

专题 39 最值模型之几何转化法求最值模型

(全等、相似、中位线、对角线性质等)

几何中最值问题是中考的常见题型, 变幻无穷, 试题设计新颖, 形式活泼, 涵盖知识面广, 综合性强。在各地中考数学试卷中, 几何最值问题也是重难点内容, 在中考数学试卷中通常出现在压轴题的位置。

本专题我们所讲的几何**转化法**求几何最值是对前面八类几何最值模型的一个补充。虽然我们前面讲的几何最值模型涵盖了大部分的最值问题, 但也有部分几何最值无法很好的解决。鉴于此我们补充几类几何转化法(主要利用全等、相似、或其他的几何性质(如: 中位线、对角线、特殊的边角关系等)转化), 希望对大家有所帮助!

目录导航

.....	1
模型 1.几何转化模型-全等转化法.....	1
模型 2.几何转化模型-相似转化法.....	6
模型 3.几何转化模型-中位线转化法.....	9
模型 4.几何转化模型-对角线转化法.....	11
模型 5.几何转化模型-其他性质转化法.....	14

习题练模型

.....	17
-------	----

模型 1.几何转化模型-全等转化法

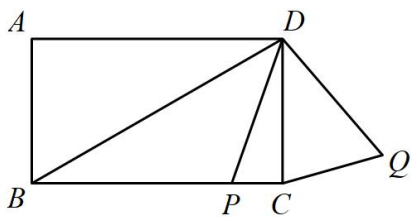
模型解读

条件: $OA=OB$, $OA'=OB'$, $\angle AOB=\angle A'OB'$; **结论:** $\triangle OAA'\cong\triangle OBB'$, $AA'=BB'$ 。

该类转化法求最值的模型, 三角形 OAB 和 $OA'B'$ 在图形中很难同时出现, 需要我们通过辅助线构造出手拉手型的全等模型, 从而将所求线段进行转化。

模型运用

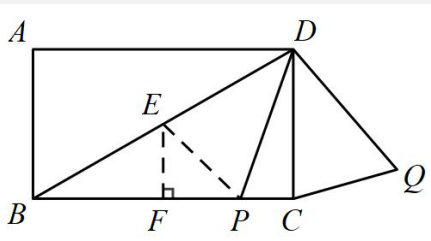
例 1. (23-24 八年级下·江苏连云港·阶段练习) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle DBC=30^\circ$, $AB=2\sqrt{3}$, P 是 BC 边上一动点, 连接 DP , 把线段 DP 绕点 D 逆时针旋转 60° 到线段 DQ , 连接 CQ , 则线段 CQ 的最小值为_____。



【答案】 $\sqrt{3}$

【分析】在 BD 上截取 $DE = DC$ ，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F ，通过证明 $\triangle DEP \cong \triangle DCQ$ (ASA) 可得 $CQ = PE$ ，根据垂线段最短可得当点 P 和点 F 重合时， $PE \perp BC$ ，此时 PE 取最小值时，即可求解。

【详解】解：在 BD 上截取 $DE = DC$ ，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F ， $\because \angle DBC = 30^\circ$ ， $\therefore \angle EDC = 60^\circ$ ，



$\therefore$ 线段 DP 绕点 D 逆时针旋转 60° 到线段 DQ ， $\therefore \angle PCQ = 60^\circ$ ， $DP = DQ$ ，

$\therefore \angle PCQ - \angle PDC = \angle EDC - \angle PDC$ ，即 $\angle CDQ = \angle EDP$ ，

在 $\triangle DEP$ 和 $\triangle DCQ$ 中，
$$\begin{cases} DE = DC \\ \angle CDQ = \angle EDP \\ DP = DQ \end{cases}$$
 $\therefore \triangle DEP \cong \triangle DCQ$ (ASA)， $\therefore CQ = PE$ ，

