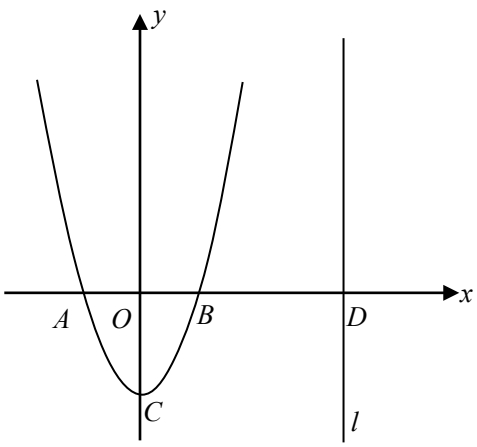
2013 年中考二次函数压轴题精选

1、（绵阳市 2013 年）如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的顶点 C 的坐标为（0，-2），交 x 轴于 A、B 两点，其中 A（-1，0），直线 l：$x=m$（$m>1$）与 x 轴交于 D。

（1）求二次函数的解析式和 B 的坐标；

（2）在直线 l 上找点 P（P 在第一象限），使得以 P、D、B 为顶点的三角形与以 B、C、O 为顶点的三角形相似，求点 P 的坐标（用含 m 的代数式表示）；

（3）在（2）成立的条件下，在抛物线上是否存在第一象限内的点 Q，使△BPQ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形？如果存在，请求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由。



解：（1）①二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的顶点 C 的坐标为（0，-2），$c=-2$，$-\frac{b}{2a}=0$，$b=0$，

点 A(-1,0)、点 B 是二次函数 $y=ax^2-2$ 的图象与 x 轴的交点，$a-2=0$, $a=2$. 二次函数的解析式为 $y=2x^2-2$；

②点 B 与点 A(-1,0)关于直线 x=0 对称，点 B 的坐标为（1，0）；

（2）∠BOC=∠PDB=90°，点 P 在直线 x=m 上，

设点 P 的坐标为（m,p），OB=1，OC=2，DB= m-1，DP=|p|，

①当△BOC∽△PDB 时，$\frac{OB}{OC}=\frac{DP}{DB}$, $\frac{1}{2}=\frac{|p|}{m-1}$, $p=\frac{m-1}{2}$ 或 $p=\frac{1-m}{2}$,

点 P 的坐标为（m，$\frac{m-1}{2}$）或（m，$\frac{1-m}{2}$）；

②当△BOC∽△BDP 时，$\frac{OB}{OC}=\frac{DB}{DP}$, $\frac{1}{2}=\frac{m-1}{|p|}$, p=2m-2 或 p=2-2m,

点 P 的坐标为（m，2m-2）或（m，2-2m）；

综上所述点 P 的坐标为（m，$\frac{m-1}{2}$）、（m，$\frac{1-m}{2}$）、（m，2m-2）或（m，2-2m）；

（3）不存在满足条件的点 Q。

点 Q 在第一象限内的抛物线 $y=2x^2-2$ 上，

令点 Q 的坐标为（x，$2x^2-2$），x>1，过点 Q 作 QE⊥直线 l，

垂足为 E，△BPQ 为等腰直角三角形，PB=PQ，∠PEQ=∠PDB，

∠EPQ=∠DBP，△PEQ≌△BDP，QE=PD，PE=BD，

① 当 P 的坐标为（m，$\frac{m-1}{2}$）时，

$\begin{cases} m-x=\frac{m-1}{2}, \\ 2x^2-2-\frac{m-1}{2}=m-1, \end{cases}$ $\begin{cases} m=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} m=1 \\ x=1 \end{cases}$

与 x>1 矛盾，此时点 Q 不满足题设条件；

② 当 P 的坐标为（m，$\frac{1-m}{2}$）时，

$$\begin{cases} x-m=\frac{m-1}{2} \\ 2x^2-2-\frac{1-m}{2}=m-1, \end{cases} \quad \begin{cases} m=-\frac{2}{9} \\ x=-\frac{5}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} m=1 \\ x=1 \end{cases}$$

与 x>1 矛盾，此时点 Q 不满足题设条件；

③ 当 P 的坐标为（m，2m-2）时，

$$\begin{cases} m-x=2m-2 \\ 2x^2-2-(2m-2)=m-1, \end{cases} \quad \begin{cases} m=\frac{9}{2} \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} m=1 \\ x=1 \end{cases}$$

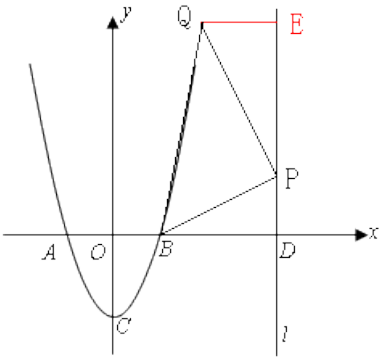
与 x>1 矛盾，此时点 Q 不满足题设条件；

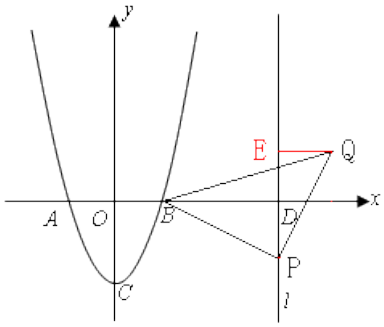
④当 P 的坐标为（m，2-2m）时，

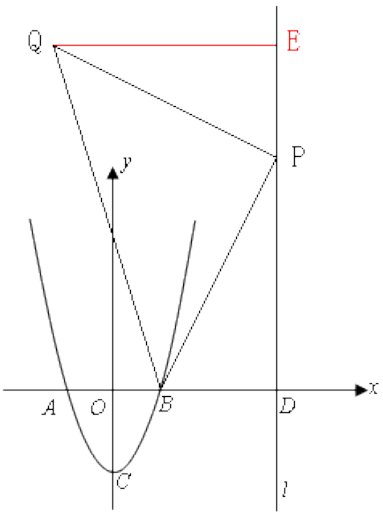
$$\begin{cases} x-m=2m-2 \\ 2x^2-2-(2-2m)=m-1 \end{cases} \quad \begin{cases} m=\frac{5}{18} \\ x=-\frac{7}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} m=1 \\ x=1 \end{cases}$$

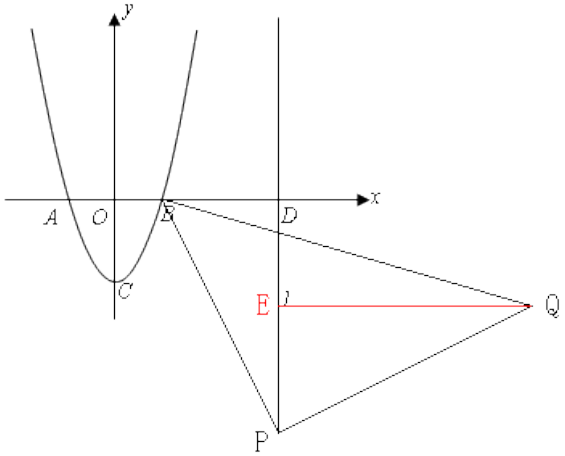
与 x>1 矛盾，此时点 Q 不满足题设条件；

综上所述，不存在满足条件的点 Q。







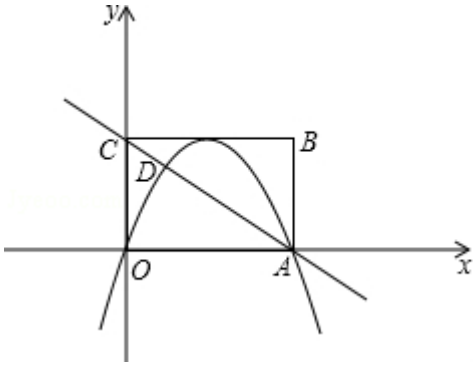


2、（2013•昆明压轴题）如图，矩形 OABC 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴的正半轴上，点 C 在 y 轴的正半轴上，OA=4，OC=3，若抛物线的顶点在 BC 边上，且抛物线经过 O，A 两点，直线 AC 交抛物线于点 D．

