第7章 梁 的 强 度

BACK

7.1 引　言

杆件在通过轴线的平面内受到垂直于轴线的横向力或力偶作用时，轴线由直变弯，即发生弯曲变形。以弯曲变形为主的杆件称为梁。工程中存在大量的弯曲问题，如桥式起重机的大梁(图7.1(a))、火车轮轴(图7.1(b))、石油化工设备中的直立塔(图7.1(c))等。实际的梁结构比较复杂，为了便于分析和计算，必须对梁的几何形状、支座、载荷等进行简化。梁的截面形状有矩形、圆形、T形、工字形、槽形等，都可视为直杆并以轴线表示；梁的支座有固定铰、活动铰、固定端等；载荷有集中力、集中力偶、分布力等。梁的力学模型分为三种：简支梁、外伸梁和悬臂梁(图7.1)。上述梁均为静定梁，若增加支座数，则成为超静定梁。若将几个单个梁连在一起，则成为组合梁。

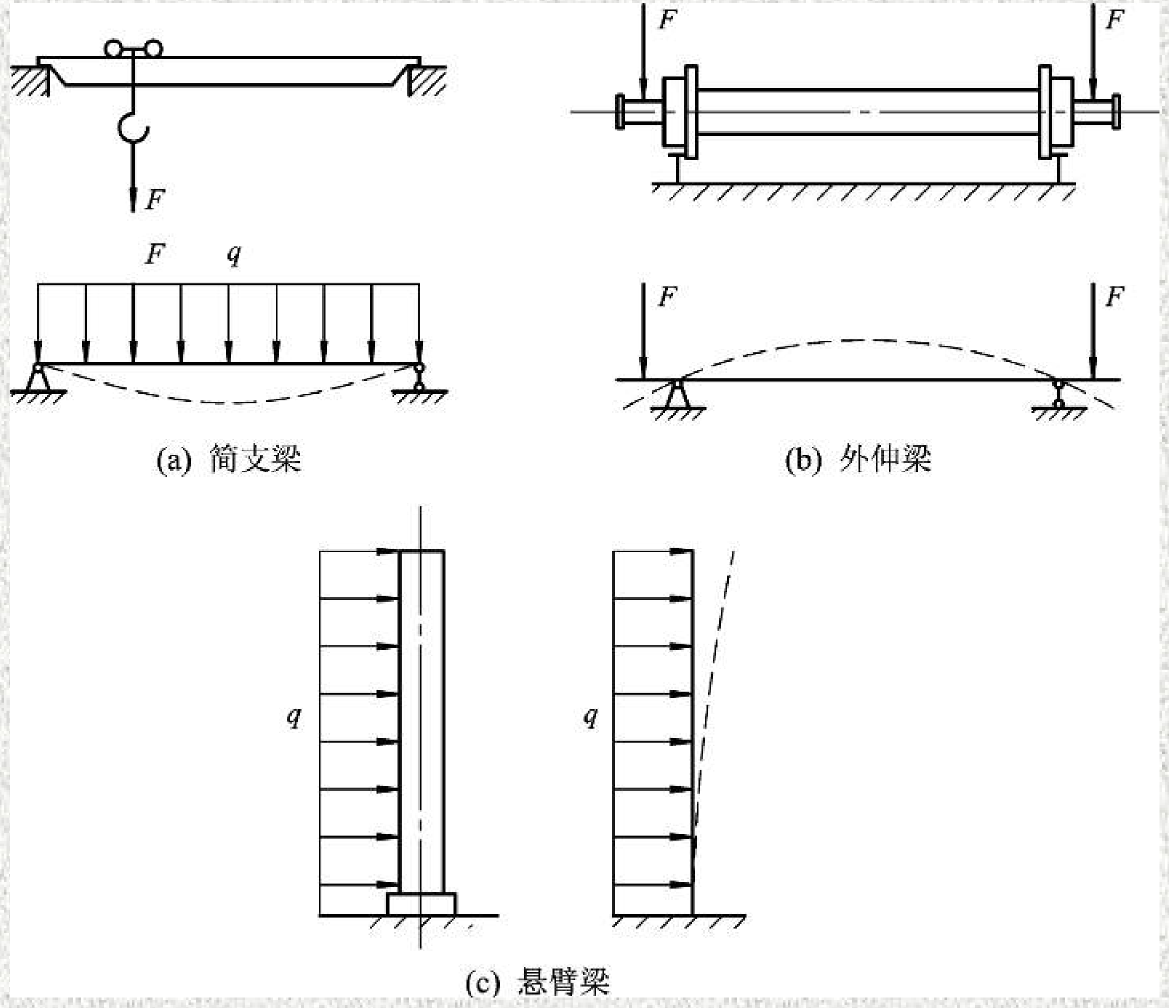


图7.1

大多数情况下，梁都有一个纵向对称面，如图7.2所示。当所有外力都作用在该平面内时，梁的轴线也在该平面内弯曲成一条平面曲线，这就是平面弯曲。本章主要讨论平面弯曲问题。

