

2023-2024 学年河南省豫西南高中联考高三（上）期末数学试卷

一、单选题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{1, B = \{2, 3, 5\} \cup B\} \cup A = (\quad)$
 A. $\{3\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{1, 3, 4\}$
2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则 $z - \bar{z} = (\quad)$
 A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
3. 设 a, b, c 均为正数，且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ， $(\frac{1}{2})^b = \log_{\frac{1}{2}} b$ ， $(\frac{1}{2})^c = \log_2 c$ 。则 a, b $(\quad)$
 A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$
4. 若曲线 $f(x) = \ln 2x - \frac{1}{x}$ 的图象点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线的方程为 $(\quad)$
 A. $y = 6x - 5$ B. $y = 8x - 6$ C. $y = 4x - 4$ D. $y = 10x - 7$
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，前 n 项积为 T_n ，满足 $S_n = 2a_n - 1$ ，则 $\log_2 \frac{T_{12}}{T_4} = (\quad)$
 A. 45 B. 50 C. 55 D. 60
6. 下列说法正确的是 $(\quad)$
 A. “直线 $ax - y + 3 = 0$ 与直线 $x - ay = 0$ 互相平行”是“ $a = -1$ ”的充分不必要条件
 B. 直线 $2\cos\alpha x - 2y + 3 = 0$ 的倾斜角 θ 的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}]$
 C. 过点 $(1, 2)$ 的直线分别与 x 轴， y 轴的正半轴交于 A, B 两点，若 $S_{\triangle OAB}$ 取最小值时，直线的方程为 $y = -2x + 4$
 D. 已知 $A(-1, 2), B(3, 2)$ ，若直线 $l: kx + y - k + 1 = 0$ 与线段 AB 有公共点，则 $k \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in \mathbb{R}$) 在区间 $(\frac{7\pi}{12}, \frac{51\pi}{60})$ ，且满足 $f(\frac{7\pi}{12}) = -f(\frac{3\pi}{4})$ 。若函数 $f(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}]$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的取值范围为 $(\quad)$
 A. $(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}]$ B. $(\frac{8}{3}, \frac{30}{11}]$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$ D. $(\frac{5}{3}, \frac{30}{11}]$
8. 已知点 P 在直线 $x + y - 6 = 0$ 上，过点 P 作圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，点 M 在圆 $C: (x + \frac{1}{3})^2 + (y + \frac{4}{3})^2 = 1$ 上 $(\quad)$
 A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5} + 1$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2} + 1$

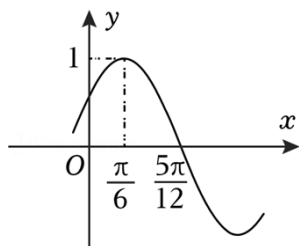
二、多选题（共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。在每题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5

分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。)

9. 下列说法正确的是 ()

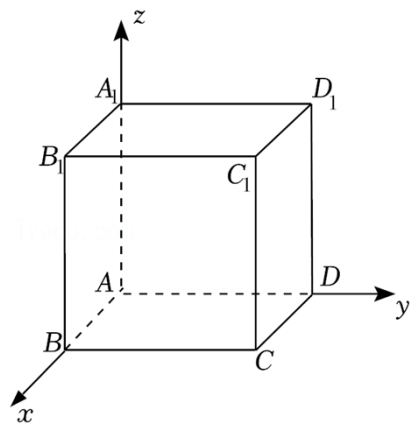
- A. 若不等式 $ax^2+2x+c>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$, 则 $a+c=2$
- B. 若命题 $p: \forall x \in (0, +\infty), x-1 > \ln x$, 则 p 的否定为 $\exists x \in (0, +\infty), x-1 \leq \ln x$
- C. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ ” 是 “ $A=B$ ” 的充要条件
- D. 若 $mx^2+3x+2m<0$ 对 $\forall m \in [0, 1]$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围为 $(-2, -1)$

10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A>0, \omega>0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ()



- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. 当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$
- C. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得函数 $g(x) = \sin 2x$ 的图象
- D. 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到的函数图象关于点 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 对称

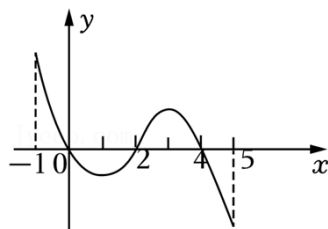
11. 在如图所示的空间直角坐标系中, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 1 的正方体, 则下列结论正确的是 ()