（1）求抛物线的解析式；

（2）求点 D 的坐标；

（3）若点 M 在抛物线上，点 N 在 x 轴上，是否存在以 A，D，M，N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．



解：（1）设抛物线顶点为 E，根据题意 OA=4，OC=3，得：E（2，3），

设抛物线解析式为 $y=a(x-2)^2+3$，

将 A（4，0）坐标代入得：$0=4a+3$，即 $a=-\frac{3}{4}$，

则抛物线解析式为 $y=-\frac{3}{4}(x-2)^2+3=-\frac{3}{4}x^2+3x$；

（2）设直线 AC 解析式为 $y=kx+b$（$k\neq0$），

将 A（4，0）与 C（0，3）代入得：$\begin{cases}4k+b=0\\b=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\b=3\end{cases}$，

故直线 AC 解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$，

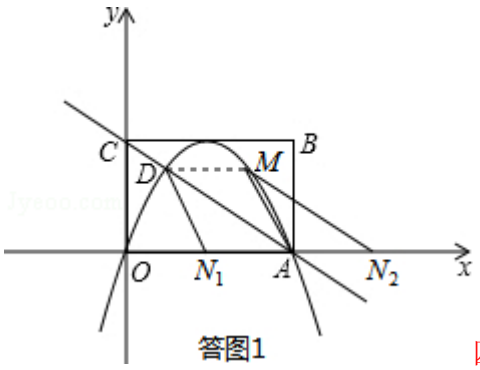
与抛物线解析式联立得：$\begin{cases}y=-\frac{3}{4}x+3\\y=-\frac{3}{4}x^2+3x\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=1\\y=\frac{9}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$，

则点 D 坐标为（1，$\frac{9}{4}$）；

（3）存在，分两种情况考虑：

①当点 M 在 x 轴上方时，如答图 1 所示：



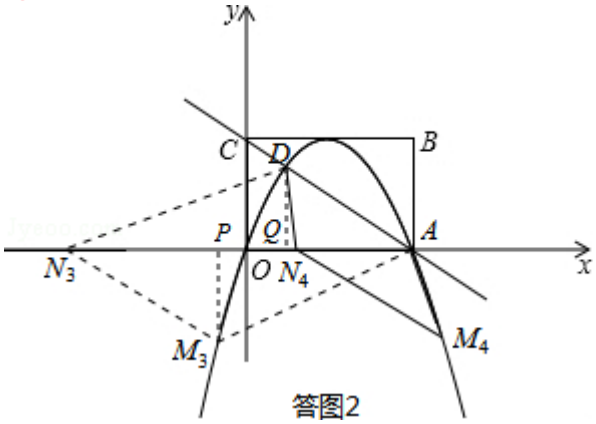
答图1

四边形 ADMN 为平行四边形，DM∥AN，DM=AN，

由对称性得到 M（3，$\frac{9}{4}$），即 DM=2，故 AN=2，

∴N_1（2，0），N_2（6，0）；

②当点 M 在 x 轴下方时，如答图 2 所示：



答图2

过点 D 作 DQ⊥x 轴于点 Q，过点 M 作 MP⊥x 轴于点 P，可得△ADQ≌△NMP，

∴MP=DQ=$\frac{9}{4}$，NP=AQ=3，

将 y_M=－ $\frac{9}{4}$代入抛物线解析式得：－ $\frac{9}{4}$=－ $\frac{3}{4}x^2+3x$，

解得：$x_M=2-\sqrt{7}$或 $x_M=2+\sqrt{7}$，

∴$x_N=x_M-3=-\sqrt{7}-1$ 或$\sqrt{7}-1$，

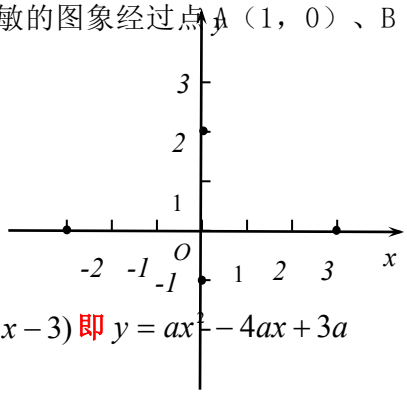
∴N_3（$-\sqrt{7}-1$，0），N_4（$\sqrt{7}-1$，0）.

综上所述，满足条件的点 N 有四个：N_1（2，0），N_2（6，0），N_3（$-\sqrt{7}-1$，0），N_4（$\sqrt{7}-1$，0）.

3、（2013 陕西）在平面直角坐标系中，一个二次函灵敏的图象经过点 A（1，0）、B（3，0）两点.

（1）写出这个二次函数的对称轴；

（2）设这个二次函数的顶点为 D，与 y 轴交于点 C，它的对称轴与 x 轴交于点 E，连接 AD、DE 和 DB，当△AOC 与△DEB 相似时，求这个二次函数的表达式。



（第 24 题图）

解：（1）对称轴为直线：x=2。

（2）∵A（1，0）、B（3，0），所以设 $y=a(x-1)(x-3)$ **即** $y=ax^2-4ax+3a$

当 x=0 时，y=3a，当 x=2 时，y=$-a$

∴C（0，3a），D(2,-a)　∴OC=|3a|,

∵A（1，0）、E（2，0），

∴OA=1,EB=1,DE=}-a|=|a|

在△AOC 与△DEB 中，

∵∠AOC=∠DEB=90°

∴当$\frac{AO}{OC}=\frac{DE}{EB}$时，△AOC∽△DEB

∴$\frac{1}{|3a|}=\frac{|a|}{1}$时，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

当$\frac{AO}{OC}=\frac{EB}{DE}$时，△AOC∽△BED

∴$\frac{1}{|3a|}=\frac{1}{|a|}$时，此方程无解，

综上所得：所求二次函数的表达式为：

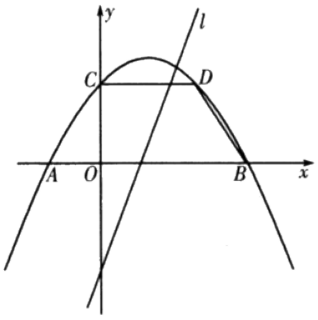
$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{4}{3}\sqrt{3}x+\sqrt{3}$或$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

4、（2013 年潍坊市压轴题）如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$关于直线$x=1$对称，与坐标轴交于A、B、C三点，且$AB=4$,点$D\left(2,\frac{3}{2}\right)$在抛物线上，直线是一次函数$y=kx-2(k\neq 0)$的图象，点$O$是坐标原点.

（1）求抛物线的解析式；

（2）若直线平分四边形$OBDC$的面积，求k的值.

