# 广东省惠州市2025届高三上学期第三次调研考试数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

## 一、单选题

1．已知集合 $A=\{-3,-1,1,3\}, B=\{x|-2<x<4\}$，那么 $A\cap B=$（　）

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{-1,1,3\}$　　D．$\{0,2,4\}$

2．复数 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 $\tan\alpha=-2$，则 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}=$（　）

A．$-3$　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．3

4．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2-a_n^2=2$，且 $a_3=\sqrt{6}$，则 $a_8^2=$（　）

A．12　　B．16　　C．18　　D．20

5．已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为120°，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=$（　）

A．3　　B．8　　C．12　　D．13

6．已知正四棱台的上、下底面边长分别为1和2，侧棱与底面所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则该四棱台的体积是（　）

A．$\dfrac{7}{6}$　　B．$\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$　　C．$\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$　　D．$\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

7．事件A发生的概率为 $P(A)$，事件 $B$ 发生的概率为 $P(B)$，若 $P(A)=\dfrac{3}{5}$，$P(\overline{B})=\dfrac{2}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{11}{15}$，则事件A与事件 $B$ 的关系为（　）

A．互斥　　B．对立　　C．独立　　D．包含

8．已知 $a>0$，若点 $P$ 为曲线 $C_1: y=\dfrac{x^2}{2}+ax$ 与曲线 $C_2: y=2a^2\ln x+m$ 的交点，且两条曲线在点 $P$ 处的切线重合，则实数 $m$ 的最大值为（　）

A．$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$　　B．$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$　　C．$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$　　D．2e

## 二、多选题

9．下列说法正确的是（　）

A．一组数据10，11，11，12，13，14，16，18，20，22的中位数为14

B．若随机变量$X$服从正态分布$N\left(3,\sigma^2\right)$，且$P(X\le 4)=0.7$，则$P(3<X<4)=0.2$

C．若两个变量的样本相关系数$r$的绝对值越接近1，则这两个变量的线性相关性越强

D．对具有线性相关关系的变量$x$，$y$，其经验回归方程为$\hat{y}=0.3x-m$，若样本数据的中心点为$(m,2.8)$，则实数$m$的值是$-4$

10．已知$F_1$，$F_2$分别为双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左，右焦点，若$P$是双曲线左支上的一个点，下列说法正确的是（　）

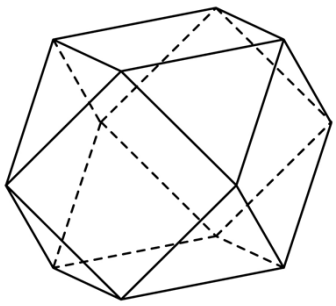
A．双曲线的离心率为$\frac{5}{3}$

B．双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$

C．若$\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|=32$，则$\triangle F_1PF_2$的面积为16

D．若$\left|PF_2\right|=2\left|PF_1\right|$，则$\triangle F_1PF_2$的周长为23

11．“阿基米德多面体”也称为半正多面体，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美．如图是一个八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，棱长为6，则下列说法正确的是（　）



A．将该几何体放到一个正方体内，则正方体的棱长最小为$6\sqrt{2}$

B．任意两个有公共顶点的三角形所在平面的夹角的余弦值均为$\frac{1}{3}$

C．将该几何体以正三角形所在面为底面放置，则高度为$3\sqrt{10}$

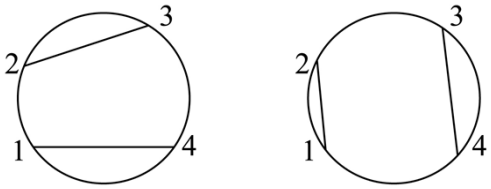
D．若该几何体可以在一个正四面体内任意转动，则该正四面体棱长的最小值为$12\sqrt{6}$

**三、填空题**

12．已知定义在R上的偶函数$f(x)$，当$x>0$时，$f(x)=x^2+x$，则$f(-1)=$_____.

