+b-(10c+d)=10d+c-(10b+a)$,

整理,得:$11(a-c)=11(d-b)$,

∴$a-c=d-b$;

(2) 两个两位数相乘,也存在“乘法回文等式“,“乘法回文等式“的因数$\overline{xy}$与因数应$\overline{mn}$满足的条件是$\overline{xm}=\overline{yn}$,理由如下:

∵$\overline{xy}\times\overline{mn}=\overline{\mathrm{nm}}\times\overline{xyx}$,

即$(10x+y)(10m+n)=(10n+m)(10y+x)$,

整理,得:

$99xm=99yn$,

∴$xm=yn$.

【点评】本题主要考查了整式的加减,注意发现数字之间的联系,找出运算的规律解决问题.

题目 14 (2023·武安市三模)某数学兴趣小组研究如下等式:$38\times32=1216$,$53\times57=3021$,$71\times79=5609$,$84\times86=7224$. 观察发现以上等式均是“十位数字相同,个位数字之和是10的两个两位数相乘,且积有一定的规律”.

(1) 根据上述的运算规律,直接写出结果:$58\times52=$ __3016__;$75^2=$ ______;

(2) 设其中一个数的十位数字为a,个位数字为$b(a>0,b>0)$.

①请用含 a，b 的等式表示这个运算规律，并用所学的数学知识证明；
②上述等式中，分别将左边两个乘数的十位和个位数字调换位置，得到新的两个两位数相乘(如:38×32 调换为 83×23)．若记新的两个两位数的乘积为 m，①中的运算结果为 n，求证：$m-n$ 能被 99 整除．

【分析】(1) 根据上述的运算规律计算，即可求解；
(2) ①根据题意可得这两个两位数分别为 $10a+b$，$10a+10-b$，从而得到这个运算规律为 $(10a+b)(10a+10-b)=100a(a+1)+b(10-b)$，然后分别计算等式的左右两边，即可求解；
②由①得：$n=100a^2+100a+10b-b^2$，可得新的两个两位数分别为 $10b+a$，$10(10-b)+a$，进而得到 $m=(10b+a)[10(10-b)+a]$，然后计算出 $m-n$，即可解答．

【解答】(1) 解：根据题意得：$58\times52=(5\times6)\times100+8\times2=3016$，$75^2=(7\times8)\times100+5\times5=5625$；
故答案为：3016；5625；
(2) ①解：∵ 其中一个数的十位数字为 a，个位数字为 $b(a,b>0)$，
∴ 另一个数的十位数字为 a，个位数字为 $10-b$，
∴ 这两个两位数分别为 $10a+b$，$10a+10-b$，
根据题意得：这个运算规律为 $(10a+b)(10a+10-b)=100a(a+1)+b(10-b)$，
证明：左边 $=100a^2+10ab+100a+10b-10ab-b^2=100a^2+100a+10b-b^2$，
右边 $=100a^2+100a+10b-b^2$，
∴ 左边 = 右边；
②证明：由①得：$n=100a^2+100a+10b-b^2$，
∵ 分别将左边两个乘数的十位和个位调换位置，得到新的两个两位数相乘，
∴ 新的两个两位数分别为 $10b+a$，$10(10-b)+a$，
$\therefore m=(10b+a)[10(10-b)+a]$
$=(10b+a)(100-10b+a)$
$=1000b-100b^2+100a+a^2$，
$\therefore m-n=(1000b-100b^2+100a+a^2)-(100a^2+100a+10b-b^2)$
$=-99a^2-99b^2+990b$
$=-99(a^2+b^2-10b)$，
∵ a，b 为正整数，
∴ a^2+b^2-10b 为整数，
∴ $m-n$ 能被 99 整除．

