专题 6.2　相似三角形中的动点问题

典例精析

【典例 1】如图 1，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$cm，$BC=8$cm，动点 P 从点 B 出发，在 BA 边上以每秒 5cm 的速度向点 A 匀速运动，同时动点 Q 从点 C 出发，在 CB 边上以每秒 4cm 的速度向点 B 匀速运动，运动时间为 t 秒$\left(0<t<2\right)$，连接 PQ.

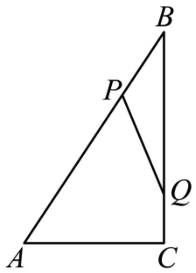


图1

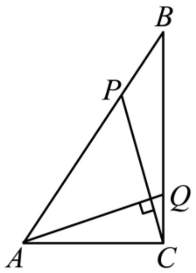


图2

（1）若$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似，求 t 的值；

（2）直接写出$\triangle BPQ$是等腰三角形时 t 的值；

（3）如图 2，连接 AQ、CP，若$AQ\perp CP$，求 t 的值.

【思路点拨】

（1）根据勾股定理可得$AB=10$cm，分两种情况：①$\triangle BPQ\sim\triangle BAC$，②$\triangle BPQ\sim\triangle BCA$，根据相似三角形的性质将$BP=5t$cm，$QC=4t$cm，$AB=10$cm，$BC=8$cm代入计算即可得；

（2）分三种情况：①当$PB=PQ$时，过 P 作$PH\perp BQ$，则$BH=\frac{1}{2}BQ=4-2t$，$PB=5t$，根据平行线分线段成比例定理得到$\frac{PB}{AB}=\frac{BH}{BC}$，进而即可求解；②当$PB=BQ$时，列出式子即可求解；③当$BQ=PQ$时，过 Q 作$QG\perp AB$于 G，则$BG=\frac{1}{2}PB=\frac{5}{2}t$，$BQ=8-4t$，通过$\triangle BGQ\sim\triangle BCA$，得到比例式进而即可求解；

（3）设 AQ，CP 交于点 N，过 P 作$PM\perp BC$于点 M，先根据相似三角形的判定与性质可得$PM=3t$cm，$BM=4t$cm，从而可得$MC=(8-4t)$cm，再证出$\triangle ACQ\sim\triangle CMP$，根据相似三角形的性质即可得.

【解题过程】

解：（1）$\because\angle ACB=90°$，$AC=6$cm，$BC=8$cm，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10(\text{cm})$，

由题意得：$BP=5t$cm，$QC=4t$cm，$BQ=BC-QC=(8-4t)$cm，

分以下两种情况讨论：

①当$\triangle BPQ\sim\triangle BAC$时，$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，

即$\frac{5t}{10}=\frac{8-4t}{8}$，

解得$t=1$；

②当$\triangle BPQ\sim\triangle BCA$时，$\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$，

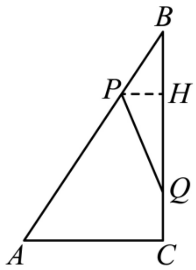
即$\frac{5t}{8}=\frac{8-4t}{10}$，

解得$t=\frac{41}{32}$，

综上，t 的值为 1 或$\frac{41}{32}$；

（2）解：分三种情况：

①当$PB=PQ$时，如图，过 P 作$PH\perp BQ$，



则$BH=\frac{1}{2}BQ=4-2t$，$PB=5t$，

$\because PH\perp BQ$，$AC\perp BC$，

$\therefore PH\parallel AC$，

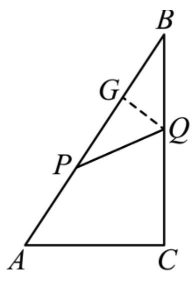
$\therefore\frac{PB}{AB}=\frac{BH}{BC}$，即$\frac{5t}{10}=\frac{4-2t}{8}$，

解得：$t=\frac{2}{3}$；

②当$PB=BQ$时，即$5t=8-4t$，

解得：$t=\frac{8}{9}$；

③当$BQ=PQ$时，如图，过 Q 作$QG\perp AB$于 G，



则$BG=\frac{1}{2}PB=\frac{5}{2}t$，$BQ=8-4t$，

$\because\angle QBG=\angle ABC$，$\angle BGQ=\angle BCA=90°$，

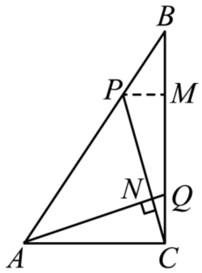
$\therefore\triangle BGQ\sim\triangle BCA$，

$\therefore\frac{BG}{BC}=\frac{BQ}{BA}$即$\frac{\frac{5}{2}t}{8}=\frac{8-4t}{10}$，

解得：$t=\frac{64}{57}$;

综上所述：$\triangle BPQ$是等腰三角形时 t 的值为：$\frac{2}{3}$或$\frac{8}{9}$或$\frac{64}{57}$;

（3）解：如图，设 AQ，CP 交于点 N，过 P 作$PM\perp BC$于点 M，



$\because PM\perp BC$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore PM\parallel AC$，