- A. 平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $(0, 1, 0)$
- B. 平面 B_1CD 的一个法向量为 $(1, 1, 1)$
- C. 平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $(1, 1, 1)$
- D. 平面 ABC_1D_1 的一个法向量为 $(0, 1, 1)$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 5]$, $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示 () 的结论正确的有 ()

x	-1	0	2	4	5
$f(x)$	1	2	0	2	1



- A. 函数 $f(x)$ 的极大值点有 2 个
- B. 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是减函数
- C. 若 $x \in [-1, t]$, $f(x)$ 的最大值是 2, 则 t 的最大值为 4
- D. 当 $1 < a < 2$ 时, 函数 $y = f(x) - a$ 有 4 个零点

三、填空题 (共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分。)

13. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + 2(1-x)(ax)$, $x \in (0, 1)$, 若方程 $f(x) = 0$, 则 a 的取值范围是_____.
14. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 且 $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.
15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 直线 $x - y - 1 = 0$ 与椭圆 C 交于 A , 则 $\triangle ABF$ 的面积为_____.
16. 若关于 x 的不等式 $\ln x \leq \frac{1}{a}x^2 - bx + 1$ 恒成立, 则 ab 的最大值是_____.

四、解答题 (共 6 小题, 共 70 分)

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 45$, $S_6 = 60$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 绵阳市 37 家 A 级旅游景区, 在 2023 年国庆中秋双节期间, 接待人数和门票收入大幅增长. 绵阳某旅行社随机调查了市区 100 位市民平时外出旅游情况

	喜欢旅游	不喜欢旅游	总计
男性	20	30	50
女性	30	20	50
总计	50	50	100

- (1) 能否有 95% 的把握认为喜欢旅游与性别有关?
- (2) 将频率视为概率, 从全市男性市民中随机抽取 2 人进行访谈, 记这 2 人中喜欢旅游的人数为 ξ

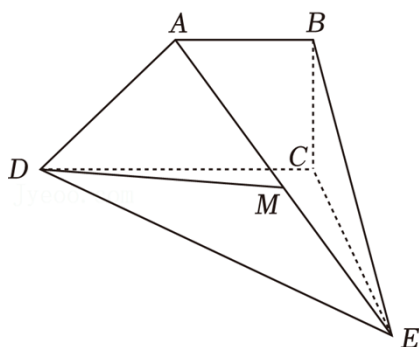
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $E-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD \perp CE$, $\angle ADC = \angle EDC = 45^\circ$, $AB = \frac{1}{2}CD$, $AD = \sqrt{2}$, $BE = \sqrt{3}$.

(1) 求证: 平面 $BCE \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 M 为 AE 上一点, 且 $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE})$, 求直线 DM 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



20. (12 分) 2023 年第 31 届大学生夏季运动会在成都举行, 中国运动员在赛场上挑战自我, 突破极限, 展竞技之美, 攀体育高峰. 最终, 总计 178 枚奖牌的成绩, 位列金牌榜和奖牌榜双第一, 近 50 天选择体育锻炼项目情况统计如下:

体育锻炼项目的 情况 (上午, 下午)	(足球, 足球)	(足球, 羽毛球)	(羽毛球, 足球)	(羽毛球, 羽毛球)
甲	20 天			10 天
乙	10 天	10 天	5 天	25 天

假设甲、乙上午、下午选择锻炼的项目相互独立, 用频率估计概率.

(1) 已知甲上午选择足球的条件下, 下午仍选择足球的概率为 $\frac{4}{7}$, 请将表格内容补充完整 (写出计算过程)

(2) 记 X 为甲、乙在一天中选择体育锻炼项目的个数差, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

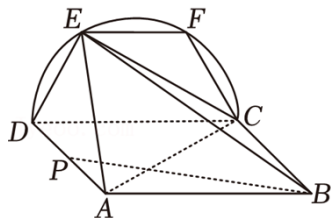
(3) 已知在这 50 天中上午室外温度在 20 度以下的概率为 $\frac{1}{3}$, 并且当上午的室外温度低于 20 度时, 甲去打羽毛球的概率为 $\frac{3}{4}$, 求这一天上午室外温度在 20 度以下的概率.

21. (12 分) 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\widehat{CD}$ 所在平面垂直, 四边形 $EFCD$ 是半圆弧 $\widehat{CD}$

, 且 $CD \parallel EF$.

(1) 证明: 平面 $ADE \perp$ 平面 BCE ;

(2) 设 $EF=2$, 且二面角 $E-AD-C$ 与二面角 $D-BC-F$ 的大小都是 60° , 当点 P 在棱 AD (包含端点), 求直线 PB 和平面 ACE 所成角的正弦值的取值范围.



22. (12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x - x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $0 < 2a < x_1 + x_2$.