（3）把抛物线向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，所得抛物线与直线交于M、N两点，问在y轴正半轴上是否存在一定点P，使得不论k取何值，直线PM与PN总是关于y轴对称？若存在，求出P点坐标；若不存在，请说明理由.



答案：（1）因为抛物线关于直线 x=1 对称，AB=4，所以 A(-1，0),B(3，0),

由点 D(2，1.5)在抛物线上，所以$\begin{cases}a-b+c=0\\4a+2b+c=1.5\end{cases}$，所以 3a+3b=1.5,即 a+b=0.5,

又$-\frac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$,代入上式解得 $a=-0.5$,$b=1$,从而 c=1.5,所以 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$.

（2）由（1）知 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$，令 x=0,得 c(0,1.5),所以 CD//AB,

令 $kx-2=1.5$,得 l 与 CD 的交点 F($\frac{7}{2k},\frac{3}{2}$)，

令 $kx-2=0$，得 l 与 x 轴的交点 E($\frac{2}{k},0$)，

根据 $S_{四边形OEFC}=S_{四边形EBDF}$ 得：OE+CF=DF+BE,

即：$\frac{2}{k}+\frac{7}{2k}=(3-\frac{2}{k})+(2-\frac{7}{2k}),$解得$k=\frac{11}{5},$

（3）由（1）知 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2,$

所以把抛物线向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，所得抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2$

假设在 y 轴上存在一点 P(0，t)，t＞0，使直线 PM 与 PN 关于 y 轴对称，过点 M、N 分别向 y 轴作垂线 MM_1、NN_1，垂足分别为 M_1、N_1，因为∠MPO=∠NPO,所以 Rt△MPM_1∽Rt△NPN_1,

所以$\frac{MM_1}{NN_1}=\frac{PM_1}{PN_1}$,……(1)

不妨设 M(x_M,y_M)在点 N(x_N,y_N)的左侧，因为 P 点在 y 轴正半轴上，

则（1）式变为$\frac{-x_M}{x_N}=\frac{t-y_M}{t-y_N}$,又 $y_M=k\,x_M-2$, $y_N=k\,x_N-2$,

所以（t+2）(x_M+x_N)=2k x_M x_N,……(2)

把 y=kx-2(k≠0)代入 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 中，整理得 $x^2+2kx-4=0$,

所以 $x_M+x_N=-2k$, x_M $x_N=-4$,代入（2）得 t=2,符合条件，

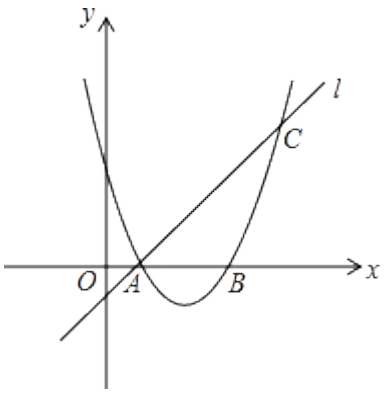
故在 y 轴上存在一点 P（0,2），使直线 PM 与 PN 总是关于 y 轴对称.

5、（2013•新疆压轴题）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点，过点 A 的直线 l 与抛物线交于点 C，其中 A 点的坐标是（1，0），C 点坐标是（4，3）.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在（1）中抛物线的对称轴上是否存在点 D，使△BCD 的周长最小？若存在，求出点 D 的坐标，若不存在，请说明理由；

（3）若点 E 是（1）中抛物线上的一个动点，且位于直线 AC 的下方，试求△ACE 的最大面积及 E 点的坐标.



解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 A（1，0），点 C（4，3），

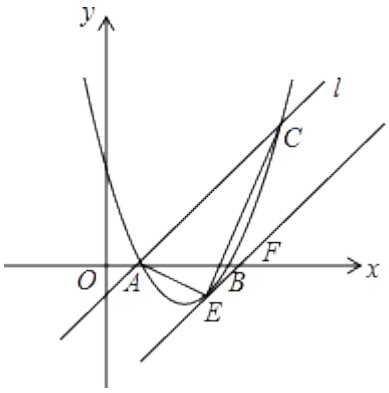
∴$\begin{cases}a+b+3=0\\16a+4b+3=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$，

所以，抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3$；

（2）∵点 A、B 关于对称轴对称，

∴点 D 为 AC 与对称轴的交点时△BCD 的周长最小，

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$（$k\neq0$），



则，$\begin{cases}k+b=0\\4k+b=3\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=1\\b=-1\end{cases}$，

所以，直线 AC 的解析式为 $y=x-1$，

∵$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

∴抛物线的对称轴为直线 x=2，

当 x=2 时，y=2-1=1，

∴抛物线对称轴上存在点 D（2，1），使△BCD 的周长最小；

（3）如图，设过点 E 与直线 AC 平行线的直线为 $y=x+m$，

联立，$\begin{cases}y=x+m\\y=x^2-4x+3\end{cases}$

消掉 y 得，$x^2-5x+3-m=0$，

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times(3-m)=0$，

即 $m=-\frac{13}{4}$时，点 E 到 AC 的距离最大，△ACE 的面积最大，

此时 $x=\frac{5}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$，

∴点 E 的坐标为（$\frac{5}{2}$，$-\frac{3}{4}$），

设过点 E 的直线与 x 轴交点为 F，则 F（$\frac{13}{4}$，0），

∴AF=$\frac{13}{4}$－ 1=$\frac{9}{4}$，

∵直线 AC 的解析式为 y=x－ 1，

∴∠CAB=45°，

∴点 F 到 AC 的距离为$\frac{9}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$，

又∵AC=$\sqrt{3^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$，

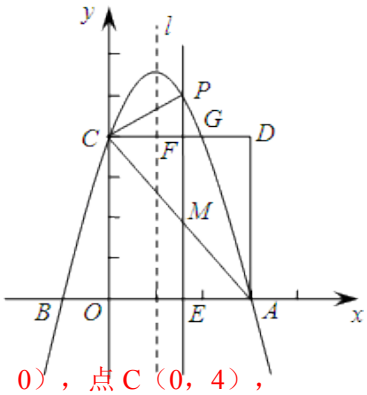
∴△ACE 的最大面积=$\times3\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{8}=\frac{27}{8}$，此时 E 点坐标为（$\frac{5}{2}$，－ $\frac{3}{4}$）．

6、（2013 凉山州压轴题）如图，抛物线 y=ax^2－ 2ax+c（a≠0）交 x 轴于 A、B 两点，A 点坐标为（3，0），与 y 轴交于点 C（0，4），以 OC、OA 为边作矩形 OADC 交抛物线于点 G．

（1）求抛物线的解析式；

（2）抛物线的对称轴 l 在边 OA（不包括 O、A 两点）上平行移动，分别交 x 轴于点 E，交 CD 于点 F，交 AC 于点 M，交抛物线于点 P，若点 M 的横坐标为 m，请用含 m 的代数式表示 PM 的长；

（3）在（2）的条件下，连结 PC，则在 CD 上方的抛物线部分是否存在这样的点 P，使得以 P、C、F 为顶点的三角形和△AEM 相似？若存在，求出此时 m 的值，并直接判断△PCM 的形状；若不存在，请说明理由．



解答：解：（1）∵抛物线 y=ax^2－ 2ax+c（a≠0）经过点 A（3，0），点 C（0，4），

∴$\begin{cases}9a-6a+c=0\\c=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\frac{4}{3},\\c=4\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 y=－ x^2+x+4；