【点评】本题主要考查了整式的混合运算，因式分解的应用，明确题意，准确得到规律是解题的关键．

题目 15 (2024·安徽模拟)【观察】观察下列式子：
① $1\times4+2=2\times3$；
② $2\times5+2=3\times4$；
③ $3\times6+2=4\times5$；
④ $4\times7+2=5\times6$；
【猜想】根据上述式子猜想式子⑥：$6\times9+2=$ __7__ $\times$ ______；
【发现】用含 n 的式子表示出第 n 个式子：______；
【应用】利用你发现的规律计算：$\dfrac{2021\times2024+2}{2022\times2025+2}$．

【分析】猜想：根据上述四个式子猜想第六个式子即可；
发现：根据上述式子得出一般规律，即 $n\times(n+3)+2=(n+1)\times(n+2)$；
应用：根据发现的规律计算即可．

【解答】解：猜想：⑥：$6\times9+2=7\times8$，

故答案为：7，8；

发现：第 n 个式子：$n\times(n+3)+2=(n+1)\times(n+2)$，

故答案为：$n\times(n+3)+2=(n+1)\times(n+2)$；

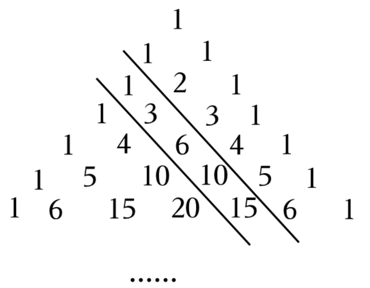
应用：原式 $=\dfrac{2022\times2023}{2023\times2024}=\dfrac{1011}{1012}$.

【点评】本题考查的是数字的变化规律，有理数的混合运算和列代数式，熟练掌握上述知识点是解题的关键.

题目 16 (2024·芜湖二模) 如图被称为“杨辉三角”或“贾宪三角”．其规律是：从第 3 行起，每行两端的数都是“1”，其余各数都等于该数“两肩”上的数之和．图中两平行线之间的一列数：1，3，6，10，15，……，我们把第 1 个数记为 a_1，第 2 个数记为 a_2，第 3 个数记为 a_3，……，第 n 个数记为 a_n.

(1) 根据这列数的规律，$a_8=$ ___36___，$a_n=$ ______；

(2) 这列数中有 66 这个数吗？如果有，求 n；如果没有，请说明理由.



【分析】(1) 根据题意，可以得出规律：第 n 个数记为 $a_n=1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，再求 a_8 即可；

(2) 设 $66=\dfrac{n(n+1)}{2}$，求解即可.

【解答】解：(1) 根据题意可知：

$a_1=1$；

$a_2=1+2=3$；

$a_3=1+2+3=6$；

$a_4=1+2+3+4=10$；

…，

第 n 个数记为 $a_n=1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore a_8=\dfrac{8\times9}{2}=36$；

故答案为：36；$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) 设 $66=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

解得：$n=11$，

$\therefore$ 这列数中有 66 这个数，$n=11$.

【点评】本题考查的是数字的变化规律，从题目中找出数字间的变化规律是解题的关键.

题目 17 (2024·池州二模) 观察下列式子：

第 1 个等式：$13^2=10\times(10\times1+6)\times1+9$；

第 2 个等式：$23^2=10\times(10\times2+6)\times2+9$；

第 3 个等式：$33^2=10\times(10\times3+6)\times3+9$；

……

(1) 请写出第 4 个等式：__ $43^2=10\times(10\times4+6)\times4+9$ __；

(2) 设一个两位数表示为 $10a+3$，根据上述规律，请写出 $(10a+3)^2$ 的一般性规律，并予以证明.

【分析】(1) 根据前 3 个等式的规律，即可写出答案；

(2) 根据前 3 个等式的运算过程，即可得出一般性规律，再进行证明即可.

【解答】解：(1)$43^2=10\times(10\times4+6)\times4+9$，

故答案为：$43^2=10\times(10\times4+6)\times4+9$；

(2) 一般性规律：$(10a+3)^2=10a\times(10a+6)+9$.