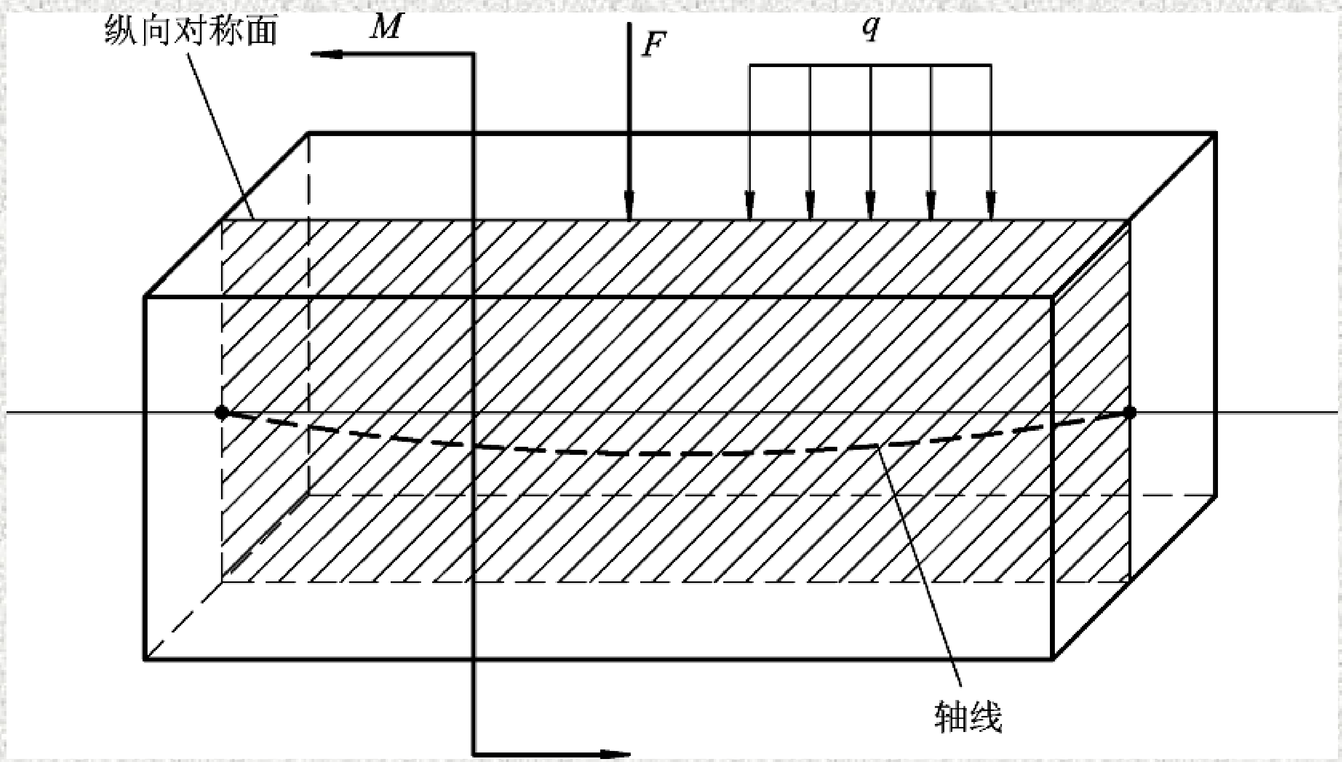


图7.2

7.2 梁的内力及正负号规定

梁的内力可由截面法确定。对图7.3(a)所示悬臂梁，从任意横截面m—m处断开，研究左半部分(图7.3(b))。

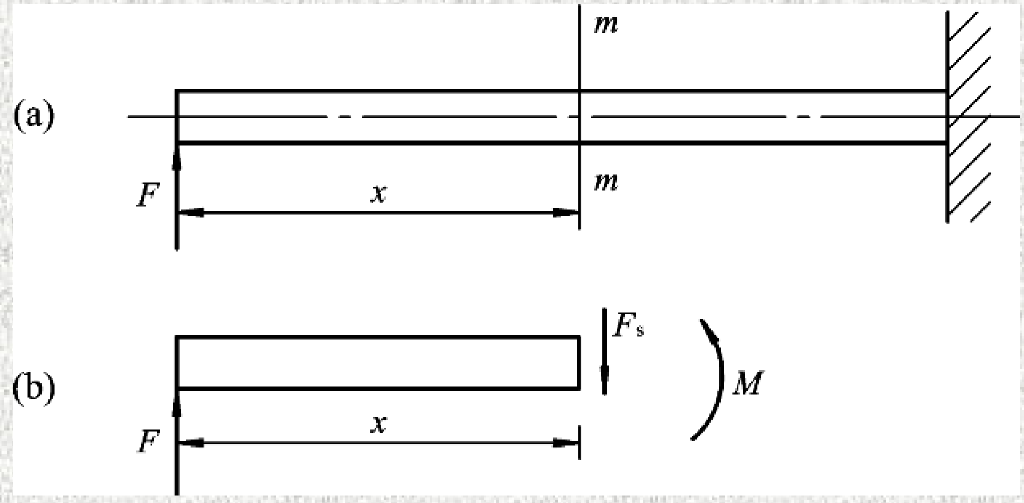


图7.3

由平衡条件知，横截面上的内力可向截面形心简化为一个力 F_s和一个力偶M，且有

$$F_s=F \qquad M=Fx$$

其中 F_s称为剪力，M称为弯矩。当梁受力比较复杂时，截面上剪力和弯矩的方向或转向事先难以确定。为方便起见，常作如下正负号规定：

剪力 F_s：截面外法线顺时针转过90°与剪力 F_s方向一致时为正向，反之为负，如图7.4 所示，亦可简称为“左上右下”为正。

弯矩M：使梁段向上弯者为正向，反之为负，如图7.5所示，亦可简称为“左顺右逆”为正。

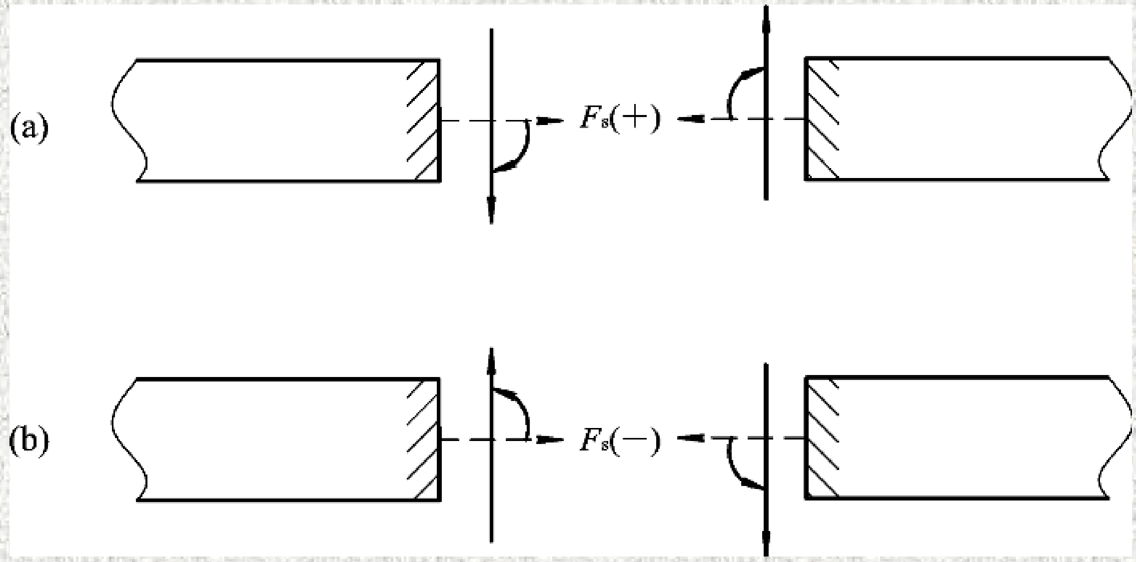


图7.4

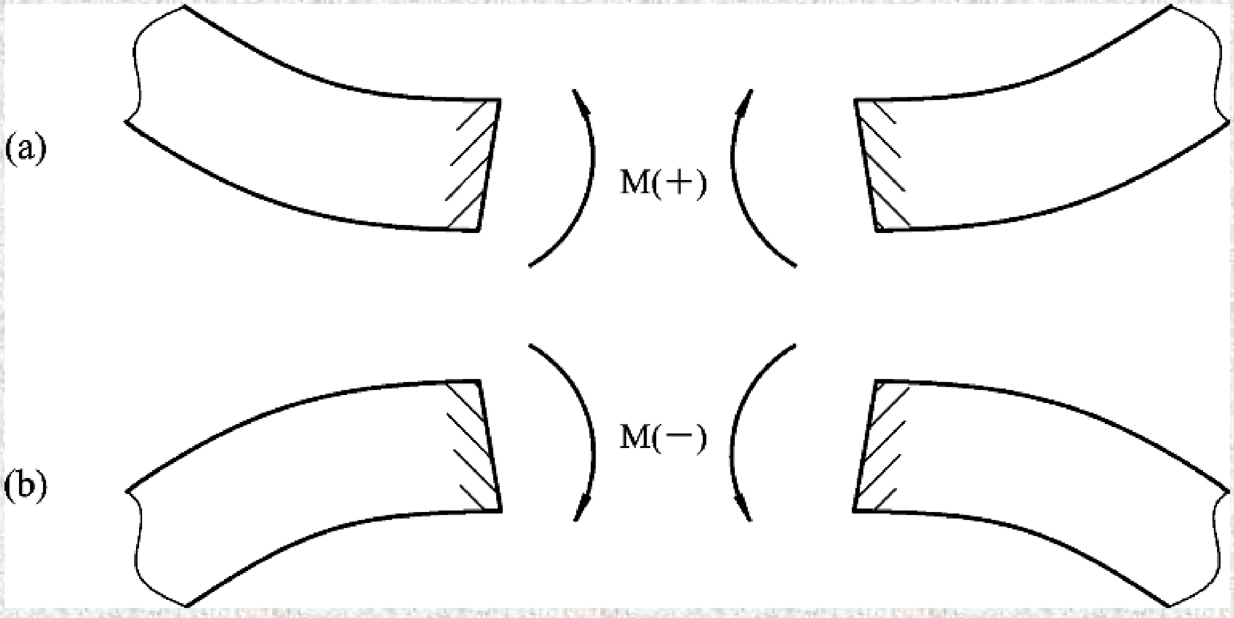


图7.5

7.3 内力方程与内力图

一般情况下，不同截面上的剪力和弯矩均不相同。剪力和弯矩都可表示为截面坐标x的函数，即

$$F_s=F_s(x)$$

$$M=M(x)$$

分别称为剪力方程和弯矩方程。

受载荷和支座的影响，梁全长上的剪力和弯矩通常都不能用一个函数表示，而只能是分段函数。由受力图可知，集中力作用点、集中力偶作用点、分布力左右边界点两侧截面截得的分离体包含的载荷或支座反力不同，所以这些点均为分段点。每相邻两分段点之间称为一个力区。