（2）设直线 AC 的解析式为 y=kx+b，

∵A（3，0），点 C（0，4），

∴$\begin{cases}3k+b=0\\b=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\b=4\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为 y=－ x+4．

∵点 M 的横坐标为 m，点 M 在 AC 上，

∴M 点的坐标为（m，－ m+4），

∵点 P 的横坐标为 m，点 P 在抛物线 y=－ x^2+x+4 上，

∴点 P 的坐标为（m，－ m^2+m+4），

∴PM=PE－ ME=（－ m^2+m+4）－ （－ m+4）=－ m^2+4m，

即 PM=－ m^2+4m（0＜m＜3）；

（3）在（2）的条件下，连结 PC，在 CD 上方的抛物线部分存在这样的点 P，使得以 P、C、F 为顶点的三角形和△AEM 相似．理由如下：由题意，可得 AE=3－ m，EM=－ m+4，CF=m，PF=－ m^2+m+4－ 4=－ m^2+m．

若以 P、C、F 为顶点的三角形和△AEM 相似，分两种情况：①若△PFC∽△AEM，则 PF：AE=FC：EM，

即（－ m^2+m）：（3－ m）=m：（－ m+4），

∵m≠0 且 m≠3，

∴m=$\frac{23}{16}$.

∵△PFC∽△AEM，∴∠PCF=∠AME，

∵∠AME=∠CMF，∴∠PCF=∠CMF.

在直角△CMF 中，∵∠CMF+∠MCF=90°，

∴∠PCF+∠MCF=90°，即∠PCM=90°，

∴△PCM 为直角三角形；

②若△CFP∽△AEM，则 CF：AE=PF：EM，

即 m：（3－ m）=（－ m^2+m）：（－ m+4），

∵m≠0 且 m≠3，

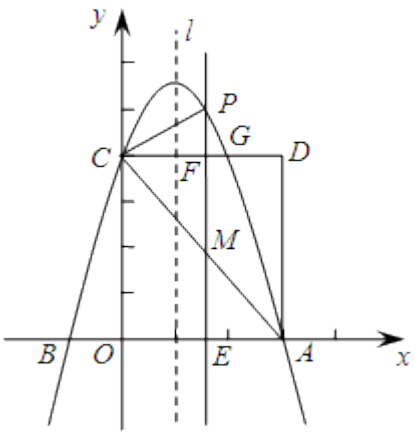
∴m=1.

∵△CFP∽△AEM，∴∠CPF=∠AME，

∵∠AME=∠CMF，∴∠CPF=∠CMF.

∴CP=CM，

∴△PCM 为等腰三角形.



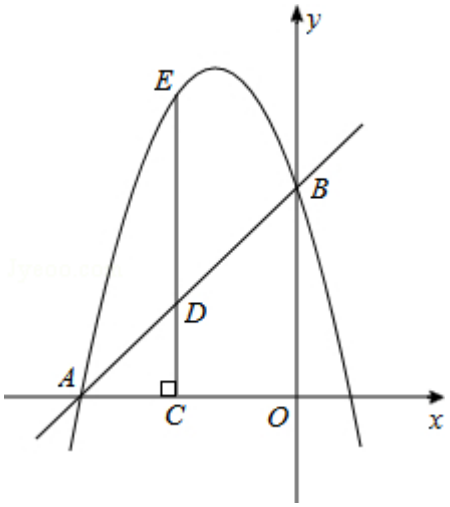
综上所述，存在这样的点 P 使△PFC 与△AEM 相似．此时 m 的值为$\frac{23}{16}$或 1，△PCM 为直角三角形或等腰三角形.

7、（2013•曲靖压轴题）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 y=x+4 与坐标轴分别交于 A、B 两点，过 A、B 两点的抛物线为 y=－ x^2+bx+c．点 D 为线段 AB 上一动点，过点 D 作 CD⊥x 轴于点 C，交抛物线于点 E.

（1）求抛物线的解析式.

（2）当 DE=4 时，求四边形 CAEB 的面积.

（3）连接 BE，是否存在点 D，使得△DBE 和△DAC 相似？若存在，求此点 D 坐标；若不存在，说明理由.



解：（1）在直线解析式 y=x+4 中，令 x=0，得 y=4；令 y=0，得 x=－ 4，

∴A（－ 4，0），B（0，4）.

∵点 A（－ 4，0），B（0，4）在抛物线 y=－ x^2+bx+c 上，

∴$\begin{cases}-16-4b+c=0\\c=4\end{cases}$，

解得：b=－ 3，c=4，

∴抛物线的解析式为：y=－ x^2－ 3x+4．

（2）设点 C 坐标为（m，0）（m＜0），则 OC=－ m，AC=4+m．

∵OA=OB=4，∴∠BAC=45°，

∴△ACD 为等腰直角三角形，∴CD=AC=4+m，

∴CE=CD+DE=4+m+4=8+m，

∴点 E 坐标为（m，8+m）．

∵点 E 在抛物线 y=－ x^2－ 3x+4 上，

∴8+m=－ m^2－ 3m+4，解得 m=－ 2．

∴C（－ 2，0），AC=OC=2，CE=6，

$S_{四边形CAEB}=S_{\triangle ACE}+S_{梯形OCEB}-S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}\times2\times6+\frac{1}{2}$（6+4）×2－ $\frac{1}{2}\times2\times4=12$．

（3）设点 C 坐标为（m，0）（m＜0），则 OC=－ m，CD=AC=4+m，BD=$\sqrt{2}$OC=－ $\sqrt{2}$m，则 D（m，4+m）．

∵△ACD 为等腰直角三角形，△DBE 和△DAC 相似

∴△DBE 必为等腰直角三角形．

i）若∠BED=90°，则 BE=DE，

∵BE=OC=－ m，

∴DE=BE=－ m，

∴CE=4+m－ m=4，

∴E（m，4）．

∵点 E 在抛物线 y=－ x^2－ 3x+4 上，

∴4=－ m^2－ 3m+4，解得 m=0（不合题意，舍去）或 m=－ 3，

∴D（－ 3，1）；

ii）若∠EBD=90°，则 BE=BD=－ $\sqrt{2}$m，

在等腰直角三角形 EBD 中，DE=$\sqrt{2}$BD=－ 2m，

∴CE=4+m－ 2m=4－ m，

∴E（m，4－ m）．

∵点 E 在抛物线 y=－ x^2－ 3x+4 上，

∴4－ m=－ m^2－ 3m+4，解得 m=0（不合题意，舍去）或 m=－ 2，

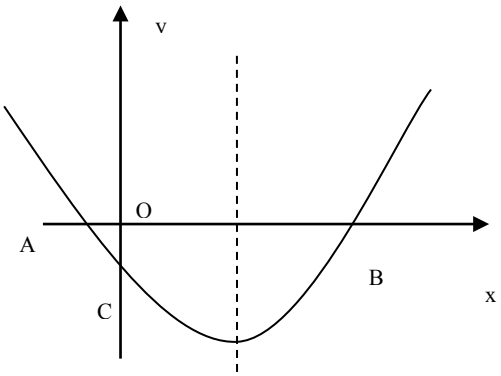
∴D（－ 2，2）．

综上所述，存在点 D，使得△DBE 和△DAC 相似，点 D 的坐标为（－ 3，1）或（－ 2，2）．11、8、(2013 年临沂压轴题)如图，抛物线经过 $A(-1,0),B(5,0),C(0,-\frac{5}{2})$ 三点.