证明：∵ 等式左边 $=(10a+3)^2=100a^2+60a+9$，

等式右边 $=10a\times(10a+6)+9=100a^2+60a+9$，

∴ 等式左边 = 等式右边，即 $(10a+3)^2=10a\times(10a+6)+9$.

【点评】本题考查的是数字的变化规律和有理数的混合运算，找出等式的变化规律是解题的关键.

题目 18 (2024• 庐江县校级模拟) 观察下列等式：

第 1 个等式：$\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{1}=\dfrac{0}{1\times1}$；

第 2 个等式：$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4\times3}$；

第 3 个等式：$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{2^2}{9\times5}$；

第 4 个等式：$\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{3^2}{16\times7}$；……

(1) 请你按照上述等式规律写出第 5 个等式；

(2) 根据上述等式规律写出第 n 个等式；

(3) 证明 (2) 中你所写等式的正确性.

【分析】(1) 根据前几个等式，可得第 5 个等式：$\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{25}=\dfrac{4^2}{25\times9}$；

(2) 第 n 个等式：$\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)}$；

(3) 证明等式左边等于等式右边即可.

【解答】解：(1)$\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{25}=\dfrac{4^2}{25\times9}$；

(2)$\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)}$；

(3) ∵ 左边 $=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n^2-(2n-1)}{n^2(2n-1)}=\dfrac{n^2-2n+1}{n^2(2n-1)}=\dfrac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)}=$ 右边，

∴ 等式成立.

【点评】本题考查的是数字的变化规律，从题目中找出数字的变化规律是解题的关键.

题目 19 (2024• 沅江市一模) 设 $a_1=3^2-1^2$，$a_2=5^2-3^2$，$a_3=7^2-5^2\cdots$，容易知道 $a_1=8$，$a_2=16$，$a_3=24$，如果一个数能表示为 8 的倍数，我们就说它能被 8 整除，所以 a_1，a_2，a_3 都能被 8 整除.

(1) 试探究 a_n 是否能被 8 整除，并用文字语言表达出你的结论.

(2) 若一个数的算术平方根是一个自然数，则称这个数是“完全平方数”，试找出 a_1，a_2，$a_3\cdots a_n$ 这一系列数中从小到大排列的前 4 个完全平方数，并说出当 n 满足什么条件时，a_n 为完全平方数.

【分析】(1) 由题意，a_n 是相邻俩奇数 $2n+1$、$2n-1$ 的平方差，化简结果是 8 的倍数，可整除；

(2) 由 $a_n=8n$ 找到前四个完全平方数，从下标 2、8、18、32 可知它们是一个完全平方数的 2 倍.

【解答】解：(1) 由题意得：

$a_n=(2n+1)^2-(2n-1)^2$

$=4n^2+4n+1-(4n^2-4n+1)$

$=8n$

$\therefore a_n$ 能被 8 整除.

(2) 由 (1) 知 $a_n=8n$，

当 $n=2$ 时，$a_2=16=4^2$，是完全平方数；

当 $n=8$ 时，$a_8=64=8^2$，是完全平方数；

当 $n=18$ 时，$a_{18}=144=12^2$，是完全平方数；

当 $n=32$ 时，$a_{32}=256=16^2$，是完全平方数.

这一系列数中从小到大排列的前 4 个完全平方数依次为：16、64、144、256.

由 a_2、a_8、a_{18}、a_{32} 四个完全平方数可知 $n=2\times m^2$，

所以 n 为一个完全平方数两倍时，a_n 是完全平方数.

【点评】本题主要考查了数字的变化规律，利用代数式来表示一般规律，利用已总结的规律进一步探索、发现、归纳得出下一步结论是本题难点.

题目 20 (2023·新华区校级二模)【发现】如果一个整数的个位数字能被 5 整除，那么这个整数就能被 5 整除.