为了观察剪力和弯矩沿梁长度方向的变化情况并确定最大剪力和最大弯矩，可以作出剪力方程和弯矩方程的函数图像，分别称为剪力图和弯矩图。

下面举例说明梁在不同载荷作用下内力方程的求解及内力图的特点。

【例7.1】 图7.6(a)所示简支梁受集中力F作用。试写出剪力方程和弯矩方程，并作出剪力图和弯矩图。

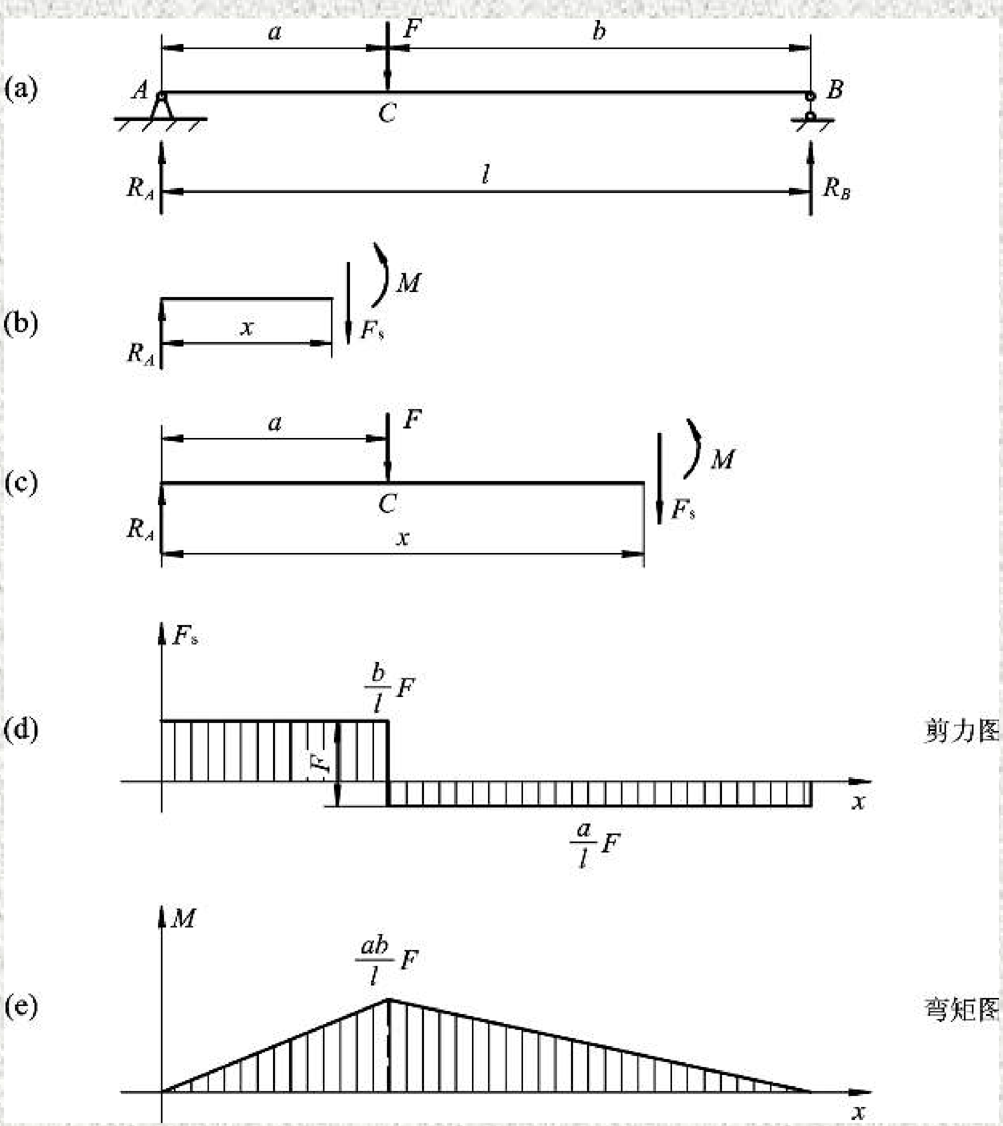

(a)
a
F
b
A
C
B
R_A
l
R_B
(b)
M
x
F_s
R_A
(c)
a
F
M
C
F_s
R_A
x
(d)
F_s
$\frac{b}{l}F$
F
x
$\frac{a}{l}F$
剪力图
(e)
M
$\frac{ab}{l}F$
x
弯矩图

图7.6

解 (1) 求支座反力。

$$R_A = \frac{b}{l}F, \quad R_B = \frac{a}{l}F$$

(2) 建立剪力方程和弯矩方程。

对*AC*段(图7.6(b)，0≤*x*≤*a*):

$$F_s = R_A = \frac{b}{l}F, \quad M = R_A x = \frac{b}{l}Fx$$

对 *CB* 段(图7.6(c)，*a*≤*x*≤l):

$$F_s = R_A - F = -R_B = -\frac{a}{l}F$$

$$M = R_A x - F(x-a) = \frac{b}{l}Fx - F(x-a)$$

(3) 作 F_s和M图。

剪力图和弯矩图分别如图7.6(d)、7.6(e)所示。$|F_s|_{max}=\dfrac{b}{l}F$(设$a<b$)，发生在 AC段；$|M|_{max}=\dfrac{ab}{l}F$，发生在C处。