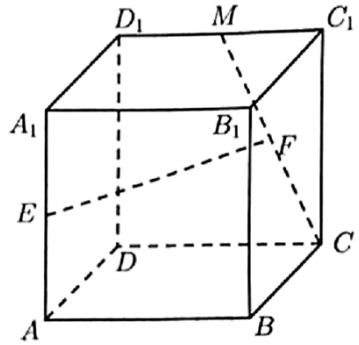
13．若直线$ax-by+2=0(a>0,b>0)$被圆$x^2+y^2+2x-4y+1=0$所截得的弦长为4，则$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$的最小值为_____.

14．有$2n$个人围坐在一个圆桌边上，每人都越过桌面与另外一人握手，若要求所有人握手时手臂互不交叉，例如$n=2$时，一共有4个人，以1、2、3、4表示，握手两人用一条线连结，共有2种方式，如图所示.记一次握手中，共有$Y$对相邻的两人握手，当$n=4$时，$Y$的数学期望$E(Y)=$_____.




**四、解答题**

15．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$M$、$E$分别是$C_1D_1$、$A_1A$的中点，$F$是$MC$的中点.




(1)判断A、$C$、$M$、$A_1$四点是否共面（结论不要求证明）；

(2)证明：$EF$// 平面$ABCD$；

(3)求异面直线$A_1B$与$EF$所成角的余弦值.

16．记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和，$a_3=5$，$S_3=9$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，并比较$T_n$与$\log_2\sqrt{3}$的大小.

17．在$\triangle ABC$中，角$A,B,C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，且$A=\frac{\pi}{3}$，$a=4$.

(1)若$BC$边上的高$AD=2\sqrt{3}$，求证：$\triangle ABC$为等边三角形；

(2)已知直线$AM$为$\angle BAC$的平分线，且与$BC$交于点$M$，若$AM=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

18．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为$2\sqrt{2}$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆$C$的方程；

(2)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上点$(x_0,y_0)$处的切线方程是$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.在直线$l:x=2$上任取一点$M$引椭圆$C$的两条切线，切点分别是$P$、$Q$.

①求证：直线$PQ$恒过定点$N$；

②是否存在实数$\lambda$，使得$|PN|+|QN|=\lambda|PN|\cdot|QN|$，若存在，求出$\lambda$的值，若不存在，说明理由.

19．设$y=f(x)$是定义在R上的函数，若存在区间$[a,b]$和$x_0\in(a,b)$，使得$y=f(x)$在$[a,x_0]$上严格减，在$[x_0,b]$上严格增，则称$y=f(x)$为“含谷函数”，$x_0$为“谷点”，$[a,b]$称为$y=f(x)$的一个“含谷区间”.

(1)判断下列函数中，哪些是含谷函数？若是，请指出谷点；若不是，请说明理由：

（i）$y=2|x|$，（ii）$y=x+\cos x$；

(2)已知实数$m>0$，$y=x^2-2x-m\ln(x-1)$是含谷函数，且$[2,4]$是它的一个含谷区间，求$m$的取值范围；

(3)设$p,q\in\mathrm{R}$，$h(x)=-x^4+px^3+qx^2+(4-3p-2q)x$．设函数$y=h(x)$是含谷函数，$[a,b]$是它的一个含谷区间，并记$b-a$的最大值为$L(p,q)$．若$h(1)\le h(2)$，且$h(1)\le 0$，求$L(p,q)$的最小值.

《广东省惠州市2025届高三上学期第三次调研考试数学试题》参考答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | A | A | B | D | B | C | B | BCD | AC |
| 题号 | 11 | | | | | | | | | |
| 答案 | ABD | | | | | | | | | |

1．C

【分析】根据交集的知识来求得正确答案.

【详解】依题意，$A\cap B=\{-1,1,3\}$.

故选：C

2．A

【分析】利用复数的除法法则计算可得复数$z$，进而可判断在复平面的对应点所在的象限.