【验证】如：$\because 345=100\times3+10\times4+5$，

又 $\because$ 100 和 10 都能被 5 整除，5 能被 5 整除，

$\therefore 100\times3+10\times4+5$ 能被 5 整除，

即：345 能被 5 整除.

(1) 请你照着上面的例子验证 343 不能被 5 整除；

(2) 把一个千位是 a、百位是 b、十位是 c、个位是 d 的四位数记为 $\overline{abcd}$. 请照例说明：只有 d 等于 5 或 0 时，四位数 $\overline{abcd}$ 才能被 5 整除.

【迁移】(3) 设 $\overline{abc}$ 是一个三位数，请证明：当 $a+b+c$ 的和能被 3 整除时，$\overline{abc}$ 能被 3 整除.

【分析】(1) 仿照所给的例子进行求解即可；

(2) 仿照所给的例子进行求解即可；

【迁移】仿照所给的例子进行求解即可.

【解答】证明：(1) $\because 343=100\times3+10\times4+3$，

100 和 10 都能被 5 整除，3 不能被 5 整除，

$\therefore 100\times3+10\times4+3$ 不能被 5 整除，

即 343 不能被 5 整除；

(2) $\because \overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$，

1000 和 100 和 10 都能被 5 整除，

$\therefore$ 当 d 能被 5 整除时，$1000a+100b+10c+d$ 能被 5 整除；

$\therefore$ 只有 d 等于 5 或 0 时，四位数 $\overline{abcd}$ 才能被 5 整除.

【迁移】证明：$\because \overline{abc}=100a+10b+c$，

$=(99+1)a+(9+1)b+c$

$=(99a+9b)+(a+b+c)$

$=3(33a+3b)+(a+b+c)$，

$\because 3(33a+3b)$ 能被 3 整除，

∴若“$a+b+c$”能被3整除，则$\overline{abc}$能被3整除.

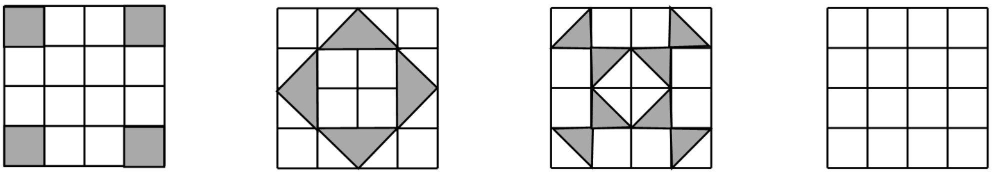
【点评】此题主要考查了整式的加减，列代数式，掌握相应的运算法则是解本题的关键.

题型二：图案规律中的猜想归纳思想

题目 21 (2023·枣庄)(1)观察分析：在一次数学综合实践活动中，老师向同学们展示了图①，图②，图③三幅图形，请你结合自己所学的知识，观察图中阴影部分构成的图案，写出三个图案都具有的两个共同特征：

轴对称图形，______；

(2)动手操作：请在图④中设计一个新的图案，使其满足你在(1)中发现的共同特征.



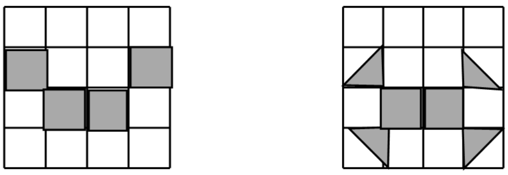
图①　图②　图③　图④

【分析】(1)观察图形可得出结论.

(2)根据发现的规律直接画出图形即可.

【解答】解：(1)观察图形可知：三个图形都为轴对称图形且面积相等，

故答案为：轴对称图形，面积相等.

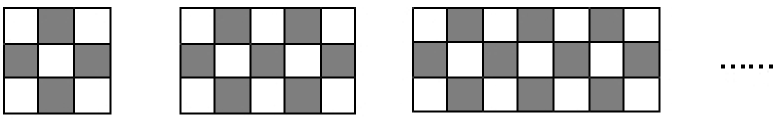


①　②

(2)如图：(答案不唯一)

【点评】本题考查了轴对称的知识，利用轴对称进行图形的变换是解题的关键.