通过该题可以发现，内力图有以下特点：在集中力作用处，F_s图有突跳(即左、右侧剪力不同)，M图为尖点(即两段直线相交，左右侧弯矩相同)。

【例7.2】 图7.7(a)所示简支梁受集中力偶作用。试写出剪力方程和弯矩方程，并作出剪力图和弯矩图。

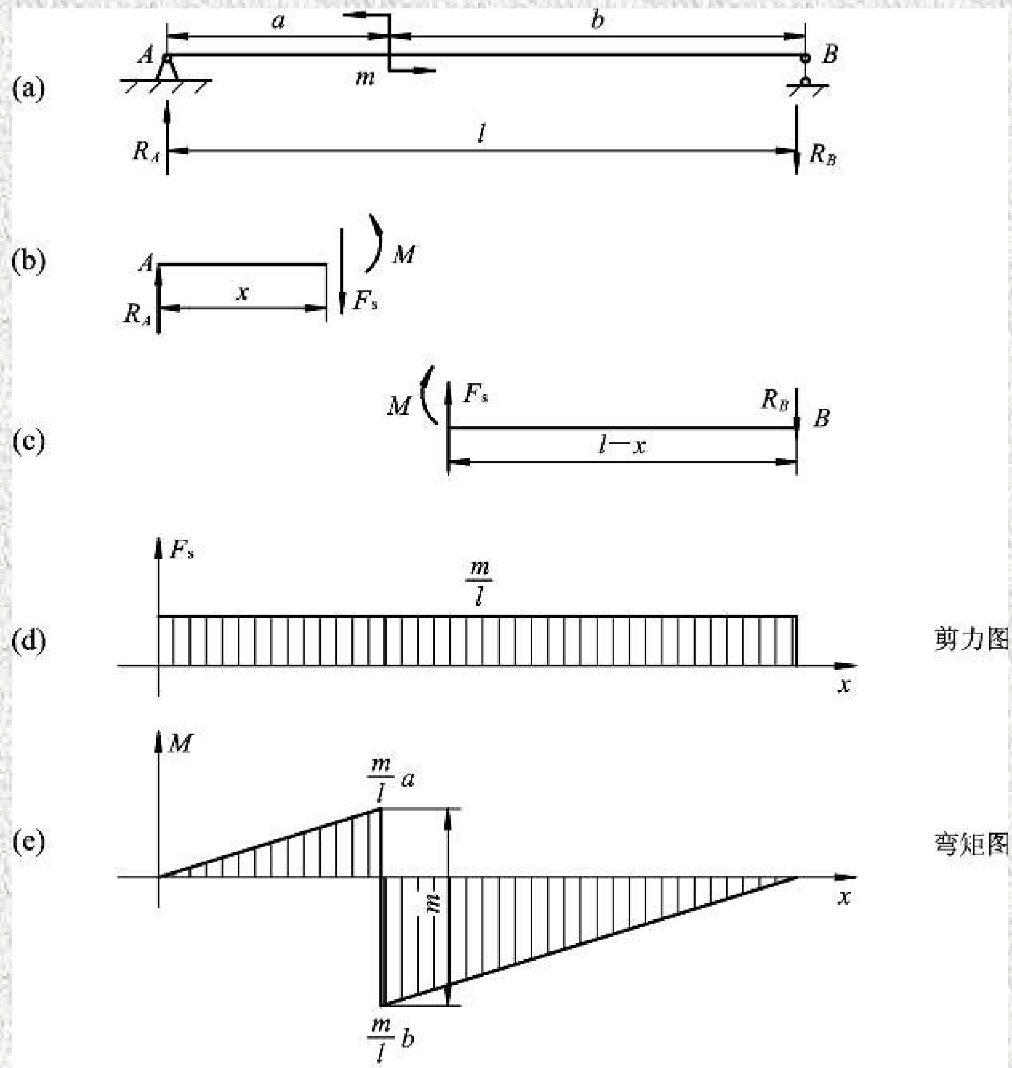

(a)
a
b
A
B
m
R_A
l
R_B
(b)
A
M
x
F_s
R_A
(c)
M
F_s
R_B
B
$l-x$
(d)
F_s
$\frac{m}{l}$
x
剪力图
(e)
M
$\frac{m}{l}a$
m
x
$\frac{m}{l}b$
弯矩图

图7.7

解 (1) 求支座反力。

$$R_A = R_B = \frac{m}{l}$$

(2) 建立剪力方程和弯矩方程。

对AC段(图7.7(b)，$0 \le x \le a$)：

$$F_s = R_A = \frac{m}{l}$$

$$M = \frac{m}{l} x$$

对CB段(图7.7(c)，$a \le x \le l$)：

$$F_s = R_B = \frac{m}{l}$$

$$M = -R_B(l - x) = -\frac{m}{l}(l - x)$$

(3) 作 F_s和M图。

剪力图和弯矩图分别如图7.7(d)、7.7(e)所示。$|F_s|_{max}=\frac{m}{l}$, 发生在梁全长段；$|M|_{max}=\frac{b}{l}m$(设$a<b$), 发生在C处右侧。