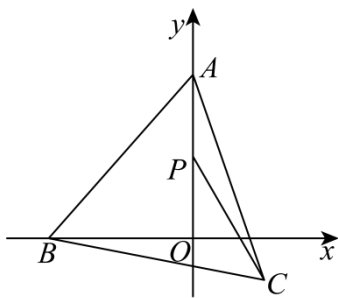
当 PE 取最小值时， CQ 也取得最小值，当点 P 和点 F 重合时， $PE \perp BC$ ，此时 PE 取最小值时，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $\angle DBC = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore BD = 2AB = 4\sqrt{3}$ ， $DC = DE = AB = 2\sqrt{3}$ ， $\angle DBC = 30^\circ$ ，

$\therefore BE = BD - DE = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore EF = \frac{1}{2}BE = \sqrt{3}$ ， $\therefore CQ$ 的最小值为 $\sqrt{3}$ 。故答案为： $\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题主要考查了矩形的性质，三角形全等的判定和性质，含 30° 角的直角三角形， 30° 角所对的边是斜边的一半，解题的关键是正确画出辅助线，构造直角三角形。

例 2. (23-24 八年级上·江苏南通·阶段练习) 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(0, 8)$ ，点 B 为 x 轴上一动点，以 AB 为边在直线 AB 的右侧作等边三角形 ABC 。若点 P 为 OA 的中点，连接 PC ，则 PC 的长的最小值为_____。

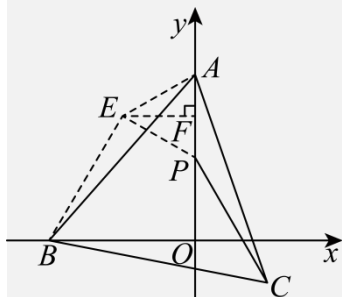


【答案】6

【分析】本题考查了轴对称—最短路线问题，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键。

以 AP 为边作等边三角形 APE ，连接 BE ，过点 E 作 $EF \perp AP$ 于 F ，由“SAS”可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACP$ ，可得 $BE = PC$ ，则当 BE 有最小值时， PC 有最小值，即可求解。

【详解】解：如图，以 AP 为边作等边三角形 APE ，连接 BE ，过点 E 作 $EF \perp AP$ 于 F ，



$\because$ 点 A 的坐标为 $(0,8)$ ， $\therefore OA=8$ ， $\because$ 点 P 为 OA 的中点， $\therefore AP=4$ ，

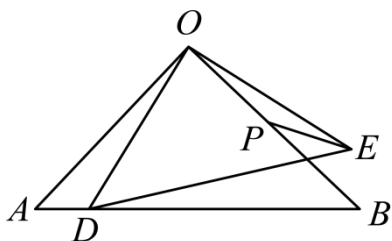
$\because \triangle AEP$ 是等边三角形， $EF \perp AP$ ， $\therefore AF=PF=2$ ， $AE=AP$ ， $\angle EAP=\angle BAC=60^\circ$ ， $\therefore \angle BAE=\angle CAP$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACP$ 中，
$$\begin{cases} AE=AP \\ \angle BAE=\angle CAP, \therefore \triangle ABE \cong \triangle ACP (\text{SAS}), \therefore BE=PC, \\ AB=AC \end{cases}$$

$\therefore$ 当 BE 有最小值时， PC 有最小值，即 $BE \perp x$ 轴时， BE 有最小值，

$\therefore BE$ 的最小值为 $OF=OP+PF=4+2=6$ ， $\therefore PC$ 的最小值为 6，故答案为：6。

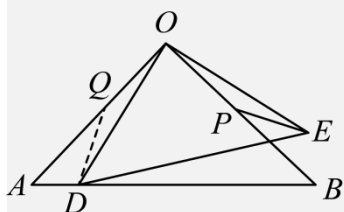
例 3. (2024·四川内江·二模) 如图，在 $\triangle OAB$ 中， $\angle AOB=90^\circ$ ， $BO=AO=2\sqrt{2}$ ， P 是 OB 的中点，若点 D 在直线 AB 上运动，连接 OD ，以 OD 为腰，向 OD 的右侧作等腰直角三角形 ODE ，连接 PE ，则在点 D 的运动过程中，线段 PE 的最小值为_____。