(1)求抛物线的解析式；

(2)在抛物线的对称轴上有一点 P，使 PA+PC 的值最小，求点 P 的坐标；

(3)点 M 为 x 轴上一动点，在抛物线上是否存在一点 N，使以 A,C,M,N 四点构成的四边形为平行四边形？若存在，求点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.

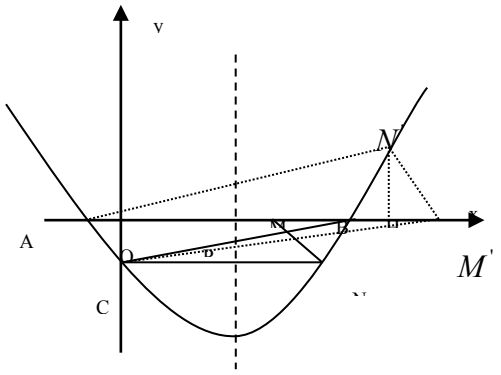


（第 26 题图）

解析：解：（1）设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

根据题意，得 $\begin{cases} a-b+c=0, \\ 25a+5b+c=0, \\ c=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}, \\ b=-2, \\ c=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$



（第 26 题图）

∴抛物线的解析式为：$y=\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{5}{2}$.

（2）由题意知，点 A 关于抛物线对称轴的对称点为点 B，连接 BC 交抛物线的对称轴于点 P，则 P 点 即为所求.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，由题意，得 $\begin{cases} 5k+b=0, \\ b=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=\dfrac{1}{2}, \\ b=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

∴直线 BC 的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$.

∵抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{5}{2}$ 的对称轴是 $x=2$，∴当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2}$.

∴点 P 的坐标是 $(2,-\dfrac{3}{2})$.

（3）存在

(i)当存在的点 N 在 x 轴的下方时，如图所示，∵四边形 ACNM 是平行四边形，∴CN∥x 轴，∴点 C 与点 N 关于对称轴 x=2 对称，∵C 点的坐标为 $(0,-\dfrac{5}{2})$，∴点 N 的坐标为 $(4,-\dfrac{5}{2})$.

（II）当存在的点 N' 在 x 轴上方时，如图所示，作 $N'H \perp x$ 轴于点 H，∵四边形 $ACM'N'$ 是平行四边形，∴ $AC = M'N', \angle N'M'H = \angle CAO$，

∴Rt△CAO ≌Rt△ $N'M'H$，∴ $N'H = OC$.

∵点 C 的坐标为 $(0, -\frac{5}{2}), \therefore N'H = \frac{5}{2}$，即 N 点的纵坐标为 $\frac{5}{2}$，

∴ $\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 - 4x - 10 = 0$

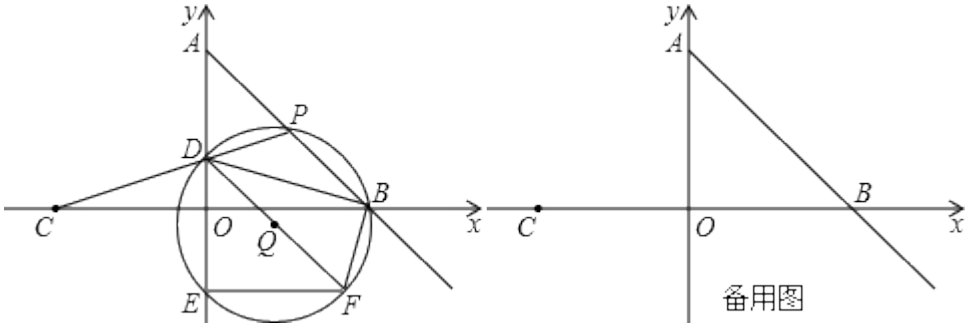
解得 $x_1 = 2 + \sqrt{14}, x_2 = 2 - \sqrt{14}$.

∴点 N' 的坐标为 $(2 - \sqrt{14}, \frac{5}{2})$ 和 $(2 + \sqrt{14}, \frac{5}{2})$.

综上所述，满足题目条件的点 N 共有三个，

分别为 $(4, -\frac{5}{2})$.，$(2 + \sqrt{14}, \frac{5}{2})$，$(2 - \sqrt{14}, \frac{5}{2})$

9、（2013•宁波压轴题）如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为（0，4），点 B 的坐标为（4，0），点 C 的坐标为（﹣ 4，0），点 P 在射线 AB 上运动，连结 CP 与 y 轴交于点 D，连结 BD．过 P，D，B 三点作⊙Q 与 y 轴的另一个交点为 E，延长 DQ 交⊙Q 于点 F，连结 EF，BF．



（1）求直线 AB 的函数解析式；

（2）当点 P 在线段 AB（不包括 A，B 两点）上时．

①求证：∠BDE=∠ADP；

②设 DE=x，DF=y．请求出 y 关于 x 的函数解析式；

（3）请你探究：点 P 在运动过程中，是否存在以 B，D，F 为顶点的直角三角形，满足两条直角边之比为 2：1？如果存在，求出此时点 P 的坐标：如果不存在，请说明理由．