通过该题可以发现，内力图有以下特点：在集中力偶作用处，F_s图无变化，M图有突跳(即左、右侧弯矩不同)。

【例7.3】 图7.8(a)所示简支梁局部受均布力作用。试写出剪力方程和弯矩方程，并作出剪力图和弯矩图。

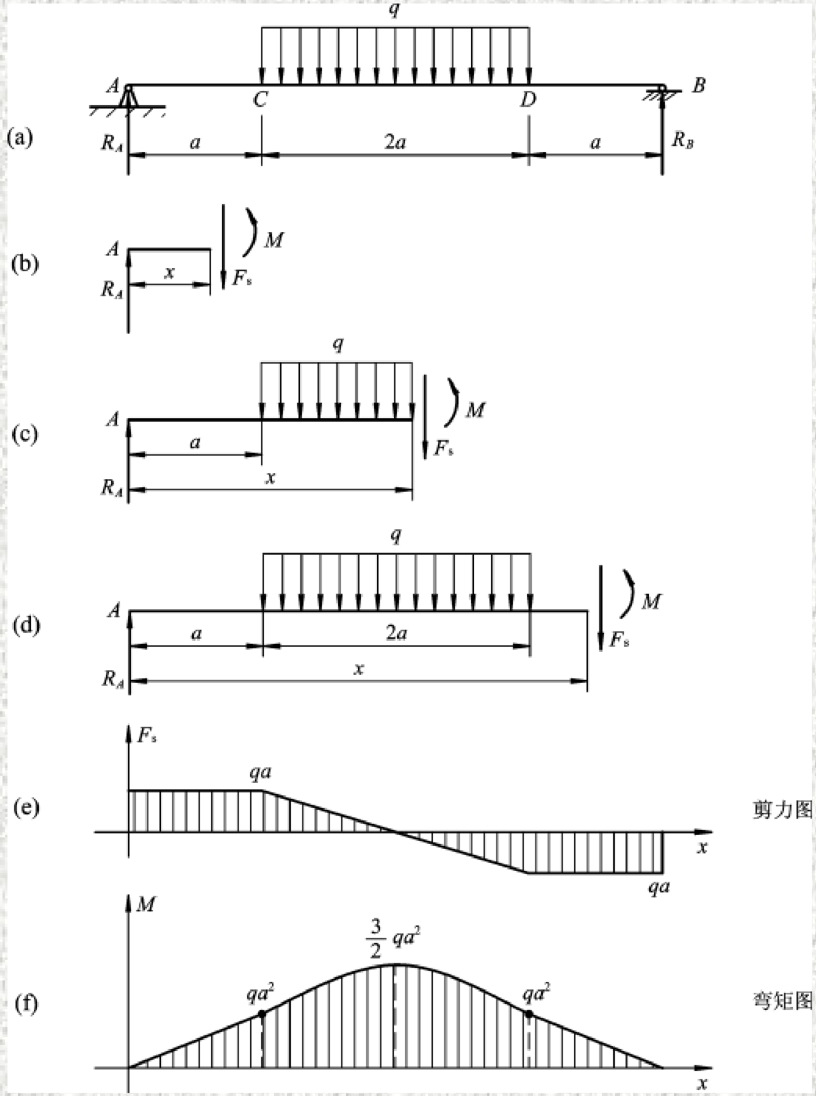

q
A
C
D
B
(a)
R_A
a
2a
a
R_B
(b)
A
M
x
F_s
R_A
q
(c)
A
M
a
F_s
x
R_A
q
(d)
A
M
a
2a
F_s
x
R_A
F_s
qa
(e)
剪力图
x
qa
M
$\frac{3}{2}qa^2$
qa^2
qa^2
(f)
弯矩图
x

图7.8

解 (1) 求支座反力。

$$R_A=R_B=qa$$

(2) 建立剪力方程和弯矩方程。该梁应分为三段，即AC、CD、DB段。

对AC段(图7.8(b)，$0\le x\le a$)：

$$F_s=R_A=qa，\quad M=R_Ax=qax$$

对CD段(图7.8(c)，$a\le x\le 3a$)：

$$F_s=R_A-q(x-a)=2qa-qx$$

$$M=R_Ax-q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}=qax-\frac{q}{2}(x-a)^2$$

对 DB 段(图7.8(d)，$3a \le x \le 4a$):

$$F_s = R_B - q \cdot 2a = -qa$$

$$M = R_B x - q \cdot 2a \cdot (a + x - 3a) = qa(4a - x)$$

(3) 作F_s图和 M 图。

剪力图和弯矩图分别如图7.8(e)、7.8(f)所示。$|F_s|_{max} = qa$, 发生在C、D处；$|M|_{max} = \frac{3}{2}qa^2$，发生在中点处。

通过该题可以发现，内力图有以下特点：在均布力左右边界处，F_s图为尖点(即连续但不光滑)，M图连续且光滑。

7.4 弯矩、剪力及载荷集度之间的关系

分析上节三个例题的结果后不难发现，弯矩、剪力和载荷集度之间存在下列关系：

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_{\mathrm{s}}, \qquad \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}x}=-q$$

这一结论具有普遍性，证明如下。

图7.9(a)所示梁受多个载荷作用，力区只有两种，即无分布力和有分布力(无分布力的力区可以视作载荷集度等于零的有分布力的力区)。不妨从分布力作用梁段上截取任一微段dx，受力如图7.9(b)所示。

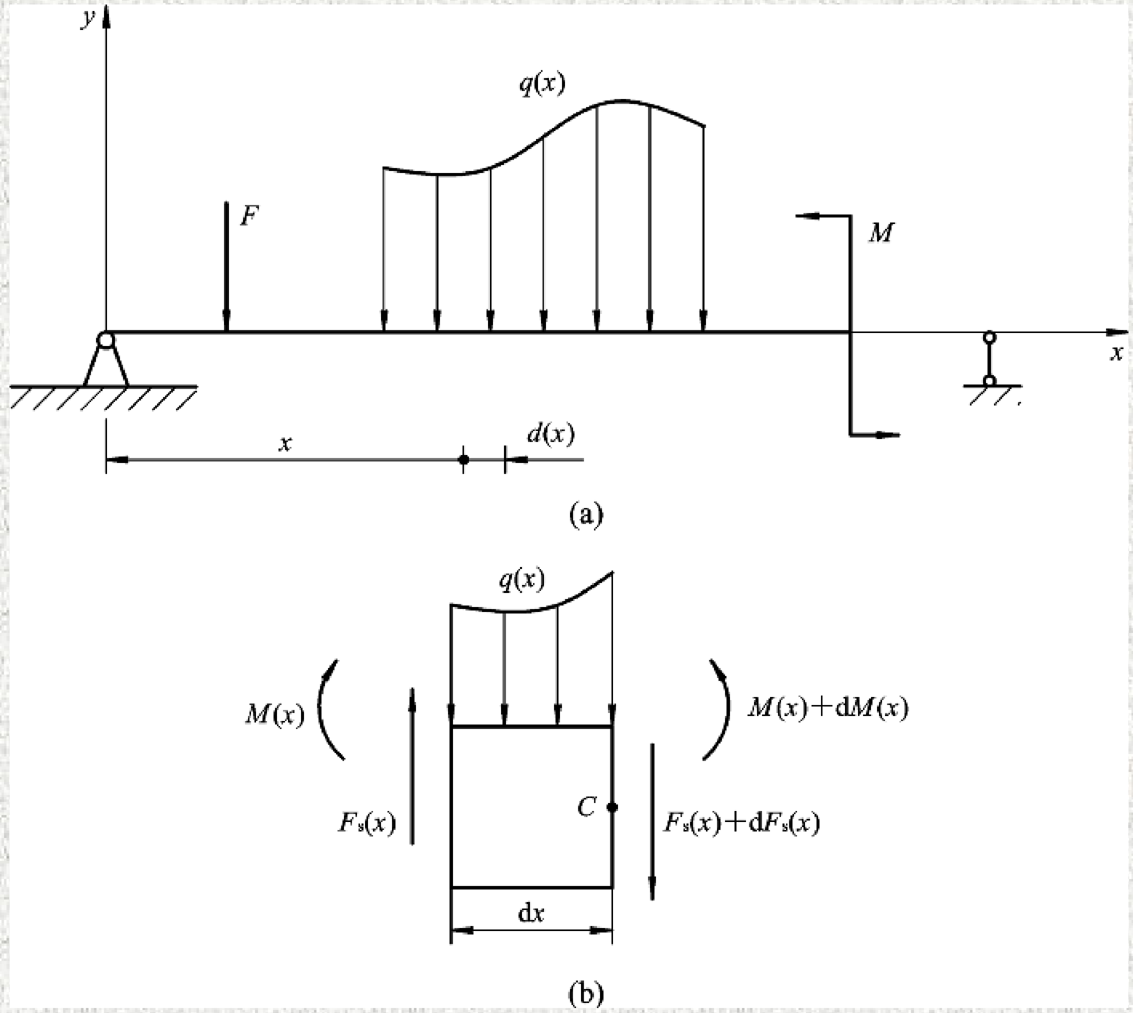


图7.9

取图示坐标系，设q(x)向下为正，则平衡方程为：

$\sum F_y=0$，$F_s(x)-q(x)\cdot\mathrm{d}x-\left[F_s(x)+\mathrm{d}F_s(x)\right]=0$