$\therefore\triangle BPM\sim\triangle BAC$，

$\therefore\frac{BP}{BA}=\frac{PM}{AC}=\frac{BM}{BC}$，即$\frac{5t}{10}=\frac{PM}{6}=\frac{BM}{8}$，

解得$PM=3t$cm，$BM=4t$cm，

$\therefore MC=BC-BM=(8-4t)$cm，

$\because\angle QAC+\angle NCA=90°$，$\angle PCM+\angle NCA=90°$，

$\therefore\angle QAC=\angle PCM$，

在$\triangle ACQ$和$\triangle CMP$中，$\begin{cases}\angle QAC=\angle PCM\\\angle ACQ=\angle CMP=90°\end{cases}$，

$\therefore\triangle ACQ\sim\triangle CMP$，

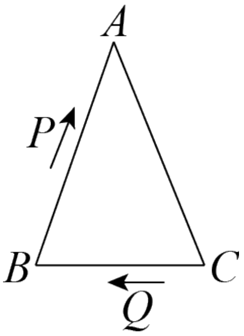
$\therefore\frac{AC}{CM}=\frac{CQ}{MP}$，即$\frac{6}{8-4t}=\frac{4t}{3t}$，

解得$t=\frac{7}{8}$，

经检验$t=\frac{7}{8}$是该分式方程的解．

学霸必刷

1．（2022·辽宁沈阳·九年级阶段练习）如图，在△ABC中，$AB=AC=8$，$BC=6$，点P从点B出发以 1 个单位长度/秒的速度向点A运动，同时点Q从点C出发以 2 个单位长度/秒的速度向点B运动，其中一点到达另一点即停．当以B，P，Q为顶点的三角形与△ABC相似时，运动时间为（　）



A．$\frac{24}{11}$秒　　B．$\frac{9}{5}$秒　　C．$\frac{24}{11}$秒或$\frac{9}{5}$秒　　D．以上均不对

【思路点拨】

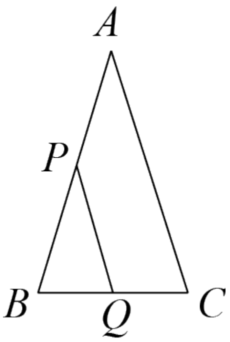
首先设t秒钟ΔABC与以B、P、Q为顶点的三角形相似，则$BP=t$，$CQ=2t$，$BQ=BC-CQ=6-2t$，然后分两种情况当$\Delta BAC\backsim\Delta BPQ$和当$\Delta BCA\backsim\Delta BPQ$讨论．

【解题过程】

解：设运动时间为t秒．

$BP=t$，$CQ=2t$，$BQ=BC-CQ=6-2t$，

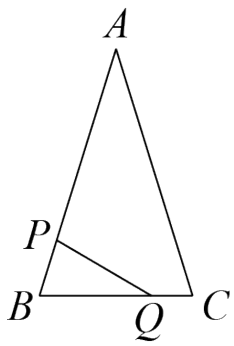
当$\Delta BAC\backsim\Delta BPQ$，$\frac{BP}{AB}=\frac{BQ}{BC}$，



即$\frac{t}{8}=\frac{6-2t}{6}$，

解得$t=\frac{24}{11}$；

当$\Delta BCA\backsim\Delta BPQ$，$\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{AB}$，



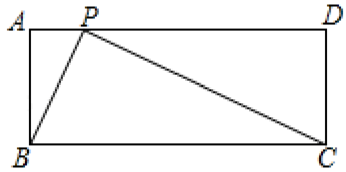
即$\frac{t}{6}=\frac{6-2t}{8}$，

解得$t=\frac{9}{5}$，

综上所述，当以B，P，Q为顶点的三角形与ΔABC相似时，运动时间为$\frac{24}{11}s$或$\frac{9}{5}s$，

故选：C．

2．（2022·全国·九年级课时练习）如图，矩形 $ABCD$ 中，AB＝3，BC＝10，点 P 是 AD 上的一个动点，若以 A，P，B 为顶点的三角形与△PDC 相似，则满足条件的点 P 的个数是（　　）



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【思路点拨】

设 AP＝x，则 PD＝AD﹣AP＝10﹣x，然后分类讨论：若∠APB＝∠DPC，则 Rt△APB∽Rt△DPC，得到比例式，代入求出即可；若∠APB＝∠PCD，则 Rt△APB∽Rt△DCP，得到比例式，代入求出即可．

【解题过程】

解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴AB＝DC＝3，AD＝BC＝10，∠A＝∠D＝90°，

设 AP＝x，则 PD＝AD﹣AP＝10﹣x，

若∠APB＝∠DPC，则 Rt△APB∽Rt△DPC，

∴$\frac{AP}{PD}=\frac{AB}{CD}$，即$\frac{x}{10-x}=\frac{3}{3}$，

解得：x＝5；

若∠APB＝∠PCD，则 Rt△APB∽Rt△DCP，

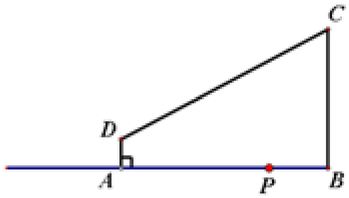
∴$\frac{AB}{DP}=\frac{AP}{CD}$，即$\frac{3}{10-x}=\frac{x}{3}$，