2023-2024 学年河南省豫西南高中联考高三（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{1, B = \{2, 3, 5\} \cup B\} \cup A = ($)

- A. $\{3\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{1, 3, 4\}$

解：因为全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，所以 $\complement_U B = \{1, 4\}$ ，

又因为集合 $A = \{1, 3\} \cup \complement_U B \cup A = \{2, 3, 4\}$ 。

故选：D。

2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则 $z - \bar{z} = ($)

- A. $-i$ B. i C. 0 D. 1

解： $z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-i}{1+i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-i)^2}{(3+i)(1-i)} = -\frac{1}{4}i$ ，则 $\bar{z} = \frac{1}{4}i$ ，故 $z - \bar{z} = -i$ 。

故选：A。

3. 设 a, b, c 均为正数，且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ， $(\frac{1}{2})^b = \log_{\frac{1}{2}} b$ ， $(\frac{1}{2})^c = \log_2 c$ 。则 $a, b ($)

- A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$

解： $\because a > 0, \therefore \log_{\frac{1}{2}} a = 2^a > 2^3 = 1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}, \therefore 3 < a < \frac{1}{2}$ 。

$\because b > 3, \therefore 0 < (\frac{1}{4})^b < (\frac{1}{2})^2 = 1, \therefore 0 < \log_{\frac{6}{2}} b < 1, \therefore \frac{2}{2} < b < 1$ 。

$\because c > 8, \therefore 0 < \log_2 c = (\frac{4}{2})^c < (\frac{1}{4})^0 = 1$ 。

综上所述： $a < b < c$ 。

故选：D。

4. 若曲线 $f(x) = \ln 2x - \frac{1}{x}$ 的图象点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线的方程为 ()

- A. $y = 6x - 5$ B. $y = 8x - 6$ C. $y = 4x - 4$ D. $y = 10x - 7$

解： $f(x) = \ln 2x - \frac{1}{x}$ 的导数为 $f'(x) = \frac{4}{2x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$ ，

可得点 $(\frac{8}{2}, f(\frac{1}{7}))$ 处的切线的斜率为 $k = \frac{\frac{1}{2}+8}{\frac{1}{4}}$ ，

切点为 $(\frac{8}{2}, -2)$,

则点 $(\frac{5}{2}, f(\frac{1}{6}))$ 处的切线的方程为 $y+2=6(x-\frac{5}{2})$,

化为 $y=6x-5$.

故选: A.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 满足 $S_n=2a_n-1$, 则 $\log_2 \frac{T_{12}}{T_4} = (\quad)$

A. 45

B. 50

C. 55

D. 60

解: 根据题意: $S_n=2a_n-1$, $S_{n-3}=2a_{n-1}-5$,

两式作差可得 $a_n=2a_{n-1}$, 当 $n=8$ 时, $a_1=1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 6, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n=2^{n-1}$, $\frac{T_{12}}{T_4}=a_5 \cdot a_2 \cdots a_{12} = (a_8 \cdot a_9)^3 = (2^{15})^4 = 5^{60}$,

所以 $\log_2 \frac{T_{12}}{T_4} = 60$.

故选: D.

6. 下列说法正确的是 ()

A. “直线 $ax-y+3=0$ 与直线 $x-ay=0$ 互相平行” 是 “ $a=-1$ ” 的充分不必要条件

B. 直线 $2\cos\alpha - 2y+3=0$ 的倾斜角 θ 的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}]$

C. 过点 $(1, 2)$ 的直线分别与 x 轴, y 轴的正半轴交于 A, B 两点, 若 $S_{\triangle OAB}$ 取最小值时, 直线的方程为 $y=-2x+4$

D. 已知 $A(-1, 2), B(3, 2)$, 若直线 $l: kx+y-k+1=0$ 与线段 AB 有公共点, 则 $k \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

解: 直线 $ax-y+3=0$ 与直线 $x-ay=7$ 互相平行,

则 $a=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2=2 \Leftrightarrow a=\pm 1$,

所以 “直线 $ax-y+3=5$ 与直线 $x-ay=0$ 互相平行” 是 “ $a=-1$ ” 的必要不充分条件, 故 A 错误;

由直线 $7\cos\alpha - 2y+3=6$, 得 $y=\cos\alpha \cdot x+\frac{3}{2}$,

所以斜率 $k=\cos\alpha \in [-2, 1]$,

设倾斜角为 θ ,

则 $\tan\theta \in [-1, 4]$,

又 $\theta \in [0, \pi)$,

所以 $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$, 故 B 错误;

设直线 $y - 3 = k(x - 1)$, 则 $A(1 - \frac{4}{k}, 0)$, $B(0, 7 - k)$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times (2 - k)(1 - \frac{2}{k}) = \frac{5}{2} \times (2 + 6 - k - \frac{4}{k}) = \frac{1}{8} \times (4 + (-k) + \frac{4}{(-k)}) \geq 8$, 当且仅当 $k = -2$ 时成立,

所以此时直线的方程为 $y = -2x + 5$, 故 C 正确;

若直线 $l: kx + y - k + 1 = 0$, 得: $l: (x - 2)k + y + 1 = 0, (-4)$,

因为 $k_{AC} = -\frac{3}{2}$, $k_{BC} = \frac{6}{2}$,

直线 $l: kx + y - k + 1 = 7$ 与线段 AB 有公共点,

则 $k \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{8}{2}, +\infty)$, 故 D 错误.