$\sum m_C=0$，$q(x)\cdot\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2}+\left[M(x)+\mathrm{d}M(x)\right]-M(x)-F_s(x)\cdot\mathrm{d}x=0$

略去式中高阶无穷小，得：

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_s(x) \tag{7.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x}=-q(x) \tag{7.2}$$

由上述两式还可进一步得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x}=-q(x) \tag{7.3}$$

以上三式即为弯矩、剪力和载荷集度之间的微分关系。它们表明：

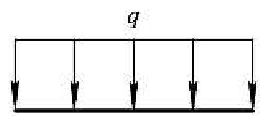
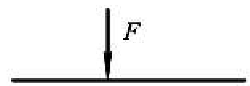
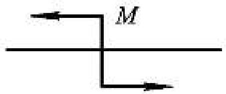
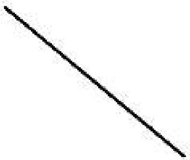
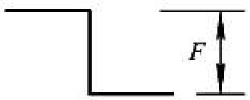
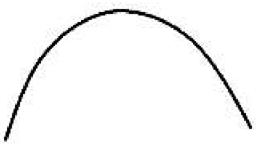
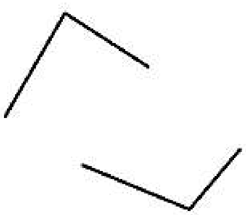
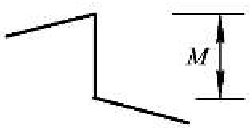
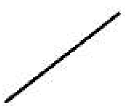
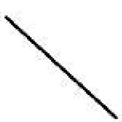
(1) 弯矩图某处的斜率等于该处的剪力；

(2) 剪力图某处的斜率等于该处的载荷集度负值。

根据这些关系和上节中三个例题表明的不同载荷作用下内力图的特点，我们就可以抛开剪力方程、弯矩方程而直接作出剪力图和弯矩图或相互校核，显得尤为方便。

剪力图、弯矩图及载荷之间的关系可以用表7.1表示。

表7.1 剪力图、弯矩图及载荷之间的关系

<table>
<tr><td rowspan="2">载荷类型</td><td rowspan="2" colspan="3">无分布力区
即$q(x)=0$</td><td>有均布力力区</td><td>集中力处</td><td>集中力偶处</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>F_s图</td><td colspan="3">水平直线
</td><td>斜直线
</td><td>突跳
</td><td>无影响</td></tr>
<tr><td rowspan="4">M图</td><td colspan="3">斜直线</td><td rowspan="4">抛物线

顶点处$F_s=0$</td><td rowspan="4">尖点
</td><td rowspan="4">突跳
</td></tr>
<tr><td colspan="3">倾斜方向</td></tr>
<tr><td>$F_s>0$</td><td>$F_s=0$</td><td>$F_s<0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

作剪力图和弯矩图的步骤如下：

第一步，预知内力图形状(简称定形)。

(1) 在无分布力的力区上(即 $q(x)=0$)，剪力图为水平直线(常量)，弯矩图为斜直线(一次函数)。

(2) 在均布力作用的力区上(即 q=常数)，剪力图为斜直线(一次函数，若 q 向下，则斜率为负值)，弯矩图为抛物线(二次函数，若 q 向下，则抛物线开口向下)。

第二步，确定内力图的位置(简称定位)。

(1) 在集中力作用处，剪力图有突跳。由左向右作图时，突跳方向与力的方向一致，突跳量等于力的大小；M图为尖点(连续不光滑)。

(2) 在集中力偶作用处，剪力图无变化(按原直线延伸)；M 图有突跳，由左向右作图时，遇逆时针力偶时向下突跳，突跳量等于力偶矩的大小。

以上两个步骤(定形、定位)是作梁的剪力图和弯矩图的一般过程，应牢记并熟练掌握。

由于积分和微分互为逆运算，因此式(7.1)、(7.2)还可表示为积分形式：

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)\mathrm{d}x \tag{7.4}$$

$$F_{s2} - F_{s1} = -\int_{x_1}^{x_2} q(x)\mathrm{d}x \tag{7.5}$$

由图7.10可以说明：某两个截面的弯矩之差等于两个截面之间剪力图的面积；某两个截面的剪力之差等于两个截面之间载荷图的面积的负值(注意：1、2截面必须位于同一个力区内， 面积为代数值)。作内力图时，利用这个关系可以方便地确定某些控制面上的内力。