解得：$x=1$ 或 9；

所以当 $AP=1$ 或 5 或 9 时，以 P，A，B 为顶点的三角形与以 P，D，C 为顶点的三角形相似，即这样的 P 点有三个．

故选：C．

3．（2022·全国·九年级课时练习）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=2$㎝，$BC=6$㎝，$AB=7$㎝，点 P 是从点 B 出发在射线 BA 上的一个动点，运动的速度是 1㎝/s，连接 PC、PD．若$\triangle PAD$ 与$\triangle PBC$ 是相似三角形，则满足条件的点 P 个数是（　）



A．5 个　　B．4 个　　C．3 个　　D．2 个

【思路点拨】

设点 P 运动 t 秒时，$\triangle PAD$ 与$\triangle PBC$ 是相似三角形，分点 P 在线段 BA 上时和点 P 在线段 BA 的延长线上时两种情况进行讨论，每种情况下，分别求出当 $\triangle PAD \backsim \triangle PBC$ 或 $\triangle PAD \backsim \triangle CBP$ 时 t 的值，即可得出答案．

【解题过程】

解：∵$AD \parallel BC$，$\angle ABC=90°$，

∴$\angle BAD=\angle ABC=90°$，

设点 P 运动 t 秒时，$\triangle PAD$ 与$\triangle PBC$ 是相似三角形，

当点 P 在线段 BA 上时，

∵$AD=2$㎝，$BC=6$㎝，$AB=7$㎝，

∴$PB=t$，$PA=7-t$，

当$\triangle PAD \backsim \triangle PBC$时，有$\frac{PA}{PB}=\frac{AD}{BC}$，

∴$\frac{7-t}{t}=\frac{2}{6}$，解得 $t=\frac{21}{4}$，

当$\triangle PAD \backsim \triangle CBP$时，有$\frac{PA}{CB}=\frac{AD}{BP}$，

∴$\frac{7-t}{6}=\frac{2}{t}$，解得 $t=3$，$t=4$；

当点 P 在线段 BA 的延长线上时，$PB=\mathrm{t}$，$PA=t-7$，

同理：当$\triangle PAD\backsim\triangle PBC$时，解得$t=\frac{21}{2}$；

当$\triangle PAD\backsim\triangle CBP$时，解得$t=\frac{7\pm\sqrt{97}}{2}$，

$\because t>0$，

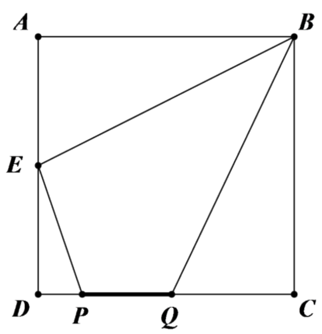
$\therefore t=\frac{7+\sqrt{97}}{2}$，

综上所述，$t=\frac{21}{4}$或$t=3$或$t=4$或$t=\frac{21}{2}$或$t=\frac{7+\sqrt{97}}{2}$，

即满足条件的点P共有5个，故A正确．

故选：A．

4．（2022·全国·九年级专题练习）如图，正方形$ABCD$边长为8，E为AD中点，线段PQ在边DC上从左向右以1个单位/秒的速度运动，$PQ=3$，从P点与D点重合时开始计时，到Q点与C点重合时停止，设运动时间为t秒，连结BE、EP、BQ，在运动过程中，下列4个结论：①当$t=1$时，$\triangle BAE\cong\triangle BCQ$；②只有当$t=\frac{5}{3}$时，以点$E$、$D$、$P$构成的三角形与$\triangle BCQ$相似；③四边形$EPQB$的周长最小等于$16+4\sqrt{5}$；④四边形$EPQB$的面积最大等于38．其中正确的有（　　）



A．1个　　　　B．2个　　　　C．3个　　　　D．4个

【思路点拨】

根据“SAS”即可判断①；根据相似三角形的性质，列出比例式，即可判断②，用含t的代数式表示出$EP+BQ$，结合两点间的距离公式以及对称性，即可求出$EP+BQ$的最小值，进而即可判断③；用含t的代数式表示四边形$EPQB$的面积，结合$0\le t\le 5$，即可判断④．

【解题过程】

解：由题意得：当$t=1$时，$CQ=8-3-1=4$，$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 8=4$，

$\therefore AE=CQ$，

$\because$在正方形$ABCD$中，$\angle A=\angle C=90°$，$AB=CB$，

∴$\triangle BAE\cong\triangle BCQ$，故①正确；

∵$\angle D=\angle C=90°$，

∴点$E、D、P$构成的三角形与$\triangle BCQ$相似时，$\frac{ED}{DP}=\frac{BC}{CQ}$或$\frac{ED}{DP}=\frac{CQ}{BC}$，