【答案】1

【分析】取 AO 的中点 Q ，连接 DQ ，先证得 $\triangle OQD \cong \triangle OPE$ ，得出 $QD = PE$ ，根据点到直线的距离可知当 $QD \perp AB$ 时， QD 最小，然后根据等腰直角三角形的性质求得 $QD \perp AB$ 时 QD 的值，即可求得线段 PE 的最小值。

【详解】解：如图，取 AO 的中点 Q ，连接 DQ ，



$\because \triangle DOE$ 为等腰直角三角形， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle AOB = \angle DOE = 90^\circ$ ， $DO = DE$ ， $\therefore \angle AOD = \angle BOE$ ，

$\because BO = AO = 2\sqrt{2}$ ， P 为 BO 中点， Q 是 AO 的中点， $\therefore AQ = OQ = BP = OP = \sqrt{2}$ ，

在 $\triangle ODQ$ 和 $\triangle OPE$ 中，
$$\begin{cases} OQ = OP \\ \angle QOD = \angle POE \\ OD = OE \end{cases} \therefore \triangle OQD \cong \triangle OPE$$
， $\therefore QD = PE$ ，

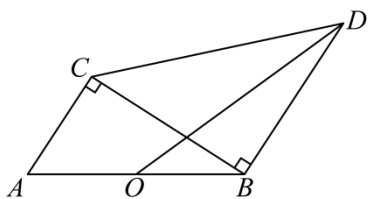
$\because$ 点 D 在直线 AB 上运动， $\therefore$ 当 $QD \perp AB$ 时， QD 最小， $\because \angle AOB = 90^\circ$ ， $BO = AO = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore \angle A = 45^\circ$ ，

$\because QD \perp AB$ ， $\therefore \triangle QAD$ 是等腰直角三角形， $\therefore AQ = \sqrt{2}$ ， $\therefore AD = DQ = 1$ ，

$\therefore$ 线段 PE 的最小值是为 1。故答案为：1。

【点睛】本题考查了等腰直角三角形的判定与性质，勾股定理的应用，全等三角形的判定与性质以及垂线段最短问题，通过分析条件添加辅助线构造全等三角形是解题的关键。

例 4. (2024·陕西西安·模拟预测) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ，点 O 是 AB 的中点，以 BC 为直角边向作等腰 $Rt\triangle BCD$ ，连接 OD ，当 OD 取得最大值时， $\triangle OBD$ 的面积为_____。



【答案】 $2+\sqrt{2}$

【详解】解：过点 B 作 $BE \perp AB$ ，使 $BE = BO$ ，连接 OC ， OE ， CE ，如图1所示：

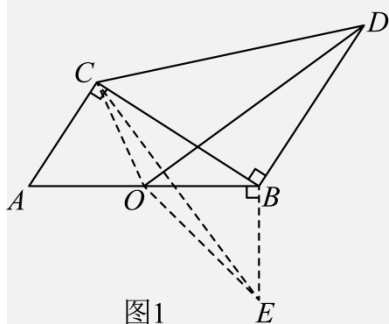


图1

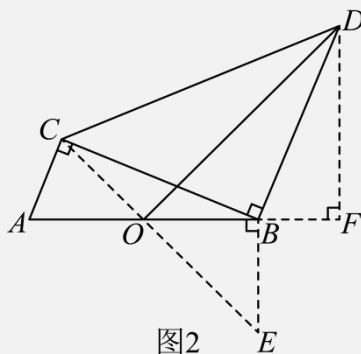


图2

则 $\angle EBO = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle OBE$ 为等腰直角三角形， $\because AB = 4$ ，点 O 为 AB 的中点， $\therefore BE = BO = \frac{1}{2} AB = 2$ ，