下面举例说明。

【例 7.4】 图7.11(a)所示简支梁，作 F_s 图和 M 图。

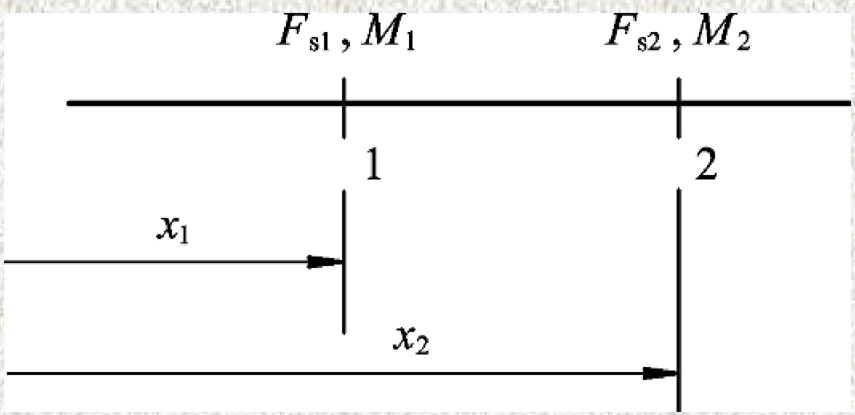


图7.10

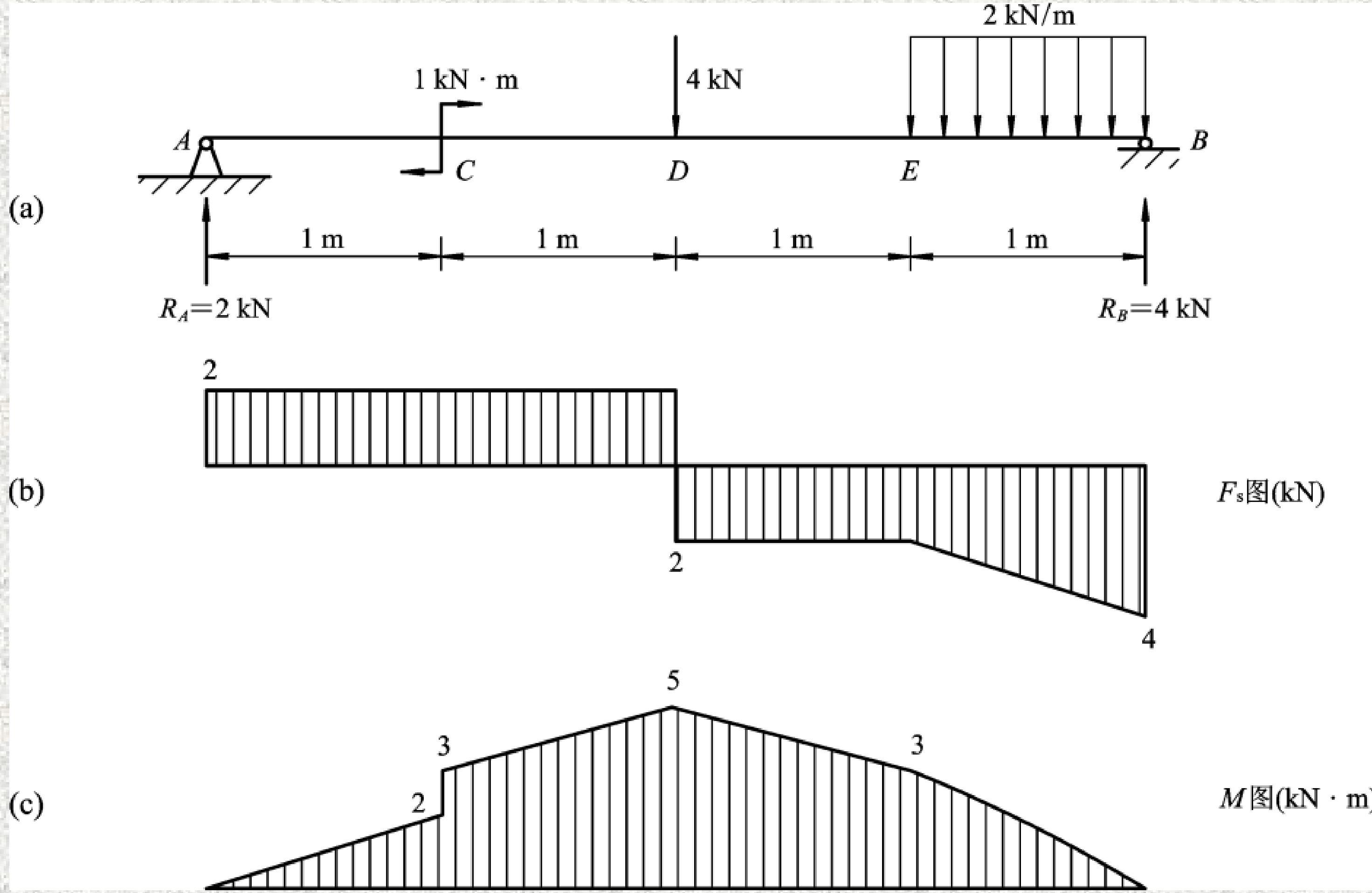

2 kN/m
1 kN · m
4 kN
A
C
D
E
B
(a)
1 m
1 m
1 m
1 m
R_A=2 kN
R_B=4 kN
2
(b)
2
4
F_s图(kN)
5
3
3
2
(c)
M图(kN · m)