∴$\frac{4}{t}=\frac{8}{8-3-t}$或$\frac{4}{t}=\frac{8-3-t}{8}$，解得：$t=\frac{5}{3}$或无解，

∴②正确；

∵$EP=\sqrt{4^2+t^2}=\sqrt{(t-0)^2+(0-4)^2}$，$BQ=\sqrt{8^2+(5-t)^2}=\sqrt{(t-5)^2+(0-8)^2}$

∴$EP+BQ$ 可以看作是点$(t，0)$到点$(0，4)$与点$(5，8)$的距离之和，

∴$EP+BQ$ 的最小值=点$(0，-4)$与点$(5，8)$的距离$=\sqrt{(0-5)^2+(-4-8)^2}=13$，

∴四边形$EPQB$的周长最小值$=BE+PQ+13=\sqrt{4^2+8^2}+3+13=16+4\sqrt{5}$，

故③正确；

∵四边形$EPQB$的面积$=8\times8-\frac{1}{2}AB\cdot AE-\frac{1}{2}DE\cdot DP-\frac{1}{2}QC\cdot BC=$

$64-16-\frac{1}{2}\cdot4t-\frac{1}{2}(5-t)\times8=2t+28$，

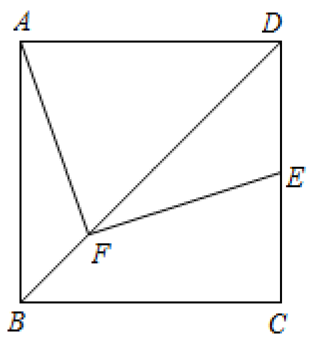
又∵$0\le t\le5$，

∴四边形$EPQB$的面积最大值$=2\times5+28=38$，

故④正确．

故选 D．

5．（2022·全国·九年级课时练习）如图，有一正方形$ABCD$，边长为$6\sqrt{2}$，E是边CD上的中点，对角线BD上有一动点F，当$\triangle ABF$与$\triangle DEF$相似时，BF的值为__________．



【思路点拨】

根据勾股定理和相似三角形的性质得出比例式解答即可．

【解题过程】

解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形

∴ $BC=CD=6\sqrt{2}$，$\angle C=90°$

∵E是边CD上的中点

∴$DE=CE=\frac{1}{2}CD=3\sqrt{2}$

在 $Rt\triangle BCD$ 中，由勾股定理得

$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2}=12$

设 $BF=x$，则有 $DF=12-x$，

①当$\triangle ABF\backsim\triangle FDE$ 时，

由$\frac{DF}{BA}=\frac{DE}{BF}$ ，即$\frac{12-x}{6\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{x}$,

解得 $x=6$.

②当$\triangle ABF\backsim\triangle EDF$ 时，

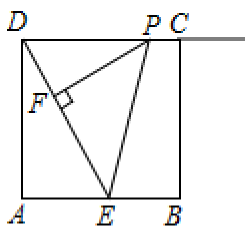
由$\frac{DF}{BF}=\frac{DE}{BA}$，即$\frac{12-x}{x}=\frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$,

解得，$x=8$，

综上所述，BF 的值为 6 或 8.

故答案为：6 或 8.

6．（2022·全国·九年级单元测试）如图，在边长为 2 个单位长度的正方形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，点 P 从点 D 出发沿射线 DC 以每秒 1 个单位长度的速度运动，过点 P 作 $PF\perp DE$ 于点 F，当运动时间为______秒时，以 P、F、E 为顶点的三角形与$\triangle AED$ 相似.



【思路点拨】

分两种情形：①如图，当$\triangle PFE\backsim\triangle EAD$ 时，②如图，当$\triangle EFP\backsim\triangle EAD$ 时，分别求解即可.

【解题过程】

解：①如图，当$\triangle PFE\backsim\triangle EAD$ 时，

∴$\angle ADE=\angle FEP$，

∴$AD\parallel PE$，

$\therefore PE\perp CD$，

∴四边形 $AEPD$ 是矩形，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，E 是 AB 的中点，

$\therefore t=DP=AE=1$；

②如图，当$\triangle EFP\backsim\triangle EAD$ 时，

$\therefore \angle ADE=\angle FPE$，$\angle AED=\angle FEP$，

$\because DC\parallel AB$，

$\therefore \angle AED=\angle CDE$，

$\therefore \angle FEP=\angle CDE$，

$\therefore PD=PE$，

∴PF 是 DE 的垂直平分线，

∴F 为 DE 中点，

$DE=\sqrt{AE^2+AD^2}=\sqrt{5}$，

$EF=DF=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because \frac{DA}{PF}=\frac{AE}{EF}=\frac{DE}{EP}$，

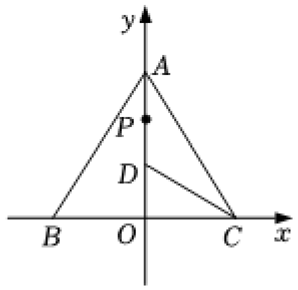
即$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{DP}$，

解得 $t=DP=\frac{5}{2}$，

综上所述，满足条件的 t 的值为 $1s$ 或$\frac{5}{2}s$.