【详解】因为$z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{6+5\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{5+5\mathrm{i}}{5}=1+\mathrm{i}$，

所以复数$z$在复平面内对应的点的坐标为$(1,1)$，位于第一象限.

故选：A.

3．A

【分析】利用弦化切方法即可直接求解.

【详解】由$\tan\alpha=-2$得$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{3+\tan\alpha}=\dfrac{-2-1}{3+(-2)}=-3$.

故选：A

4．B

【分析】由等差数列的定义可知$\{a_n^2\}$是公差为2的等差数列，结合已知条件可求得$a_8^2$的值.

【详解】由$a_{n+1}^2-a_n^2=2$可得$\{a_n^2\}$是公差为2的等差数列，故$a_8^2=a_3^2+5\times2=16$.

故选：B.

5．D

【分析】应用平面向量数量积的定义及运算律计算即可.

【详解】因为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为$120°$，且$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5$，

则$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=2\vec{a}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}=2|\vec{a}|^2-|\vec{b}||\vec{a}|\cos120°=2\times2^2-2\times5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=13$.

故选：D.

6．B

【分析】根据侧棱和底面所成角$\frac{\pi}{4}$以及边长算出棱台的高，再结合棱台体积计算公式计算可得.

【详解】如下图所示：$O$，$O_1$分别为上下底面的中心，作$C_1E\perp AC$于点$E$，

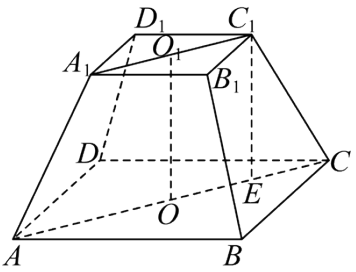
根据题意可知$A_1B_1=1$，$AB=2$，侧棱与底面所成的角即为$\angle C_1CE$，可知$\angle C_1CE=\frac{\pi}{4}$；

因此可得$C_1E=CE$，易知$AC=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=\sqrt{2}$，由正四棱台性质可得

$CE=\frac{1}{2}\left(AC-A_1C_1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

所以该正四棱台的高为$C_1E=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此该四棱台的体积是

$V=\frac{1}{3}\left(1^2+2^2+\sqrt{1^2\times 2^2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{6}$.




故选：B.

7．C

【分析】利用对立事件的概率公式求出$P(B)$，根据$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$求出$P\left(AB\right)$的值，再利用独立事件的定义判断可得出结论.

【详解】由概率公式可得$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

因为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

即$\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-P(AB)=\frac{11}{15}$，可得$P(AB)=\frac{1}{5}$，

所以$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，因此，事件A与事件$B$独立.

故选：C.

8．B

【分析】设点$P$的横坐标为$n(n>0)$，由导数几何意义得$n+a=\frac{2a^2}{n}(a>0)$，进而求得$n=a$，接着由切点为两曲线公共点得$m=-2a^2\ln a+\frac{3}{2}a^2$，从而构造函数

$f(a)=-2a^2\ln a+\frac{3}{2}a^2(a>0)$求出函数的最大值即为解.

【详解】由$y=\frac{x^2}{2}+ax$可得$y'=x+a$，由$y=2a^2\ln x+m$得$y'=\frac{2a^2}{x}$，

设点$P$的横坐标为$n(n>0)$，则点$P$处切线斜率$k=n+a=\frac{2a^2}{n}(a>0)$，解得$n=a$或$n=-2a$（舍），

由点$P$为曲线$C_1:y=\frac{x^2}{2}+ax$与曲线$C_2:y=2a^2\ln x+m$的交点，

所以$P\left(n,\frac{n^2}{2}+an\right)$与$P\left(n,2a^2\ln n+m\right)$为同一点，

所以$\frac{n^2}{2}+an=2a^2\ln n+m$，即$m=-2a^2\ln a+\frac{3}{2}a^2$，

令$f(a)=-2a^2\ln a+\frac{3}{2}a^2(a>0)$，则$f'(a)=-4a\ln a+a=a(1-4\ln a)$，

令$f'(a)=0$可得$a=\sqrt[4]{\mathrm{e}}$，由$a>0$知，当$0<a<\sqrt[4]{\mathrm{e}}$时，$f'(a)>0$，当$\sqrt[4]{\mathrm{e}}<a$时，$f'(a)<0$，