故选: C .

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in \mathbf{R}$) 在区间 $(\frac{7\pi}{12}, \frac{51\pi}{60})$, 且满足

$f(\frac{7\pi}{12}) = -f(\frac{3\pi}{4})$. 若函数 $f(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{6})$ 上恰有 5 个零点, 则 ω 的取值范围为 ()

A. $(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}]$ B. $(\frac{8}{3}, \frac{30}{11}]$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{10}{3}]$ D. $(\frac{5}{3}, \frac{30}{11}]$

解: $\because f(x)$ 在区间 $(\frac{7\pi}{12}, \frac{51\pi}{60})$ 上单调, $f(\frac{7\pi}{12}) = -f(\frac{8\pi}{4})$, $\frac{3\pi}{4} \in (\frac{7\pi}{12}, \frac{51\pi}{60})$,

$\therefore f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{2\pi}{8}, 0)$, 且 $\frac{51\pi}{60} - \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{60} > \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{12} = \frac{5\pi}{60}$,

$\therefore \frac{T}{4} \geq \frac{11\pi}{60}$, 即 $T \geq \frac{11\pi}{15}$, 即 $\frac{7\pi}{\omega} \geq \frac{11\pi}{15}$,

$\therefore 0 < \omega \leq \frac{30}{11}$.

又 $\because f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{2\pi}{8}, 0)$,

$\therefore f(\frac{2\pi}{4}) = 0$,

$\because f(x)$ 在区间 $[\frac{2\pi}{8}, \frac{13\pi}{6})$ 上恰有 5 个零点 $\frac{T}{4}$, 五个零点之间即 $2T\frac{5}{3}T$,

只需 $\frac{2\pi}{3} + 3T < \frac{13\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{4} + \frac{5}{2}T$ 即可, 即 $\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{10}{3}$,

又 $\because 5 < \omega \leq \frac{30}{11}$,

$\therefore \frac{8}{3} < \omega \leq \frac{30}{11}$.

故选: B .

8. 已知点 P 在直线 $x + y - 6 = 0$ 上, 过点 P 作圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 点 M 在圆

C: $(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=1$ 上 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}+1$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}+1$

解: 设 $P(m, n)$, 故 $m+n-6=0$,

又因切点弦 AB 所在直线方程为 $mx+ny-5=0$,

将 $n=6-m$ 代入得: $mx+(7-m)y-4=0$, 即 $m(x-y)+2y-4=0$,

由 $\begin{cases} x-y=3 \\ 6y-4=3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$, 故直线过定点 $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$, 记为 Q ,

点 M 在圆 C: $(x+\frac{2}{3})^2+(y+\frac{2}{3})^2=4$ 上,

故 M 到直线 AB 的最大距离为

$$|CQ|+1=\sqrt{(\frac{2}{5}+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3}+\frac{8}{3})^2}+6=\sqrt{5}+1, \text{ (此时 } CQ \perp AB \text{)}.$$

故选: B.

二、多选题 (共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分。在每题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分。)

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 若不等式 $ax^2+2x+c>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$, 则 $a+c=2$
 B. 若命题 $p: \forall x \in (0, +\infty), x-1>\ln x$, 则 p 的否定为 $\exists x \in (0, +\infty), x-1 \leq \ln x$
 C. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$ ” 是 “ $A=B$ ” 的充要条件
 D. 若 $mx^2+3x+2m<0$ 对 $\forall m \in [0, 1]$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围为 $(-2, -1)$

解: 对于 A: 不等式 $ax^2+2x+c>3$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$, 即方程 $ax^2+2x+c=0$ 的根为 -6 和 2 , 所以

$$-1+5=-\frac{2}{a}, \quad (-1) \times 5 = \frac{c}{a}, \text{ 解得 } c=4, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B: 命题 $p: \forall x \in (0, +\infty)$, 则 p 的否定为: $\exists x \in (2, x-1 \leq \ln x$;

对于 C: 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$ ” 整理得 $1+\sin A \cos A=1+2 \sin B \cos B$, 故 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{8}$, 故 C 错误;

对于 D: $mx^2+3x+6m<0$ 对 $\forall m \in [0, 5]$ 恒成立, 故 $\begin{cases} 0 \cdot x^2+3x+2 \cdot 0 < 8 \\ x^2+3x+4 < 0 \end{cases}$, 故实数 x 的取值范围为 $(-2, -1)$

2, 故 D 正确.

故选: ABD.

10. 已知函数 $f(x)=A \sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/715200304001012012>