

指数与指数函数 一轮复习考点专练

核心考点 5 指数型函数的奇偶性

角度 1 判断指数型函数的奇偶性

1. 已知 $f(x) = x^3 + \pi^x - \left(\frac{1}{\pi}\right)^x + e$, 若 $f(a) + f(b) < 2e$, 则 ()

- A. $a+b < 0$ B. $a+b > 0$ C. $a-b < 0$ D. $a-b > e$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$
B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$
C. 函数 $f(x)$ 是奇函数
D. 函数 $f(x)$ 为减函数

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^x}{e^x + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(ax^2 - x) + f(-x + 1) < 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为_____.

角度 2 根据指数型函数的奇偶性求参

4. 已知函数 $f(x) = \frac{a^x}{3^x + 1}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是偶函数, 则 $f(x)$ 的最大值为_____.

5. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{1 + 2^x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性 (不需要证明), 并求 $x \in [0, 2]$ 时的值域.

6. 已知函数 $f(x) = 3^x$, $g(x) = |x + a| - 2$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 若函数 $y = f(g(x))$ 是偶函数, 求 a ;

(II) 若函数 $y = g(f(x))$ 存在两个零点, 求 a 的取值范围.

核心考点 6 指数型函数的值域或最值

角度 1 求指数型函数的值域或最值

7. 对于任意实数 a, b , 定义 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$. 已知函数 $f(x) = 1 - 2^x$, $g(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 若 $F(x) \leq m$ 恒成立, 则 m 的最小值为 ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

8. 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为高斯函数. 例如: $[2.1] = 2$,

$[-3.1] = -4$. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x + 3}{1 + 2^{x+1}}$, 则 $[f(-1)] = \underline{\hspace{2cm}}$, 函数 $y = [f(x)]$ 的值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知函数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $h(x) = f(2x) - f(x)$ 的值域;

(2) 若 $g(x) = f(2x) - 2k \cdot (2^x - 2^{-x})$ 在 $[1, +\infty)$ 上最小值为 -4, 求实数 k 的值.

角度 2 根据指数型函数的值域或最值求参

10. 已知函数 $f(x) = 2^{ax^2 - x + 1}$ 的值域为 M . 若 $(1, +\infty) \subseteq M$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

11. 对函数 $f(x)$, 若 $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 为某一个三角形的边长, 则称 $f(x)$

为“三角形函数”, 已知 $f(x) = \frac{2^x + m}{2^x + 1}$ 为“三角形函数”, 则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知函数 $f(x) = e^x$.

(1) 若函数 $f\left(\sqrt{mx^2 - x + m}\right)$ 的值域为 $[1, +\infty)$, 求 m 的取值范围;

(2) 若过点 $(2, n)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 的两条切线, 求 n 的取值范围.

核心考点 7 指数型函数图像性质及应用

角度 1 定点问题

13. 如果直线 $2ax - by + 14 = 0 (a > 0, b > 0)$ 和函数 $f(x) = m^{x+1} + 1 (m > 0, m \neq 1)$ 的图象恒过同一

个定点, 且该定点始终落在圆 $(x - a + 1)^2 + (y + b - 2)^2 = 25$ 的内部或圆上, 那么 $\frac{b}{a}$ 的取值范围

是 ()

- A. $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$ B. $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$
C. $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$ D. $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$

14. 对任意实数 $a > 1$ ，函数 $y = (a-1)^{x-1} + 1$ 的图象必过定点 $A(m, n)$ ， $f(x) = \left(\frac{n}{m}\right)^x$ 的定义域

为 $[0, 2]$ ， $g(x) = f(2x) + f(x)$ ，则下列结论正确的是 ()

A. $m = 1, n = 2$

B. $g(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$

C. $g(x)$ 的值域为 $[2, 6]$

D. $g(x)$ 的值域为 $[2, 20]$

15. 函数 $y = \log_a x + a^{x-1} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 (k, b) ，若 $m + n = b - k$ 且

$m > 0, n > 0$ ，则 $\frac{9}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为_____.

16. 已知函数 $g(x) = (a+1)^{x-2} + 1$ ($a > 0$) 的图象恒过定点 A，且点 A 又在函数

$f(x) = \log_{\sqrt{3}}(x+a)$ 的图象上.