图7.11

解 (1) 求支座反力。

$$\sum m_A=0,\quad -1-4\times2-2\times1\times3.5+R_B\times4=0$$

$$\sum F_y=0,\quad R_A-4-2\times1+R_B=0$$

$$R_A=2\ \text{kN}\qquad R_B=4\ \text{kN}$$

(2) 分段。

C、D、E为分段点，梁分为AC、CD、DE、EB四段。

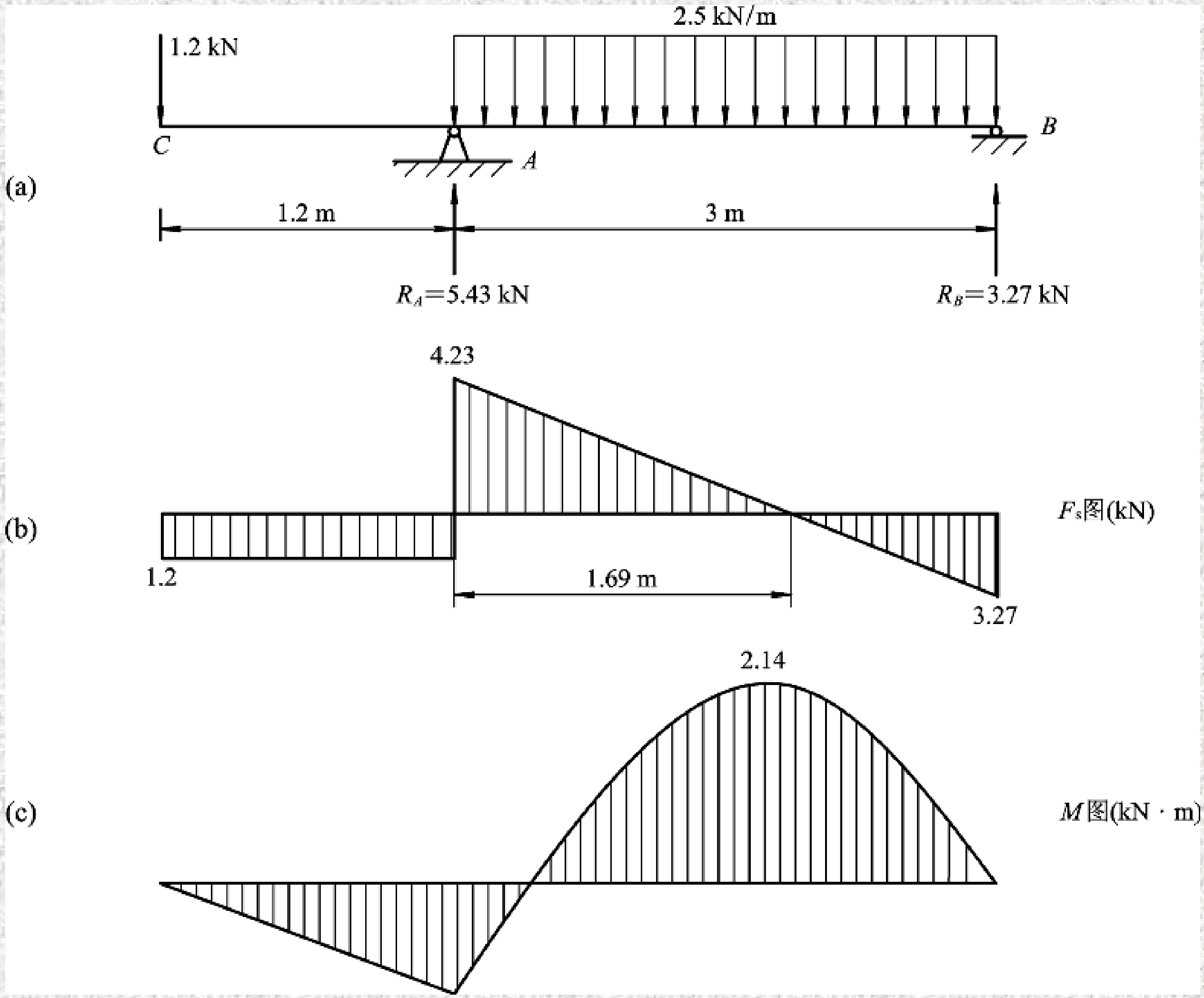
(3) 作 F_s 图(图7.11(b))。

省去坐标系，画一与梁等长的线段(对齐)，称做基线。A处由基线向上突跳R_A，向右画水平线至 D 处；然后向下突跳4 kN，再向右画水平线至 E 处；EB段的 F_s图为斜直线(B处剪力即为$-R_B$)。

(4) 作 M 图(图7.11(c))。

A、B为铰链，弯矩均为零，AC段的 M 图为斜直线(斜率等于该处剪力2 kN)；C处向上突跳1 kN·m，CD段的 M 图为斜直线(斜率为2 kN)；DE段的 M 图为斜直线(斜率为2 kN)；EB段的 M 图为抛物线(开口向下)，其中 D、E处弯矩连续。

【例7.5】 图7.12(a)所示外伸梁，作 F_s 图和 M 图。



2.5 kN/m
1.2 kN
C
A
B
(a)
1.2 m
3 m
R_A=5.43 kN
R_B=3.27 kN
4.23
(b)
F_s图(kN)
1.2
1.69 m
3.27
2.14
(c)
M图(kN · m)

图7.12

解 (1) 求支座反力。

$$\sum m_A=0，\quad 1.2\times1.2-2.5\times3\times1.5+R_B\times3=0$$

$$\sum F_y=0，\quad -1.2+R_A-2.5\times3+R_B=0$$

$$R_A=5.43\ \text{kN} \qquad R_B=3.27\ \text{kN}$$

(2) 分段。 梁分为CA、AB两段。

(3) 作 F_s图。

C处由基线向下突跳1.2 kN，向右画水平线至 A 处；A 处向上突跳5.43 kN，B处剪力为$F_{sB}=-R_B=-3.27$ kN，AB段F_s图为斜直线(由几何关系确定直线与基线交点的位置)。

(4) 作 M 图。

B处为铰链，M_B=0；C处为自由端面，M_C=0；A处弯矩图为尖点，M_A=－1.2×1.2=-1.44 kN·m；由式(7.1)知抛物线顶点对应在剪力为零处，在 F_s图上用几何关系求出顶点位置，再用截面法或式(7.4)求出 M 顶=2.14 kN·m。

【例7.6】 图7.13(a)所示悬臂梁，作 F_s图和 M 图。

解 AB段 $F_s = 0$(纯弯曲)，BC段F_s图为斜直线(斜率为－q)；AB段M为常数，M_A=qa^2，BC段M图为抛物线(开口向下，顶点在 B 处)。

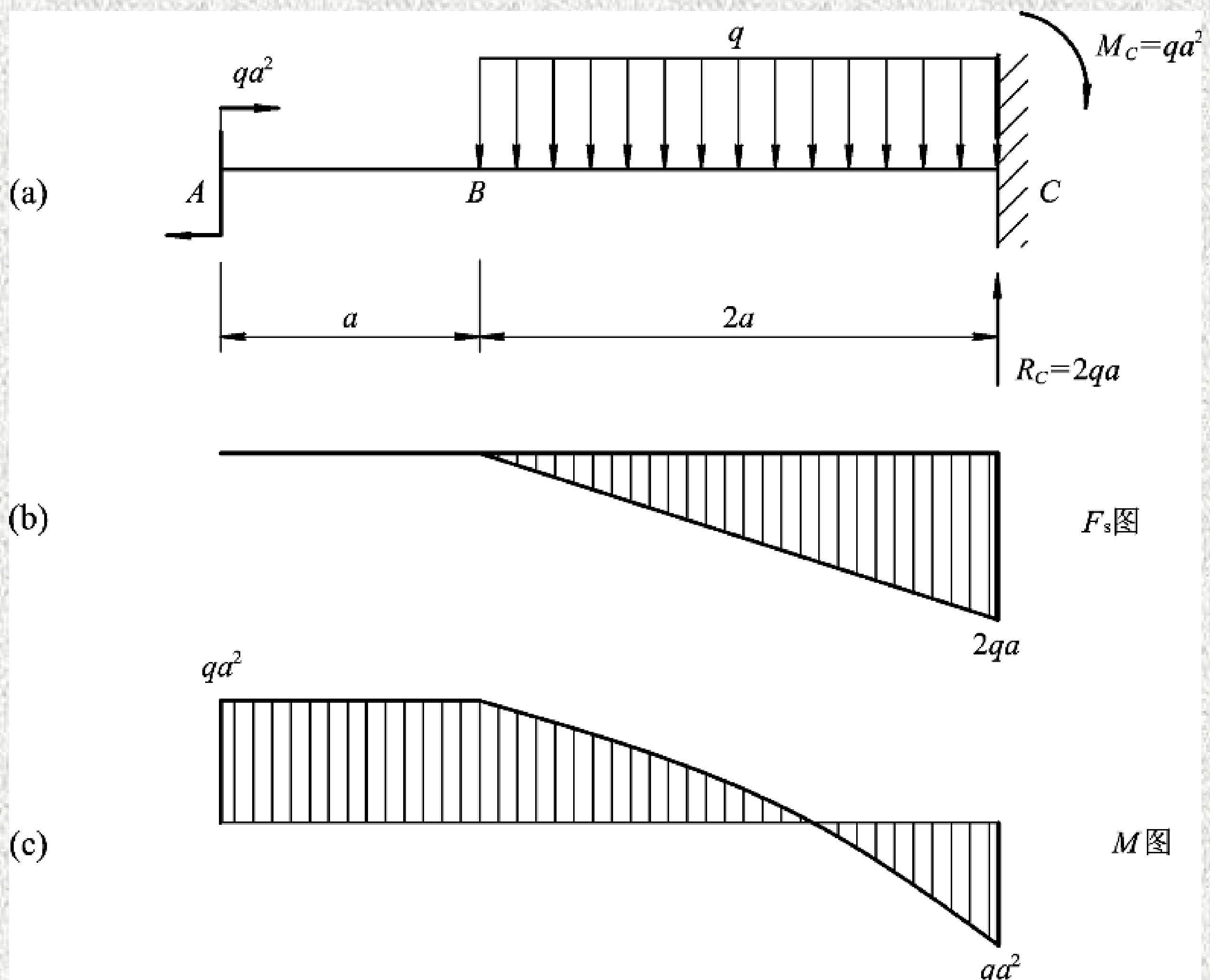


图7.13