故答案为：1 或$\frac{5}{2}$.

7．（2022·广东佛山·九年级期末）如图，$\triangle ABC$ 中 $AB=AC$，$A(0，8)$，$C(6，0)$，D 为射线 AO 上一点，一动点 P 从 A 出发，运动路径为 $A\to D\to C$，点 P 在 AD 上的运动速度是在 CD 上的$\frac{5}{3}$倍，要使整个运动时间最少，则点 D 的坐标应为____________.

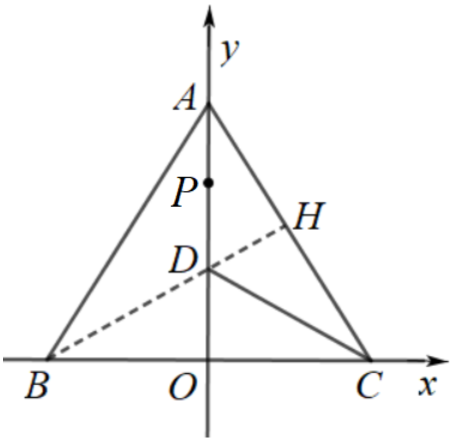


【思路点拨】

过B点作$BH\perp AC$交于H点，交AO于D点，连接CD，设P点的运动时间为t，在CD上的运动速度为v，$t=\frac{1}{v}(\frac{AD}{\frac{5}{3}}+CD)$，只需$\frac{AD}{\frac{5}{3}}+CD$最小即可，再证明$\Delta ADH\backsim\Delta ACO$，可得$DH=\frac{AD}{\frac{5}{3}}$，则当$B$、$D$、$H$点三点共线时，此时$t$有最小值，再由$\Delta BDO\backsim\Delta ADH$，求出$OD$即可求坐标.

【解题过程】

解：过B点作$BH\perp AC$交于H点，交AO于D点，连接CD，



$\because AB=AC$，

$\therefore BD=CD$，

设P点的运动时间为t，在CD上的运动速度为v，

$\because$点P在AD上的运动速度是在CD上的$\frac{5}{3}$倍，

$\therefore t=\frac{AD}{\frac{5}{3}v}+\frac{CD}{v}=\frac{1}{v}(\frac{AD}{\frac{5}{3}}+CD)$，

$\because \angle AHD=\angle AOC=90°$，

$\therefore \Delta ADH\backsim\Delta ACO$，

$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{DH}{CO}$，

$\because A(0,8)$，$C(6,0)$，

$\therefore OC=6$，$OA=8$，

$\therefore AC=10$，

$\therefore \frac{AD}{10}=\frac{DH}{6}$，

$\therefore DH=\frac{AD}{\frac{5}{3}}$，

$\therefore t=\frac{1}{v}(DH+CD)$，

当B、D、H点三点共线时，$t=\frac{1}{v}\times BH$，此时t有最小值，

$\because \angle BDO=\angle ADH$，

$\therefore \angle DBO=\angle OAC$，

$\therefore \Delta BDO\backsim\Delta ADH$，

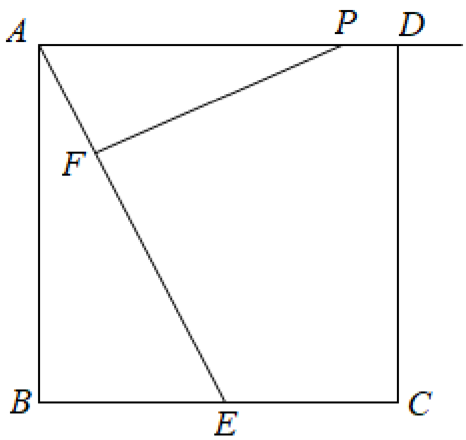
$\therefore\ \frac{DO}{BO}=\frac{OC}{AO}$，即$\frac{DO}{6}=\frac{6}{8}$，

$\therefore DO=\frac{9}{2}$，

$\therefore D(0,\frac{9}{2})$，

故答案为：$(0,\frac{9}{2})$．

8．（2022·湖北武汉·一模）如图，正方形$ABCD$的边长为4，E是BC的中点，点P在射线AD上，过点P作$PF\perp AE$，垂足为F．当点P在射线AD上运动时，若以P、F、E为顶点的三角形与$\triangle ABE$相似，则PA的值为______．