解：（1）设直线 AB 的函数解析式为 y=kx+4，

代入（4，0）得：4k+4=0，

解得：k=﹣ 1，

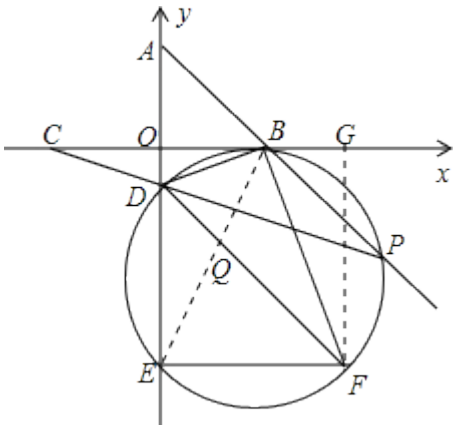
则直线 AB 的函数解析式为 y=﹣ x+4；

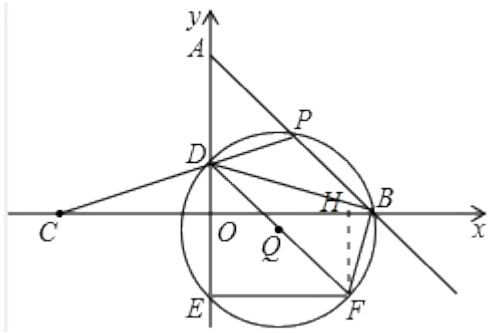
（2）①由已知得：

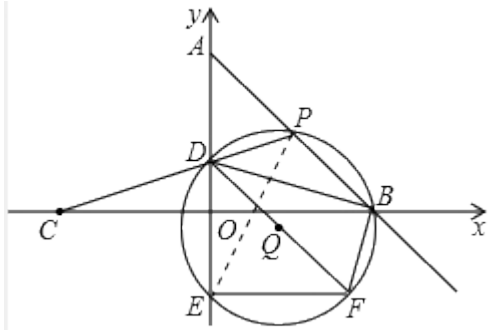
OB=OC，∠BOD=∠COD=90°，

又∵OD=OD，
∴△BOD≌△COD，
∴∠BOD=∠CDO，
∵∠CDO=∠ADP，
∴∠BDE=∠ADP，
②连结 PE，
∵∠ADP 是△DPE 的一个外角，∴∠ADP=∠DEP+∠DPE，
∵∠BDE 是△ABD 的一个外角，∴∠BDE=∠ABD+∠OAB，
∵∠ADP=∠BDE，∠DEP=∠ABD，∴∠DPE=∠OAB，
∵OA=OB=4，∠AOB=90°，∴∠OAB=45°，∴∠DPE=45°，∴∠DFE=∠DPE=45°，
∵DF 是⊙Q 的直径，∴∠DEF=90°，∴△DEF 是等腰直角三角形，
∴DF=$\sqrt{2}$DE，即 y=$\sqrt{2}$x；
（3）当 BD：BF=2：1 时，
过点 F 作 FH⊥OB 于点 H，
∵∠DBO+∠OBF=90°，∠OBF+∠BFH=90°，∴∠DBO=∠BFH，
又∵∠DOB=∠BHF=90°，∴△BOD∽△FHB，∴$\frac{OB}{HF}=\frac{OD}{HB}=\frac{BD}{FB}$=2，∴FH=2，OD=2BH，
∵∠FHO=∠EOH=∠OEF=90°，∴四边形 OEFH 是矩形，
∴OE=FH=2，∴EF=OH=4－ OD，
∵DE=EF，∴2+OD=4－ OD，
解得：OD=，∴点 D 的坐标为（0，），
∴直线 CD 的解析式为 y=x+，由$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \\ y=-x+4 \end{cases}$得：$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$，
则点 P 的坐标为（2，2）；当$\frac{BD}{BF}$=时，
连结 EB，同（2）①可得：∠ADB=∠EDP，
而∠ADB=∠DEB+∠DBE，∠EDP=∠DAP+∠DPA，
∵∠DEP=∠DPA，∴∠DBE=∠DAP=45°，∴△DEF 是等腰直角三角形，
过点 F 作 FG⊥OB 于点 G，
同理可得：△BOD∽△FGB，∴$\frac{OB}{GF}=\frac{OD}{GB}=\frac{BD}{FB}$=，
∴FG=8，OD=BG，
∵∠FGO=∠GOE=∠OEF=90°，∴四边形 OEFG 是矩形，
∴OE=FG=8，∴EF=OG=4+2OD，
∵DE=EF，∴8－ OD=4+2OD，OD=$\frac{4}{3}$，
∴点 D 的坐标为（0，－ $\frac{4}{3}$），
直线 CD 的解析式为：y=－ $\frac{1}{3}$x－ $\frac{4}{3}$，
由$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3} \\ y=-x+4 \end{cases}$得：$\begin{cases} x=8 \\ y=-4 \end{cases}$，

∴点 P 的坐标为（8，－ 4），
综上所述，点 P 的坐标为（2，2）或（8，－ 4）．





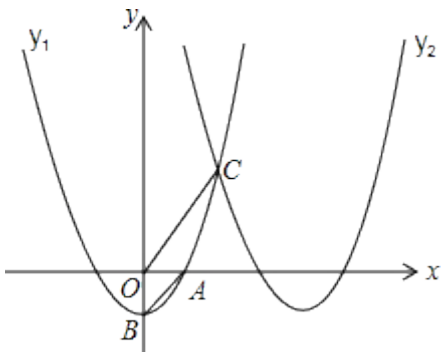


10、（2013 四川宜宾压轴题）如图，抛物线 $y_1=x^2-1$ 交 x 轴的正半轴于点 A，交 y 轴于点 B，将此抛物线向右平移 4 个单位得抛物线 y_2，两条抛物线相交于点 C.

（1）请直接写出抛物线 y_2 的解析式；

（2）若点 P 是 x 轴上一动点，且满足$\angle CPA=\angle OBA$，求出所有满足条件的 P 点坐标；

（3）在第四象限内抛物线 y_2 上，是否存在点 Q，使得$\triangle QOC$ 中 OC 边上的高 h 有最大值？若存在，请求出点 Q 的坐标及 h 的最大值；若不存在，请说明理由.



解：（1）抛物线 $y_1=x^2-1$ 向右平移 4 个单位的顶点坐标为（4，－1），

所以，抛物线 y_2 的解析式为 $y_2=(x-4)^2-1$；

（2）$x=0$ 时，$y=-1$，

$y=0$ 时，$x^2-1=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-1$，

所以，点 A（1，0），B（0，－1），

$\therefore\angle OBA=45°$，

联立$\begin{cases}y=x^2-1\\y=(x-4)^2-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，　　∴点 C 的坐标为（2，3），

$\because\angle CPA=\angle OBA$，∴点 P 在点 A 的左边时，坐标为（－1，0），

在点 A 的右边时，坐标为（5，0），

所以，点 P 的坐标为（－1，0）或（5，0）；

（3）存在．

∵点 C（2，3），

∴直线 OC 的解析式为 $y=x$，

设与 OC 平行的直线 $y=x+b$，联立$\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+b\\y=(x-4)^2-1\end{cases}$，

消掉 y 得，$2x^2-19x+30-2b=0$，

当$\Delta=0$，方程有两个相等的实数根时，ΔQOC 中 OC 边上的高 h 有最大值，

此时 $x_1=x_2=\times(-\frac{-19}{2})=\frac{19}{4}$，

此时 $y=(\frac{19}{4}-4)^2-1=-\frac{7}{16}$，

∴存在第四象限的点 Q（$\frac{19}{4}$，$-\frac{7}{16}$），使得ΔQOC 中 OC 边上的高 h 有最大值，

此时$\Delta=19^2-4\times2\times(30-2b)=0$　　解得 $b=-\frac{121}{16}$，

∴过点 Q 与 OC 平行的直线解析式为 $y=x-\frac{121}{16}$，

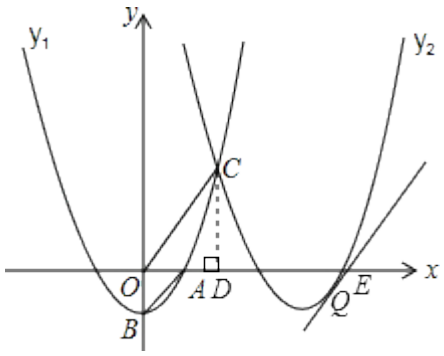
令 $y=0$，则 $x-\frac{121}{16}=0$，解得 $x=\frac{121}{24}$，

设直线与 x 轴的交点为 E，则 $E(\frac{121}{24},0)$，

过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于 D，根据勾股定理，$OC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

则 $\sin\angle COD=\frac{h}{OE}=\frac{3}{\sqrt{13}}$，

解得 $h_{最大}=\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{121}{24}=\frac{121\sqrt{13}}{104}$.



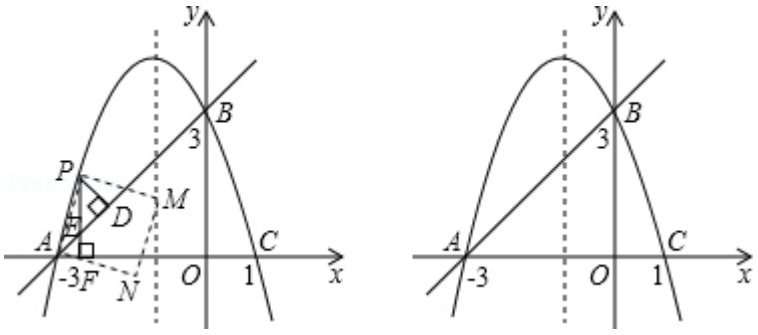
11、（2013•广安压轴题）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B、C 三点，已知点 A（－3，0），B（0，3），C（1，0）.