由勾股定理得： $OE = \sqrt{BE^2 + BO^2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ，点 O 是 AB 的中点， $\therefore CO = BO = AO = \frac{1}{2} AB = 2$ ，

$\because$ 等腰 $\text{Rt}\triangle BCD$ 是以 BC 直角边的等腰三角形， $\therefore BC = BD$ ， $\angle CBD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EBC = \angle EBO + \angle ABC = 90^\circ + \angle ABC$ ， $\angle OBD = \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ + \angle ABC$ ， $\therefore \angle EBC = \angle OBD$ ，

在 $\triangle EBC$ 和 $\triangle OBD$ 中，
$$\begin{cases} BE = BO \\ \angle EBC = \angle OBD \\ BC = BD \end{cases} \therefore \triangle EBC \cong \triangle OBD (SAS), \therefore EC = OD,$$

根据“两点之间线段最短”得： $EC \leq OC + OE$ ，即 $EC \leq 2 + 2\sqrt{2}$ ， $\therefore OD \leq 2 + 2\sqrt{2}$ ， $\therefore OD$ 的最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$ ，

此时点 E ， O ， C 在同一条直线上，过点 D 作 $DF \perp AB$ 交 AB 的延长线于 F ，如图2所示：

$\because \triangle OBE$ 为等腰直角三角形， $\therefore \angle BOE = 45^\circ$ ， $\because CO = BO = 2$ ， $\therefore \angle OBC = \angle OCB$ ，

又 $\because \angle BOE = \angle OBC + \angle OCB = 45^\circ$ ， $\therefore \angle OBC = \angle OCB = 22.5^\circ$ ， $\therefore \angle OBD = 90^\circ + \angle OCB = 112.5^\circ$ ，

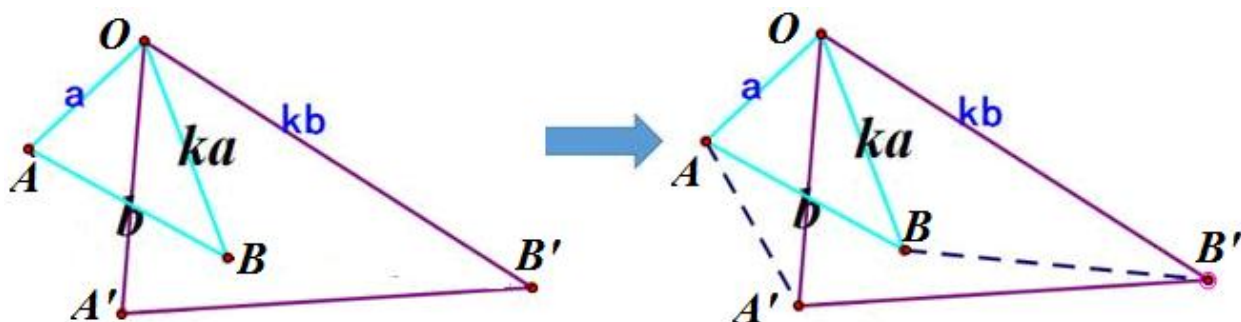
$\because \triangle EBC \cong \triangle OBD$ ， $\therefore \angle OCB = \angle ODB = 22.5^\circ$ ， $\therefore \angle DOB = 180^\circ - \angle OBD - \angle ODB = 180^\circ - 112.5^\circ - 22.5^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ODF$ 为等腰直角三角形， $\therefore DF = OF$ ，由勾股定理得： $OF^2 + DF^2 = OD^2$ ，

即 $2DF^2 = (2 + 2\sqrt{2})^2$ ， $\therefore DF = 2 + \sqrt{2}$ ， $\therefore S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} OB \cdot DF = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$ 。