题目 22 (2024·肥西县一模)用同样规格的黑白两种颜色的正方形，拼如图的方式拼图，请根据图中的信息完成下列的问题：



①　②　③

(1)在图②中用了__8__块白色正方形，在图③中用了______块白色正方形；

(2)按如图的规律继续铺下去，那么第n个图形要用______块白色正方形；

(3)如果有足够多的黑色正方形，能不能恰好用完2024块白色正方形，拼出具有以上规律的图形？如果可以请说明它是第几个图形；如果不能，说明你的理由.

【分析】(1)观察如图可直接得出答案；

(2)认真观察题目中给出的图形，结合问题(1)，通过分析，即可找到规律，得出答案；

(3)根据问题(2)中总结的规律，列出算式$3n+2=2024$，如果结果是整数，则能够拼出具有以上规律的图形，否则，不能.

【解答】解：(1)观察如图可以发现，图②中用了8块白色正方形，在图③中用了11块白色正方形；

故答案为：8，11；

(2)在图①中，需要白色正方形的块数为$3\times1+2=5$；

在图②中，需要白色正方形的块数为$3\times2+2=8$；

在图③中，需要白色正方形的块数为 $3\times3+2=11$；
由此可以发现，第几个图形，需要白色正方形的块数就等于3乘以几，然后加2.
所以，按如图的规律继续铺下去，那么第 n 个图形要用 $(3n+2)$ 块白色正方形；
故答案为：$(3n+2)$；
(3) 能恰好用完2024块白色正方形，理由如下：
假设第 n 个图形恰好能用完2021块白色正方形，则 $3n+2=2024$，
解得：$n=674$，
即第674个图形中恰好用完2024块白色正方形.
【点评】此题主要考查了列代数式这个知识点的理解和掌握，解答此类题目的关键是根据题目中给出的图形，通过分析、思考，总结出图形变化的规律.

题目 23 (2024•镜湖区校级一模) 将一些相同的"☆"按如图所示摆放，观察其规律并回答下列问题：

图1　　图2　　图3　　图4

(1) 图6中的"☆"的个数有 __35__ 个；
(2) 图 n 中的"☆"的个数有 ______ 个；
(3) 图 n 中的"☆"的个数可能是100个吗；如果能，求出 n 的值；如果不能，试用一元二次方程的相关知识说明理由.
【分析】(1) 图1中的"☆"的个数有 $1^2-1+5=5$ 个，图2中的"☆"的个数有 $2^2-2+5=7$ 个，图3中的"☆"的个数有 $3^2-3+5=11$ 个，图4中的"☆"的个数有 $4^2-4+5=17$ 个，由此得到规律求解即可；
(2) 根据 (1) 所求即可得到答案；
(3) 令 $n^2-n+5=100$，解方程求出 n 的值，看 n 是否是正整数即可得到答案.
【解答】解：(1) 图1中的"☆"的个数有 $1^2-1+5=5$ 个，
图2中的"☆"的个数有 $2^2-2+5=7$ 个，
图3中的"☆"的个数有 $3^2-3+5=11$ 个，
图4中的"☆"的个数有 $4^2-4+5=17$ 个，
……
$\therefore$ 可以得到规律，图 n 中的"☆"的个数有 (n^2-n+5) 个，
$\therefore$ 图6中的"☆"的个数有 $6^2-6+5=35$ 个，
故答案为：35；

(2) 由 (1) 得图 n 中的"☆"的个数有 (n^2-n+5) 个，
故答案为：(n^2-n+5)；

(3) 图 n 中的"☆"的个数不可能是100个，理由如下：
令 $n^2-n+5=100$，则 $n^2-n-95=0$，
解得 $n=\dfrac{1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-95)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{381}}{2}$，
又 $\because n$ 为整数，