所以$f(a)$在$(0,\sqrt[4]{\mathrm{e}})$上单调递增，在$(\sqrt[4]{\mathrm{e}},+\infty)$上单调递减，

所以$f(a)_{\max}=f(\sqrt[4]{\mathrm{e}})=\sqrt{\mathrm{e}}$，故实数$m$的最大值为$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

故选：B.

【点睛】关键点睛：解决本题的关键是利用导数几何意义和点为两曲线交点求得$m=-2a^2\ln a+\frac{3}{2}a^2$，进而再构造函数利用导数即可求解.

9．BCD

【分析】根据中位数的定义计算即可判断A；根据正态曲线的性质计算即可判断B；根据线性相关系数的意义即可判断C；根据经验回归方程的概念即可判断D.

【详解】对于A，因为一共有10个数，所以中位数为$\frac{13+14}{2}=13.5$，故A错误；

对于B，若随机变量$X$服从正态分布$X\left(3,\sigma^2\right)$，且$P(X\le 4)=0.7$，

则$P(X>4)=1-P(X\le 4)=0.3$，

则$P(3<X<4)=0.5-P(X>4)=0.2$，故B正确；

对于C，若线性相关系数$|r|$越接近1，则两个变量的线性相关性越强，故C正确；

对于D，样本点的中心为$(\overline{x},\overline{y})$，所以$\overline{x}=m$，$\overline{y}=2.8$，

此时经验回归方程为$\hat{y}=0.3x-m$，

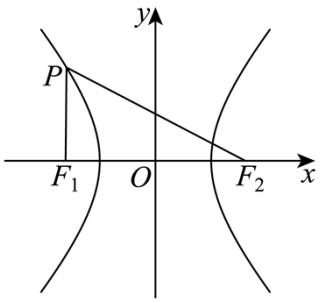
所以$2.8=0.3m-m$，故$m=-4$，故D正确.

故选：BCD.

10．AC

【分析】根据双曲线的标准方程可得$a,b,c$的值，即可求得离心率和渐近线方程，即可判断A、B，根据双曲线的定义以及余弦定理可解焦点三角形，即可判断C、D.

【详解】




对于A，由题可得$a=3$，$b=4$，$c=5$，则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$，故A正确；

对于B，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$，故B错误；

对于C，由题$|F_1F_2|=2c=10$，由图结合双曲线定义可得$|PF_2|-|PF_1|=2a=6$，

则$\left(|PF_2|-|PF_1|\right)^2=|PF_2|^2+|PF_1|^2-2|PF_2|\cdot|PF_1|=36\Rightarrow|PF_2|^2+|PF_1|^2=100$.

则$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=0$，则$\sin\angle F_1PF_2=1$，

得$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=16$，故C正确；

对于D，因为$\begin{cases}|PF_2|-|PF_1|=2a=6\\|PF_2|=2|PF_1|\end{cases}$，所以$\begin{cases}|PF_1|=6\\|PF_2|=12\end{cases}$，

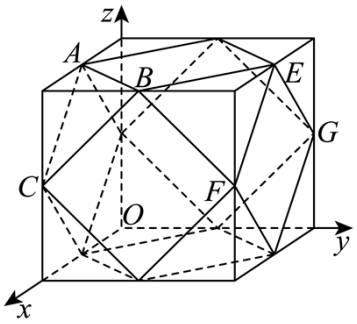
又$|F_1F_2|=2c=10$，则$\triangle F_1PF_2$的周长为28，故D错误.

故选：AC.