（1）求此抛物线的解析式.

（2）点 P 是直线 AB 上方的抛物线上一动点，（不与点 A、B 重合），过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 F，交直线 AB 于点 E，作 PD⊥AB 于点 D.

①动点 P 在什么位置时，△PDE 的周长最大，求出此时 P 点的坐标；

②连接 PA，以 AP 为边作图示一侧的正方形 APMN，随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随之改变．当顶点 M 或 N 恰好落在抛物线对称轴上时，求出对应的 P 点的坐标．（结果保留根号）



解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A（－3，0），B（0，3），C（1，0），

∴$\begin{cases}9a-3b+c=0\\c=3\\a+b+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=3\end{cases}$，所以，抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$；

（2）①∵A（－3，0），B（0，3），∴OA=OB=3，

∴△AOB 是等腰直角三角形，∴∠BAO=45°，

∵PF⊥x 轴，∴∠AEF=90°－45°=45°，

又∵PD⊥AB，∴△PDE 是等腰直角三角形，∴PD 越大，△PDE 的周长越大，

易得直线 AB 的解析式为 y=x+3，

设与 AB 平行的直线解析式为 y=x+m，联立$\begin{cases}y=x+m\\y=-x^2-2x+3\end{cases}$，

消掉 y 得，$x^2+3x+m-3=0$，

当$\Delta=3^2-4\times1\times(m-3)=0$，

即 m=$\frac{21}{4}$时，直线与抛物线只有一个交点，PD 最长，

此时 x=$-\frac{3}{2}$，y=$-\frac{3}{2}+\frac{21}{4}=\frac{15}{4}$，

∴点 P（$-\frac{3}{2}$，$\frac{15}{4}$）时，△PDE 的周长最大；

②抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 的对称轴为直线 x=$-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$，

（i）如图 1，点 M 在对称轴上时，过点 P 作 PQ⊥对称轴于 Q，

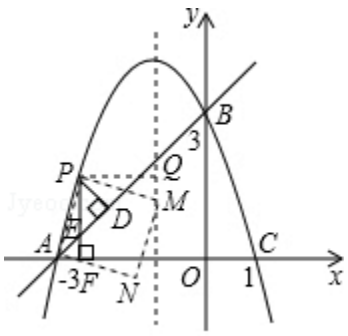


图1

在正方形 APMN 中，AP=PM，∠APM=90°，

∴∠APF+∠FPM=90°，∠QPM+∠FPM=90°，

∴∠APF=∠QPM，

∵在△APF 和△MPQ 中，$\begin{cases}\angle APF=\angle QPM\\\angle AFP=\angle MQP=90^\circ\\AP=PM\end{cases}$，

∴△APF≌△MPQ（AAS），

∴PF=PQ，

设点 P 的横坐标为 n（n＜0），则 PQ=－1－n，

即 PF=－1－n，

∴点 P 的坐标为（n，－1－n），

∵点 P 在抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 上，

∴$-n^2-2n+3=-1-n$，

整理得，$n^2+n-4=0$，

解得 $n_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$（舍去），$n_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$，

$-1-n=-1-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，

所以，点 P 的坐标为（$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$，$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$）；

（ii）如图 2，点 N 在对称轴上时，设抛物线对称轴与 x 轴交于点 Q，

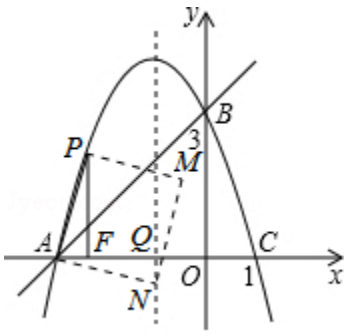


图2

∵∠PAF+∠FPA=90°，∠PAF+∠QAN=90°，∴∠FPA=∠QAN，

又∵∠PFA=∠AQN=90°，PA=AN，∴△APF≌△NAQ，∴PF=AQ，

设点 P 坐标为 P（x，$-x^2-2x+3$），

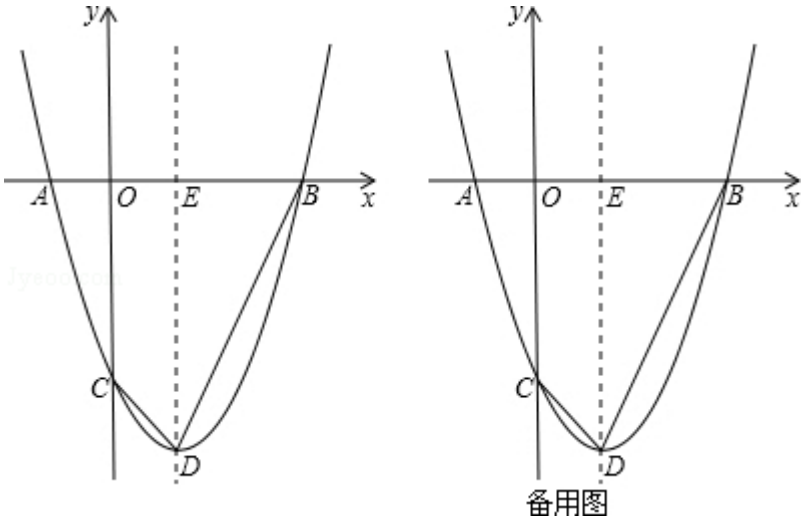
则有$-x^2-2x+3=-1-(-3)=2$，

解得 $x=\sqrt{2}-1$（不合题意，舍去）或 $x=-\sqrt{2}-1$，

此时点 P 坐标为（$-\sqrt{2}-1$，2）．

综上所述，当顶点 M 恰好落在抛物线对称轴上时，点 P 坐标为（$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$，$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$），当顶点 N 恰好落在抛物线对称轴上时，点 P 的坐标为（$-\sqrt{2}-1$，2）．

12、（2013•绍兴压轴题）抛物线 y=（x－3）（x+1）与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C，点 D 为顶点．



备用图

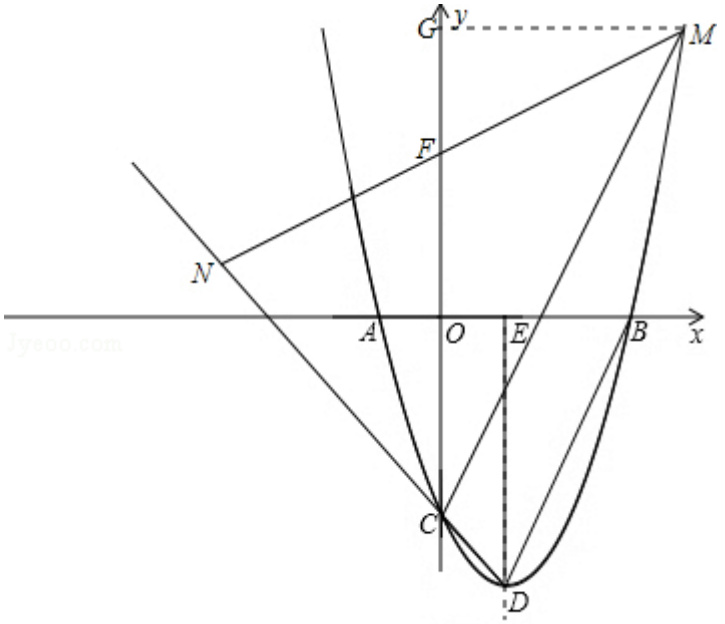
（1）求点 B 及点 D 的坐标．

（2）连结 BD，CD，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 E.