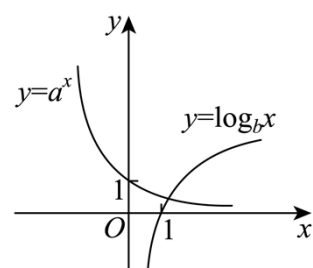
(1) 求实数 a 的值;

(2) 当方程 $|g(x+2) - 2| = 2b$ 有两个不等实根时，求 b 的取值范围;

(3) 设 $a_n = g(n+2)$ ， $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，求证： $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n < \frac{1}{3}$ ，($n \in \mathbb{N}^*$).

角度 2 根据图象判断参数的值或范围

17. 已知指数函数 $y = a^x$ ，对数函数 $y = \log_b x$ 的图象如图所示，则下列关系成立的是 ()



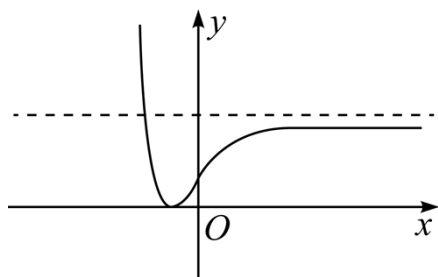
A. $0 < a < b < 1$

B. $0 < a < 1 < b$

C. $0 < b < 1 < a$

D. $a < 0 < 1 < b$

18. 函数 $f(x) = (e^{ax} - b)^2$ 的大致图像如图，则实数 a, b 的取值只可能是 ()

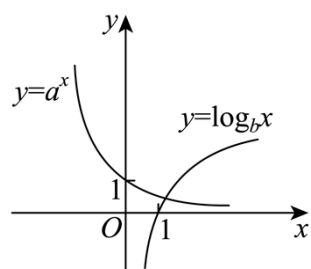


- A. $a > 0, b > 1$ B. $a > 0, 0 < b < 1$
C. $a < 0, b > 1$ D. $a < 0, 0 < b < 1$

19. 已知函数 $f(x) = a^x - b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, b \in \mathbb{R}$), $g(x) = x + 1$, 若对任意实数 x 均有 $f(x) \cdot g(x) \leq 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为_____.

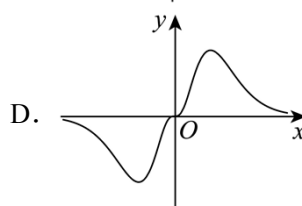
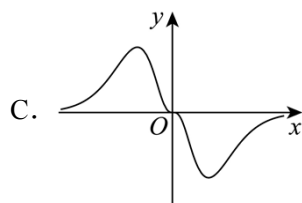
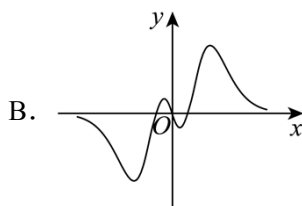
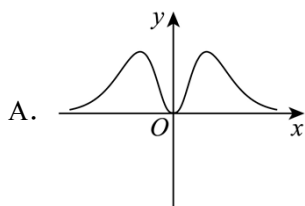
角度 3 根据指数型函数的性质图像识别

20. 已知指数函数 $y = a^x$, 对数函数 $y = \log_b x$ 的图象如图所示, 则下列关系成立的是 ()

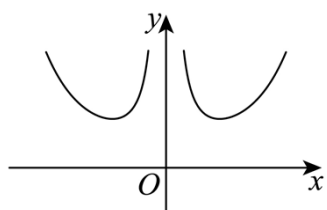


- A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < a < 1 < b$
C. $0 < b < 1 < a$ D. $a < 0 < 1 < b$

21. 函数 $f(x) = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 的大致图象是 ()



22. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



- A. $f(x) = x^2 e^{|x|}$ B. $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x^3}$ C. $f(x) = \frac{x^4}{e^{|x|}-1}$ D. $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x^2}$

核心考点 7 指数型函数图像、性质的综合应用

角度 1 与指数型函数相关的不等式恒能成立问题

23. 已知集合 $M = \left\{ x \mid \frac{1}{16} \leq 2^{2x} \leq 256 \right\}$, $N = \left\{ x \mid \frac{\log_3(x-4)}{\log_3 \sqrt[4]{2}} \geq 4 \right\}$.