模型 2.几何转化模型-相似转化法

模型解读

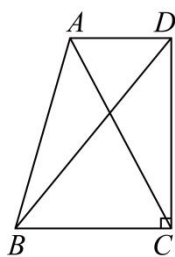


条件: $OB=kOA$, $B'O=kOA'$, $\angle AOB=\angle A'OB'$; 结论: $\triangle OAA'\sim\triangle OBB'$, $BB'=k\cdot AA'$ 。

该类转化法求最值的模型, 三角形 OAB 和 $OA'B'$ 在图形中很难同时出现, 需要通过辅助线构造出手拉型的相似模型, 从而将所求线段进行转化。

模型运用

例 1. (23-24 九年级上·江苏宿迁·阶段练习) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC\perp DC$, $\frac{BC}{CD}=\frac{3}{4}$, $AD=1$, $AB=2$, 则对角线 AC 的最小值为_____。



【答案】1

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质、三角形三边的关系等知识, 准确构造出相似三角形对线段进行转化是解题的关键。

【详解】解: 如图, 过点 A 作 $AE\perp AD$, 且 $\frac{DE}{AD}=\frac{5}{4}$

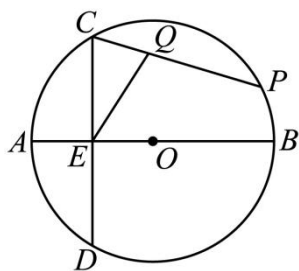
$$\because AD=1 \therefore AE=\frac{3}{4} \therefore \frac{BC}{CD}=\frac{3}{4} \text{ 设 } BC=3k, CD=4k \text{ 则 } BD=5k \therefore \frac{DE}{AD}=\frac{BD}{CD}=\frac{5}{4}$$

$$\because \angle ADC=\angle EDB \therefore \triangle EDB\sim\triangle ADC \therefore \frac{EB}{AC}=\frac{BD}{CD}=\frac{5}{4} \therefore AC=\frac{4}{5}EB \therefore \text{当 } EB \text{ 最小时, } AC \text{ 最小}$$

$$\because EB\geq AB-AE \therefore EB \text{ 最小为 } 2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4} \therefore AC \text{ 最小为 } \frac{4}{5}\times\frac{5}{4}=1 \text{ 故答案为: } 1.$$

例 2. (2024 上·浙江宁波·九年级校联考期中) 如图, $\odot O$ 的直径 AB 长为 16, 点 E 是半径 OA 的中点, 过

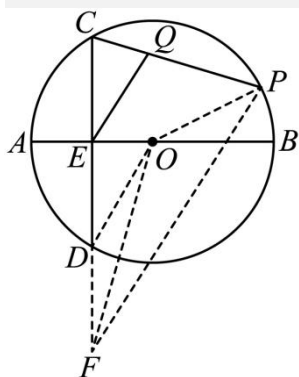
点 E 作 $CD \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 C, D . 点 P 在 $\widehat{CBD}$ 上运动, 点 Q 在线段 CP 上, 且 $PQ = 2CQ$. 则 EQ 的最大值是_____.



【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{13} + \frac{8}{3}$

【分析】延长 CD 到 F , 使得 $DF = DE$, 连接 OF, PF, OP, OD . 首先证明 $EQ = \frac{1}{3}PF$, 解直角三角形求出 OF , 求出 PF 的最大值即可解决问题.

【详解】解: 延长 CD 到 F , 使得 $DF = DE$, 连接 OF, PF, OP, OD .