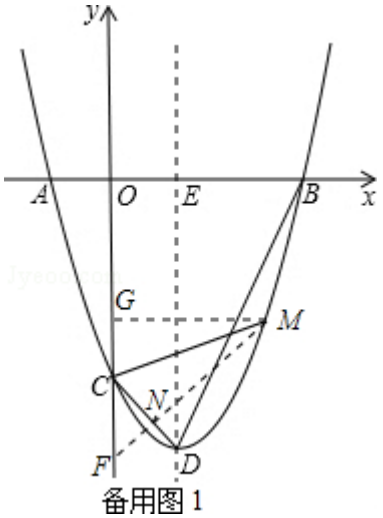
①若线段 BD 上一点 P，使∠DCP=∠BDE，求点 P 的坐标．
②若抛物线上一点 M，作 MN⊥CD，交直线 CD 于点 N，使∠CMN=∠BDE，求点 M 的坐标．

解：（1）∵抛物线 y=（x－ 3）（x+1）与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），
∴当 y=0 时，（x－ 3）（x+1）=0，
解得 x=3 或－ 1，
∴点 B 的坐标为（3，0）．
∵y=（x－ 3）（x+1）=x^2－ 2x－ 3=（x－ 1）^{2}－ 4，
∴顶点 D 的坐标为（1，－ 4）；
（2）①如右图．
∵抛物线 y=（x－ 3）（x+1）=x^2－ 2x－ 3 与与 y 轴交于点 C，
∴C 点坐标为（0，－ 3）．
∵对称轴为直线 x=1，
∴点 E 的坐标为（1，0）．
连接 BC，过点 C 作 CH⊥DE 于 H，则 H 点坐标为（1，－ 3），
∴CH=DH=1，
∴∠CDH=∠BCO=∠BCH=45°，
∴CD=$\sqrt{2}$，CB=3$\sqrt{2}$，△BCD 为直角三角形．
分别延长 PC、DC，与 x 轴相交于点 Q，R．
∵∠BDE=∠DCP=∠QCR，
∠CDB=∠CDE+∠BDE=45°+∠DCP，
∠QCO=∠RCO+∠QCR=45°+∠DCP，
∴∠CDB=∠QCO，
∴△BCD∽△QOC，
∴$\frac{OC}{OQ}=\frac{CD}{CB}=\frac{1}{3}$，
∴OQ=3OC=9，即 Q（－ 9，0）．
∴直线 CQ 的解析式为 y=－ $\frac{1}{3}$x－ 3，
直线 BD 的解析式为 y=2x－ 6．
由方程组$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-3 \\ y=2x-6 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\frac{9}{7} \\ y=-\frac{24}{7} \end{cases}$．
∴点 P 的坐标为（$\frac{9}{7}$，－ $\frac{24}{7}$）；
②（Ⅰ）当点 M 在对称轴右侧时．
若点 N 在射线 CD 上，如备用图 1，延长 MN 交 y 轴于点 F，过点 M 作 MG⊥y 轴于点 G．
∵∠CMN=∠BDE，∠CNM=∠BED=90°，
∴△MCN∽△DBE，
∴$\frac{CN}{MN}=\frac{BE}{DE}=\frac{1}{2}$，
∴MN=2CN．
设 CN=a，则 MN=2a．

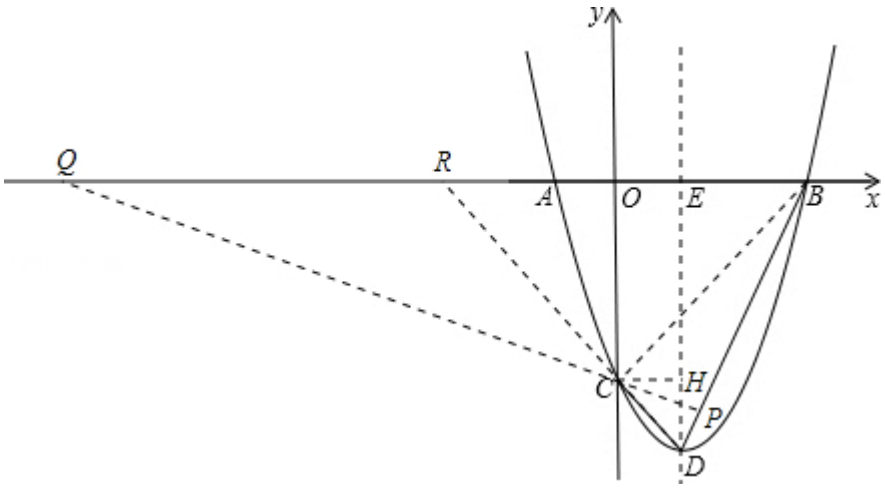
∵∠CDE=∠DCF=45°，
∴△CNF，△MGF 均为等腰直角三角形，
∴NF=CN=a，CF=$\sqrt{2}$a，
∴MF=MN+NF=3a，
∴MG=FG=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$a，
∴CG=FG－FC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$a，
∴M（$\frac{3\sqrt{2}}{2}$a，－3+$\frac{\sqrt{2}}{2}$a）．
代入抛物线 y=（x－3）（x+1），解得 a=$\frac{7\sqrt{2}}{9}$，
∴M（$\frac{7}{3}$，－$\frac{20}{9}$）；
若点 N 在射线 DC 上，如备用图 2，MN 交 y 轴于点 F，过点 M 作 MG⊥y 轴于点 G．
∵∠CMN=∠BDE，∠CNM=∠BED=90°，
∴△MCN∽△DBE，
∴$\frac{CN}{MN}=\frac{BE}{DE}=\frac{1}{2}$，
∴MN=2CN．
设 CN=a，则 MN=2a．
∵∠CDE=45°，
∴△CNF，△MGF 均为等腰直角三角形，
∴NF=CN=a，CF=$\sqrt{2}$a，
∴MF=MN－NF=a，
∴MG=FG=$\frac{\sqrt{2}}{2}$a，
∴CG=FG+FC=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$a，
∴M（$\frac{\sqrt{2}}{2}$a，－3+$\frac{3\sqrt{2}}{2}$a）．
代入抛物线 y=（x－3）（x+1），解得 a=5$\sqrt{2}$，
∴M（5，12）；
（Ⅱ）当点 M 在对称轴左侧时．
∵∠CMN=∠BDE＜45°，
∴∠MCN＞45°，
而抛物线左侧任意一点 K，都有∠KCN＜45°，
∴点 M 不存在．
综上可知，点 M 坐标为（$\frac{7}{3}$，－$\frac{20}{9}$）或（5，12）．



备用图2



备用图1



13、（2013•嘉兴压轴题）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=(x-m)^2-m^2+m$ 的顶点为 A，与 y 轴的交点为 B，连结 AB，AC⊥AB，交 y 轴于点 C，延长 CA 到点 D，使 AD=AC，连结 BD．作 AE∥x 轴，DE∥y 轴．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/717112051105006110