(1) 求 $M \cup N$;

(2) 若对任意的 $x \in M \cup N$, $a+1 > a^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

24. 已知函数 $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b$ ($a > 0, b \in \mathbb{R}$) 在区间 $[2, 4]$ 上有最小值 1 和最大值 9, 设

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

(1) 求 a, b 的值.

(2) 若不等式 $f(3^x) - k \cdot 3^x \geq 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上有解, 求实数 k 的取值范围.

25. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - a}{2^x + 1}$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并用单调性定义证明;

(3) 若关于 x 的不等式 $f(f(x)) + f(t) < 0$ 有解, 求 t 的取值范围.

角度 2 与指数型函数相关的对称问题

26. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $y = f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

$$f(x) = 2^x - 1,$$

(1) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 计算 $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2016)$ 的值.

27. 如果函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(2c-x) = f(x)$ 恒成立, 则函数 $y = f(x)$

的图像关于直线 $x=c$ 对称. 已知函数 $f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}+x^2-2x+a$

(1) 若 $f(1)=3$, 求 a 的值;

(2) 证明: 函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称;

(3) 现在已经得知函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是严格减函数, 在 $[1, +\infty)$ 上是严格增函数, 关于 x 的不等式 $f(mx+1)<f(x^2+2)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

28. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3^x+c}(x \in \mathbb{R})$, $f(0)=\frac{1}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 已知“函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a, b) 对称”的充要条件是“ $f(a-x)+f(a+x)=2b$ 对于定义域内任何 x 恒成立”. 试用此结论判断函数 $f(x)$ 的图像是否存在对称中心, 若存在, 求出该对称中心的坐标; 若不存在, 说明理由;

(3) 若对任意 $x_1 \in [1, n]$, 都存在 $x_2 \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ 及实数 m , 使得 $f(1-mx_1)+f(x_1x_2)=1$, 求实数 n 的最大值.

参考答案:

1. A

【分析】设 $g(x) = x^3 + \pi^x - \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$, $x \in \mathbf{R}$, 判断 $g(x)$ 的单调性和奇偶性, 由 $f(a) + f(b) < 2e$

可得 $g(a) < -g(b)$, 利用函数的单调性和奇偶性即可求解.

【详解】设 $g(x) = x^3 + \pi^x - \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$, $x \in \mathbf{R}$,

因为 $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $y = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $y = x^3$, $y = \pi^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增,

因为 $g(-x) = (-x)^3 + \pi^{-x} - \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-x} = -x^3 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^x - \pi^x = -g(x)$,

所以 $g(x)$ 为奇函数,

因为 $f(a) = g(a) + e$, $f(b) = g(b) + e$,

所以 $f(a) + f(b) = g(a) + g(b) + 2e < 2e$,

所以 $g(a) < -g(b) = g(-b)$,

因为 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增,

所以 $a < -b$, 即 $a + b < 0$.

故选: A.

2. ABC

【分析】A 选项, 由于 $e^x + 1 > 1$ 恒成立, 故定义域为 $\mathbf{R}$; B 选项, 分离常数得到

$f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$, 根据 $e^x > 0$, 得到 $-1 < 1 - \frac{2}{e^x + 1} < 1$, 求出值域; C 选项, 根据函数奇偶性

的定义作出判断; D 选项, $y = e^x + 1$ 为增函数且 $y = e^x + 1 > 1$, 推出 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ 为增函数.

【详解】A, 因为 $e^x > 0$, 所以 $e^x + 1 > 1$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，故 A 正确；

$$\text{B, } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1},$$

$$e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{e^x + 1} < 1,$$

$$\text{故 } -1 < 1 - \frac{2}{e^x + 1} < 1,$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$ ，故 B 正确；

$$\text{C, 函数定义域为 } \mathbf{R}, f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数，故 C 正确；

D, 函数 $y = e^x + 1$ 是增函数，且 $y = e^x + 1 > 1$ ，

所以函数 $y = \frac{2}{e^x + 1}$ 是减函数，

所以函数 $y = -\frac{2}{e^x + 1}$ 是增函数，

故 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ 是增函数，故 D 不正确。

故选：ABC

3. $(1, +\infty)$

【分析】利用奇函数定义和单调性的定义判断 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上递减的奇函数，然后将不等式化为 $f(ax^2 - x) < f(x - 1)$ ，从而 $ax^2 - x > x - 1$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，分类讨论，利用判别式法求解即可。