【思路点拨】

点P在射线AD上运动，分在线段 AD 上和线段 AD 的延长线上两种情况讨论，由相似三角形的性质可得答案．

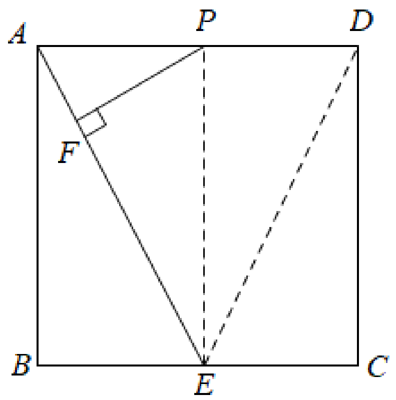
【解题过程】

解：$\because E$是BC的中点，

$\therefore BE=2$，

如图，若$\triangle EFP\backsim\triangle ABE$，

则$\angle PEF=\angle EAB$ ．

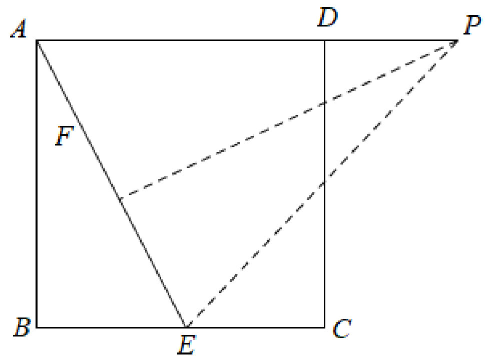


$\therefore PE//AB$.

∴四边形$ABEP$为矩形．

∴PA=EB=2，

如图，若$\triangle PFE\backsim\triangle ABE$，则$\angle PEF=\angle AEB$.



$\because\angle PAF=\angle AEB$，

$\therefore\angle PEF=\angle PAF$，

$\therefore PE=PA$.

$\because PF\perp AE$，

∴点F为AE的中点.

$\because AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AE=\sqrt{5}$，

$\because\frac{PE}{AE}=\frac{EF}{BE}$，

即$\frac{PE}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

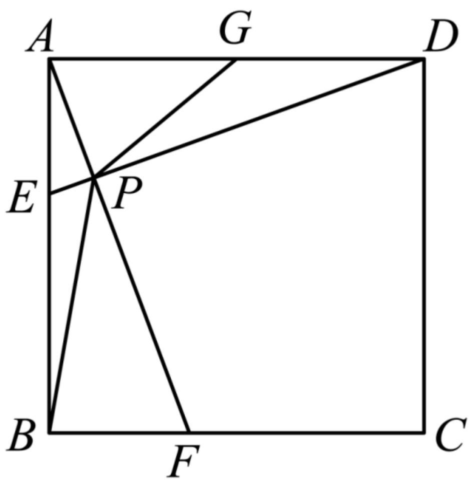
$\therefore PE=5$

$\therefore PA=PE=5$

综上所述：AP的值为2或5，

故答案为：2或5．

9．（2022·浙江绍兴·九年级期末）如图，边长为5cm的正方形$ABCD$，E，F分别从A，B两点同时出发，以1cm/s速度沿射线AB，射线BC运动，连结AF，DE交于点P，G为AD中点，连结PG，PB，若$\triangle PDG$与$\triangle ABP$相似，则运动时间t的值为______．



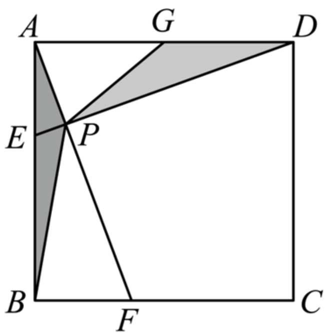
【思路点拨】

分两种情况：①E点在AB上；②E点在AB延长线上；根据相似三角形的性质得到比例式求出运动时间t即可．

【解题过程】

解：分两种情况：

①如图1，E点在AB上时，



$\because AD=BA, AE=BF, \angle DAE=\angle ABF=90°$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAF(SAS)$，

$\therefore DE=AF$，$\angle ADE=\angle BAF$，

$\because \angle ADE+\angle DEA=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BAF+\angle DEA=90^{\circ}$，

$\therefore \angle APD=90^{\circ}$，$AF\perp DE$.

$DE=\sqrt{5^2+t^2}=\sqrt{25+t^2}$，

$AP=\frac{AD\cdot AE}{DE}=\frac{5t\sqrt{25+t^2}}{25+t^2}$，

$DP=\sqrt{25-\frac{25t^2}{25+t^2}}$，

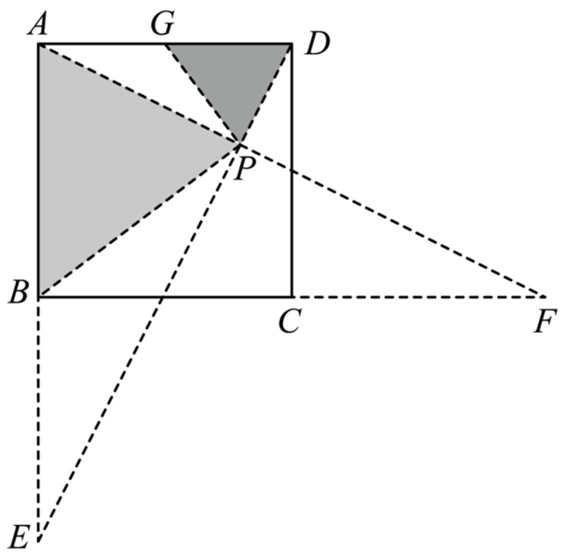
$\because \Delta PDG\backsim\Delta BAP$，