11．ABD

【分析】求得该几何体放到一个正方体的最短棱长可判断A；建立空间直角坐标系，求得面面角的余弦值与点到面的距离可判断 BC；求出该半正多面体的外接球的外切正四面体的最短棱长判断D.

【详解】对于A，如图所示，该几何体放到一个正方体内，由棱长为$6$，易求得正方体的棱长最小为$6\sqrt{2}$，故A正确；




对于 B，如图所示，以正方体的顶点 $O$ 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(3\sqrt{2},0,6\sqrt{2}),B(6\sqrt{2},3\sqrt{2},6\sqrt{2}),C(6\sqrt{2},0,3\sqrt{2}),E(3\sqrt{2},6\sqrt{2},6\sqrt{2}),F(6\sqrt{2},6\sqrt{2},3\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(3\sqrt{2},3\sqrt{2},0),\overrightarrow{AC}=(3\sqrt{2},0,-3\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BE}=(-3\sqrt{2},3\sqrt{2},0),\overrightarrow{BF}=(0,3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$，

设平面 $ABC$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-1,z=1$，

所以平面 $ABC$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,1)$，

设平面 $BEF$ 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-3\sqrt{2}a+3\sqrt{2}b=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=3\sqrt{2}b-3\sqrt{2}c=0\end{cases}$，

令 $a=1$，则 $b=1,c=1$，

所以平面 $BEF$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,1,1)$，

设平面 $ABC$ 与平面 $BEF$ 的夹角为 $\theta$，

所以 $\cos\theta=\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

所以由对称性可得任意两个有公共顶点的三角形所在平面的夹角的余弦值均为 $\dfrac{1}{3}$，故 B 正确；

对于 C，$G(0,6\sqrt{2},3\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{CG}=(-6\sqrt{2},6\sqrt{2},0)$，

点 $G$ 到平面 $ABC$ 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CG}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{6}$，

所以将该几何体以正三角形所在面为底面放置，则高度为$4\sqrt{6}$，故 C 错误；

对于 D，由该半正多面体的对称性知，该半正多面体的外接球的球心为正方体的中心，

该球半径为正方体的面对角线的一半$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$，

该半正多面体可以在一个正四面体内任意转动，则该半正多面体的外接球是正四面体的内切球时，

正四面体的体积最小，设此时正四面体的棱长为$a$，高为$h$，

所以$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times h=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 6$，解得$h=24$，

又正四面体底面正三角形半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$，则$(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2+24^2=a^2$

解得$a=12\sqrt{6}$，该正四面体棱长的最小值为$12\sqrt{6}$，故 D 正确.

故选：ABD.

【点睛】关键点点睛：若该半正多面体可以在一个正四面体内任意转动，则该半正多面体的外接球是正四面体的内切球时，该正四面体体积最小.

12．2

【分析】根据偶函数的性质，$f(-1)=f(1)$求解即可.

【详解】因为$f(x)$定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，所以$f(-1)=f(1)=1+1=2$.

故答案为：2.

13．$4+2\sqrt{3}$

【分析】由题意知直线过圆心$(-1,2)$，则$a+2b=2$，利用基本不等式“1”的代换求目标式的最小值，注意取值条件.

【详解】由$x^2+y^2+2x-4y+1=0\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=4$，则圆心为$(-1,2)$，半径为 2，

由直线被圆所截得的弦长为4，故直线$ax-by+2=0(a>0,b>0)$过圆心，

所以$a+2b=2$且$a>0,b>0$，

则$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{a}+\frac{3}{b})(a+2b)=\frac{1}{2}\cdot(8+\frac{4b}{a}+\frac{3a}{b})\geq\frac{1}{2}\cdot(8+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{3a}{b}})=4+2\sqrt{3}$，

当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{3a}{b}$，即$a=\sqrt{3}-1,b=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$时等号成立，

所以$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$的最小值为$4+2\sqrt{3}$.

故答案为：$4+2\sqrt{3}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/716222045124011035