【详解】由题易知， $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，因为

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^{-x} + 1} - \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \frac{e^x - 1}{1 + e^x} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数。

$$\text{又 } f(x) = \frac{1 - e^x}{e^x + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{2}{e^x + 1} - 1 - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

函数 $y = \frac{2}{e^x + 1} - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减， $y = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减。

若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(ax^2 - x) + f(-x + 1) < 0$ 恒成立,

即 $f(ax^2 - x) < -f(-x + 1)$, 又 $f(x)$ 为奇函数, 得 $f(ax^2 - x) < f(x - 1)$,

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $ax^2 - x > x - 1$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

即 $ax^2 - 2x + 1 > 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a = 0$ 时, $-2x + 1 > 0$ 不恒成立, 不符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 有 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4a < 0 \end{cases}$, 解得 $a > 1$.

综上, a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

故答案为: $(1, +\infty)$

4. $\frac{1}{2}$

【分析】根由 $f(-x) = f(x)$ 求出 a 的值, 再将 $f(x)$ 变形整理, 再利用基本不等式即可求最值.

【详解】函数 $f(x) = \frac{a^x}{3^x + 1}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域为 $\mathbf{R}$,

若函数 $f(x)$ 是偶函数, 可得 $f(-x) = f(x)$

即 $\frac{a^{-x}}{3^{-x} + 1} = \frac{a^x}{3^x + 1}$, 所以 $\frac{a^{-x} \cdot 3^x}{(3^{-x} + 1) \cdot 3^x} = \frac{a^x}{3^x + 1}$, 可得: $\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^x}{3^x + 1} = \frac{a^x}{3^x + 1}$,

所以 $\frac{3}{a} = a$, 因为 $a > 0$, 所以 $a = \sqrt{3}$,

所以 $f(x) = \frac{(\sqrt{3})^x}{3^x + 1} = \frac{1}{(\sqrt{3})^x + \frac{1}{(\sqrt{3})^x}}$,

因为 $(\sqrt{3})^x > 0$, 所以 $(\sqrt{3})^x + \frac{1}{(\sqrt{3})^x} \geq 2 \sqrt{(\sqrt{3})^x \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^x}} = 2$

当且仅当 $(\sqrt{3})^x = \frac{1}{(\sqrt{3})^x}$ 即 $x = 0$ 时等号成立,

所以 $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{3})^x + \frac{1}{(\sqrt{3})^x}} \leq \frac{1}{2}$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

5. (1) $f(x) = 1 - \frac{2}{1+2^x}$

(2) $\left[0, \frac{3}{5}\right]$

【分析】(1) 根据奇函数性质得 $f(0)=0$ 得 $a=1$, 再检验即可得答案;

(2) 根据复合函数的单调性原则判断即可, 再根据单调性求最值.

【详解】(1) 解: 因为函数 $f(x) = a - \frac{2}{1+2^x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(0) = a - \frac{2}{1+2^0} = a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

此时 $f(x) = 1 - \frac{2}{1+2^x} = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$,

此时 $f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{2^x + 1} = -f(x)$, 满足奇函数定义,

所以 $f(x) = 1 - \frac{2}{1+2^x}$

(2) 解: 由 (1) 知 $f(x) = 1 - \frac{2}{1+2^x}$,

因为函数 $t = 1 + 2^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数, 函数 $y = \frac{-2}{t}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调递增函数,

所以函数 $y = -\frac{2}{1+2^x}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数,

所以函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{1+2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性,

所以函数在 $x \in [0, 2]$ 上的最大值为 $f(x)_{\max} = f(2) = 1 - \frac{2}{1+2^2} = \frac{3}{5}$, 最小值为

$f(x)_{\min} = f(0) = 1 - \frac{2}{1+2^0} = 0$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0, \frac{3}{5}\right]$.

6. (I) 0 ; (II) $a < -2$.

【分析】(I) 利用偶函数的定义列方程即可求解;

(II) $g(f(x)) = |f(x) + a| - 2 = |3^x + a| - 2$, 若 $a \geq 0$ 时, 不符合题意; 当 $a < 0$ 时, 写成分段函数的形式, 判断单调性, 得出有两个零点的条件即可求解.