$\therefore \angle PDG=\angle BAP$，$\angle PGD$与$\angle BPA$是钝角，

$\therefore\ \frac{DG}{AP}=\frac{PD}{BA}$，即$\frac{5\div 2}{\frac{5t\sqrt{25+t^2}}{25+t^2}}=\frac{\sqrt{25-\frac{25t^2}{25+t^2}}}{5}$，

解得$t=5$；

②如图 2，E点在AB延长线上时，



$\because AD=BA,AE=BF,\angle DAE=\angle ABF=90^{\circ}$，

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle BAF(SAS)$，

$\therefore DE=AF$，$\angle ADE=\angle BAF$，

$\because \angle ADE+\angle DEA=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BAF+\angle DEA=90^{\circ}$，

$\therefore \angle APD=90^{\circ}$，$AF\perp DE$.

$DE=\sqrt{5^2+(5+t)^2}$，

$AP=\frac{AD\cdot AE}{DE}=\frac{5(5+t)}{\sqrt{5^2+(5+t)^2}}$，

$DP=\sqrt{25-\frac{25(5+t)^2}{25+(5+t)^2}}$，

∵ $\triangle PDG$与$\triangle ABP$，分论讨论，

当$\Delta PDG\backsim\Delta BAP$，

∴ $\frac{DG}{AP}=\frac{PD}{BA}$，即$\frac{5\div 2}{\frac{5(5+t)}{\sqrt{25+(5+t)^2}}}=\frac{\sqrt{25-\frac{25(5+t)^2}{25+(5+t)^2}}}{5}$，

解得$t=0$，即用时 5 秒，不合题意舍去；

当$\Delta PDG\backsim\Delta PAB$，

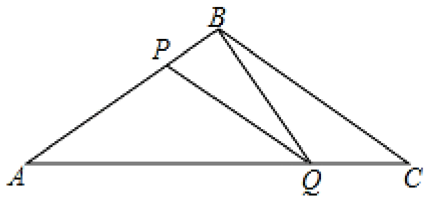
∴ $\frac{DG}{AB}=\frac{PD}{PA}$，即$\frac{5\div 2}{5}=\frac{\sqrt{25-\frac{25(5+t)^2}{25+(5+t)^2}}}{\frac{5(5+t)}{\sqrt{25+(5+t)^2}}}$，

解得$t=5$，即用时 10 秒，符合题意；

综上：若$\triangle PDG$与$\triangle ABP$相似，则运动时间 t 的值为 5 或 10，

故答案为：5 或 10．

10．（2022·辽宁·鞍山市第二十六中学九年级阶段练习）如图，在△ABC 中，$BA=BC=20$cm，$AC=30$cm，点 P 从点 A 出发，沿 AB 以 4cm/s 的速度向点 B 运动，同时点 Q 从点 C 出发，沿 CA 以 3cm/s 的速度向点 A 运动，当其中一点到达终点时，另一点也停止运动，设运动时间为 xs．



(1)当$PQ\parallel BC$时，求 x 的值．

(2)△APQ 与△CQB 能否相似？若能，求出 AP 的长；若不能，请说明理由．

【思路点拨】

（1）利用平行线分线段对应成比例，列比例式进行计算即可；

（2）分类讨论：①△APQ∽△CQB，②当△APQ∽△CBQ，利用相似的性质，对应边对应成比例，列式计算即可．

【解题过程】

（1）解：当$PQ\parallel BC$时，AP：$AB=AQ$：AC，

$\because AP=4x$，$AQ=30-3x$，

$\therefore\frac{4x}{20}=\frac{30-3x}{30}$，

解得：$x=\frac{10}{3}$；

（2）解：$\because BA=BC$

$\therefore\angle A=\angle C$，

①当$\triangle APQ\backsim\triangle CQB$时，有$\frac{AP}{CQ}=\frac{AQ}{BC}$，

即：$\frac{4x}{3x}=\frac{30-3x}{20}$，

解得：$x=\frac{10}{9}$，

$\therefore AP=4x=\frac{40}{9}$（cm），

②当$\triangle APQ\backsim\triangle CBQ$时，有$\frac{AP}{BC}=\frac{AQ}{CQ}$，

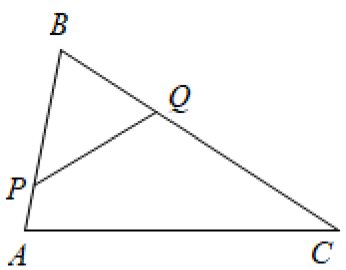
即：$\frac{4x}{20}=\frac{30-3x}{3x}$，

解得：$x=5$或$x=-10$（舍去），

$\therefore PA=4x=20$（cm），

综上所述，当$AP=\frac{40}{9}$cm或20cm时，$\triangle APQ$与$\triangle CQB$相似．

11．（2022·福建省大田县教师进修学校九年级期中）如图，在三边互不相等的$\triangle ABC$中，$AB=8\text{cm}$，$BC=16\text{cm}$．动点P从A开始沿AB边运动，速度为2cm/秒，动点Q同时从点B开始沿BC边运动，速度为4cm/秒，当点P到达点B时，P，Q就不再运动．设P，Q两点运动时间为x秒，解决以下问题：