$\because AB \perp CD \therefore CE = DE \because DE = DF \therefore EF = 2CE \because PQ = 2CQ$

$\therefore \frac{CE}{EF} = \frac{CQ}{QP} = \frac{1}{2}$ 则 $\frac{CE}{CF} = \frac{CQ}{CP} = \frac{1}{3} \because \angle ECQ = \angle FCP \therefore \triangle ECQ \sim \triangle FCP$ 则 $\frac{EQ}{PF} = \frac{CE}{CF} = \frac{1}{3}$

又 $\because AE = OE = 4, OD = 8, \angle OED = 90^\circ \therefore DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

在 $Rt\triangle OED$ 中 $EF = 2DE = 8\sqrt{3}, OE = 4 \therefore OF = \sqrt{OE^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + (8\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{13}$

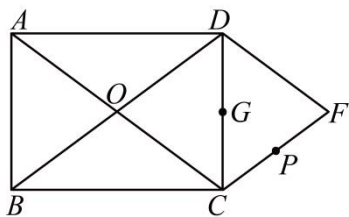
$\because PF \leq OP + OF \therefore PF \leq 8 + 4\sqrt{13}$ 则 PF 的最大值为 $8 + 4\sqrt{13}$

$\therefore EQ$ 的最大值为 $\frac{4}{3}\sqrt{13} + \frac{8}{3}$ 故答案为 $\frac{4}{3}\sqrt{13} + \frac{8}{3}$

【点睛】本题考查垂径定理, 解直角三角形, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会用转化的思想思考问题.

例 3. (23-24 八年级下·云南曲靖·期中) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 4, AC$ 与 BD 交于点 O , 分别过点 C, D 作 BD, AC 的平行线相交于点 F , 点 G 是 CD 的中点, 点 P 是四边形 $OCFD$ 边上的动点,

则 PG 的最小值是 ()



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{6}{5}$

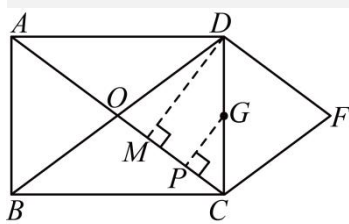
【答案】D

【分析】先判定四边形 $OCFD$ 为菱形，找出当 GP 垂直于菱形 $OCFD$ 的一边时， PG 有最小值。过 D 点作 $DM \perp AC$ 于 M ，过 G 点作 $GP \perp AC$ 与 P ，则 $GP \parallel DM$ ，利用平行四边形的面积求解 DM 的长，再利用相似三角形的判定和性质可求解 PG 的长，进而可求解。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AC = BD$ ，∴ $OD = OC$ 。

∵ $DF \parallel OC$ ， $OD \parallel CF$ ，∴ 四边形 $OCFD$ 为菱形。∵ 点 G 是 CD 的中点，点 P 是四边形 $OCFD$ 边上的动点，
∴ 当 GP 垂直于菱形 $OCFD$ 的一边时， PG 有最小值。

如图，过 D 点作 $DM \perp AC$ 于 M ，过 G 点作 $GP \perp AC$ 与 P ，则 $GP \parallel DM$ ，



∵ $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，∴ $CD = AB = 3$ ， $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。

∵ $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DM = \frac{1}{2} AD \cdot CD$ ，∴ $AC \cdot DM = AD \cdot CD$ ，即 $5DM = 4 \times 3$ ，解得 $DM = \frac{12}{5}$ 。

∵ $GP \parallel DM$ ， G 为 CD 的中点，∴ $\triangle CPG \sim \triangle CMD$ ，

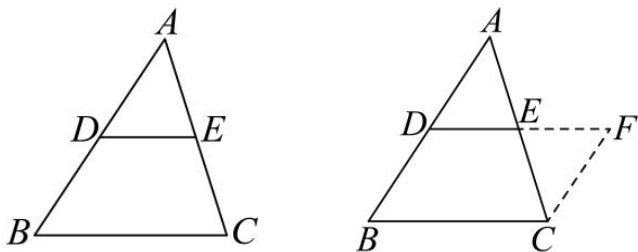
∴ $\frac{PG}{DM} = \frac{CG}{CD}$ ，∴ $\frac{PG}{\frac{12}{5}} = \frac{1}{2}$ ，∴ $PG = \frac{6}{5}$ ，故 PG 的最小值为 $\frac{6}{5}$ 。故选：D。