【详解】(I) $y = f(g(x)) = 3^{|x+a|-2}$ 为偶函数,

则 $f(g(-x)) = 3^{|-x+a|-2} = f(g(x))$, 即 $3^{|-x+a|-2} = 3^{|x+a|-2}$,

可得 $|x+a| = |-x+a|$, 所以 $(x+a)^2 = (-x+a)^2$

可得 $2ax=0$ 对于 $x \in R$ 恒成立, 所以 $a=0$,

$$(\text{II}) \quad g(f(x)) = |f(x)+a|-2 = |3^x+a|-2,$$

若 $a \geq 0$ 时, $g(f(x)) = 3^x + a - 2$ 在 R 上为增函数, 至多有一个零点, 不符合题意;

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } g(f(x)) = |3^x+a|-2 = \begin{cases} 3^x+a-2, & x \geq \log_3(-a) \\ -3^x-a-2, & x < \log_3(-a) \end{cases},$$

则 $g(f(x))$ 在 $(-\infty, \log_3(-a))$ 单调递减, 在 $(\log_3(-a), +\infty)$ 单调递增,

$$\text{所以 } g(f(x))_{\min} = 3^{\log_3(-a)} + a - 2 = -a + a - 2 = -2 < 0,$$

当 $x < \log_3(-a)$ 时, $-3^x - a < -a$, 所以 $-a - 2 > 0$, 可得 $a < -2$,

7. D

【分析】先求出 $F(x)$ 的解析式, 进而求出 $F(x)$ 的值域, 根据恒成立条件得出 m 的最小值.

$$\text{【详解】由题意得, } F(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \geq 0 \\ 1 - 2^x, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|},$$

$$\because |x| \geq 0, \therefore 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \leq 1,$$

$$\therefore 0 \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} < 1, \text{ 故 } 0 \leq F(x) < 1,$$

$$\therefore m \geq 1.$$

故选: D.

8. 1 $\{0, 1, 2\}$

【分析】利用分离参数法可得 $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{1+2^{x+1}} + 1 \right)$, 根据题意直接代入求解即可得

$[f(-1)]$; 根据指数函数性质可得 $f(x)$ 的值域, 进而可得 $y = [f(x)]$ 的值域.

【详解】因为 $f(x) = \frac{2^x + 3}{1 + 2^{x+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{1 + 2^{x+1}} + 1 \right)$,

所以 $[f(-1)] = \left[\frac{7}{4} \right] = 1$;

又因为 $2^{x+1} > 0$, 则 $1 + 2^{x+1} > 1$,

可得 $0 < \frac{1}{1 + 2^{x+1}} < 1$, 所以 $f(x) \in \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$,

若 $f(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$, $[f(x)] = 0$;

若 $f(x) \in [1, 2)$, $[f(x)] = 1$;

若 $f(x) \in [2, 3)$, $[f(x)] = 2$;

综上所述: 函数 $y = [f(x)]$ 的值域为 $\{0, 1, 2\}$.

故答案为: 1; $\{0, 1, 2\}$.

9. (1) $[0, +\infty)$

(2) $\sqrt{6}$

【分析】(1) 先求出 $h(x)$ 的解析式, 令 $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2$, 设 $m(t) = t^2 - t - 2, t \geq 2$, 利用二次函数的单调性求值域;

(2) 先求出 $g(x)$ 的解析式, 令 $n = 2^x - 2^{-x} \geq \frac{3}{2}$, 设 $h(n) = n^2 - 2kn + 2$, 对称轴为 $n = k$, 讨论对称轴与区间的关系, 可得最小值, 即可求解.

【详解】(1) 因为 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, 所以 $h(x) = f(2x) - f(x) = 2^{2x} + 2^{-2x} - (2^x + 2^{-x})$,

令 $t = 2^x + 2^{-x}$, 则 $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$, 当且仅当 $2^x = 2^{-x}$ 即 $x = 0$ 时, 等号成立,

所以 $2^{2x} + 2^{-2x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$, 记 $m(t) = t^2 - t - 2, t \geq 2$,

易知函数 $m(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $m(t) \geq m(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$,

即 $m(t)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 所以函数 $h(x) = f(2x) - f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$.

(2) $g(x) = f(2x) - 2k \cdot (2^x - 2^{-x}) = 2^{2x} + 2^{-2x} - 2k \cdot (2^x - 2^{-x})$

$= (2^x - 2^{-x})^2 - 2k \cdot (2^x - 2^{-x}) + 2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/717054153025006140>