(1)证明：当$x=2$时，$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$；

(2)若$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似，求x的值．

【思路点拨】

（1）根据$x=2$，动点P的速度为2cm/秒，动点Q的速度为4cm/秒，求出$AP=2\times2=4$，$BQ=2\times4=8$，

得到$BP=AB-AP=4$，推出$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{1}{2}$， 根据$\angle B=\angle B$，判定$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$；

（2）根据$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似，分$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$或$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$两种情况，当$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$时，推出$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，得到$\frac{8-2x}{8}=\frac{4x}{16}$，解得$x=2$；当$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$时，推出$\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$，得到$\frac{8-2x}{16}=\frac{4x}{8}$，解得$x=0.8$．

【解题过程】

解：（1）当$x=2$时，$AP=2\times2=4$，$BQ=2\times4=8$，

$\therefore BP=AB-AP=4$，

$\therefore\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{1}{2}$，

又$\because\angle B=\angle B$，

$\therefore\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$，

（2）$\because\triangle ABC$的三边互不相等，

$\therefore$若$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似，则$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$或$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$，

当$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$时，$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，

$\therefore\frac{8-2x}{8}=\frac{4x}{16}$，

解得$x=2$，

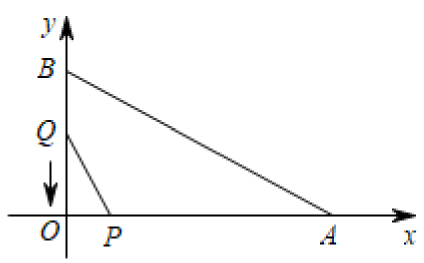
当$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$时，$\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$，

$\therefore\frac{8-2x}{16}=\frac{4x}{8}$，

解得$x=0.8$．

$\therefore$若$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似，则$x=2$或$x=0.8$．

12．（2022·山东·滕州市南沙河镇中学九年级期中）在平面直角坐标系中，已知$OA=10\text{cm}$，$OB=5\text{cm}$，点P从点O开始沿OA边向点A以2cm/s的速度移动；点Q从点B开始沿BO边向点O以1cm/s的速度移动．如果P、Q同时出发，用$t(\text{s})$表示移动的时间$(0\leqslant t\leqslant5)$．



(1)用含t的代数式表示：线段$PO=$____cm；$OQ=$____cm．

(2)求当t为何值时，四边形$PABQ$的面积为19cm^2．

(3)当$\triangle POQ$与$\triangle AOB$相似时，求出t的值．

(4)求当t为何值时，线段PQ分三角形AOB的面积比为$6:19$．

【思路点拨】

（1）根据P,Q的速度，即可表示出PO,OQ的长度；

（2）由$S_{四边形PABQ}=S_{\triangle ABO}-S_{\triangle POQ}$，代入即可；

（3）由题意知：分两种情况$\frac{OP}{OA}=\frac{OQ}{OB}$或$\frac{OP}{OB}=\frac{OQ}{OA}$，分别代入计算即可；

（4）当线段PQ分三角形面积比为$6:19$时，则$S_{\triangle OPQ}=\frac{6}{25}S_{\triangle AOB}$或$S_{\triangle OPQ}=\frac{19}{25}S_{\triangle AOB}$，从而解决问题．

【解题过程】

解：（1）解：$PO=2t$ cm，$OQ=(5-t)\text{cm}$，

故答案为：$2t$，$(5-t)$；

（2）$\because S_{四边形PABQ}=S_{\triangle ABO}-S_{\triangle POQ}$，

即$19=\frac{1}{2}\times10\times5-\frac{1}{2}\times2t\times(5-t)$，

解得：$t=2$或 3，

$\therefore$当$t=2$或 3 时，四边形$PABQ$的面积为19cm^2；

（3）$\because\triangle POQ$与$\triangle AOB$相似，$\angle POQ=\angle AOB=90°$，

$\therefore\ \frac{OP}{OA}=\frac{OQ}{OB}$或$\frac{OP}{OB}=\frac{OQ}{OA}$，

①当$\frac{OP}{OA}=\frac{OQ}{OB}$时，

则$\frac{2t}{10}=\frac{5-t}{5}$，

$\therefore t=\frac{5}{2}$，

②当$\frac{OP}{OB}=\frac{OQ}{OA}$时，

则$\frac{2t}{5}=\frac{5-t}{10}$，

$\therefore t=1$，

综上所述，当$t=\frac{5}{2}$或 1 时，$\triangle POQ$与$\triangle AOB$相似；

（4）当线段PQ分三角形AOB的面积比为$6:19$时，