【点睛】本题主要考查矩形的性质，菱形的判定与性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识。正确确定当 GP 垂直于菱形 $OCFD$ 的一边时， PG 有最小值和正确作出辅助线是解题关键。

模型 3.几何转化模型-中位线转化法

模型解读

三角形的中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半。



条件：如图，在三角形 ABC 的 AB ， AC 边的中点分别为 D 、 E ，

结论：（1） $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$ ，（2） $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

证明：如图 1，过点 C 作 $CF \parallel AB$ 交 DE 延长于点 F ， $\therefore \angle A = \angle ECF$ ， $\angle F = \angle ADE$ ，

$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $\therefore AD = BD$ ， $AE = CE$ ， $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE$ (AAS)， $\therefore DE = FE$ ， $CF = AD$ ，

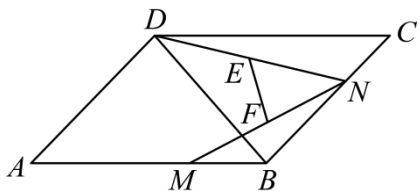
$\therefore CF = BD$ ， $DE = \frac{1}{2}DF$ ，又 $\because CF \parallel BD$ ， $\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形，

$\therefore BC = DF$ ， $BC \parallel DF$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ ；

$\because DE \parallel BC$ ， $\therefore \angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ ， $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

模型运用

例 1.（2024·山东德州·二模）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 6$ ， $BD = 8$ ， $AD \perp DB$ ，点 M 、 N 分别是边 AB 、 BC 上的动点（不与 A 、 B 、 C 重合），点 E 、 F 分别为 DN 、 MN 的中点，连接 EF ，则 EF 的最小值为（ ）



A. 2.4

B. 3

C. 4

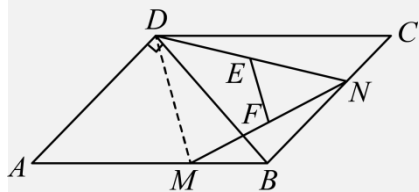
D. 4.8

【答案】A

【分析】 本题考查了三角形中位线定理，勾股定理，利用三角形中位线定理得出 $EF = \frac{1}{2}DM$ ，则当 $DM \perp AB$

时， DM 最小，则 EF 最小，利用勾股定理求出 AB ，然后利用等面积法求出 DM 的最小值，即可求解。

【详解】解：连接 DM ，



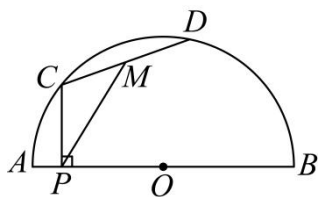
$\because$ 点 E 、 F 分别为 DN 、 MN 的中点， $\therefore EF = \frac{1}{2}DM$ ，当 $DM \perp AB$ 时， DM 最小，则 EF 最小，

$\because AD = 6, BD = 8, AD \perp DB$ ， $\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 10$ ，

设 $\triangle ABD$ 中 AB 边上高为 h ，则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{1}{2}AB \cdot h$ ， $\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 10h$ ，

$\therefore h = 4.8$ ， $\therefore DM$ 最小值为 4.8 ，则 EF 最小值为 $\frac{1}{2} \times 4.8 = 2.4$ ，故选：A.

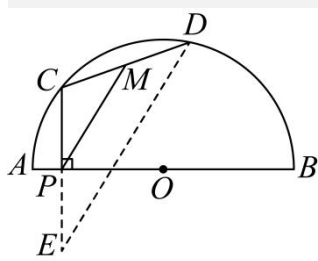
例 2. (2024·广东肇庆·一模) 如图，点 C 在以 AB 为直径的半圆上， D 是半圆上不与点 C 重合的动点. 连接 CD ， M 是 CD 的中点，过点 C 作 $CP \perp AB$ 于点 P . 若 $AB = 9$ ，则 PM 的最大值是_____.



【答案】 $\frac{9}{2}$

【分析】本题考查了圆的性质、三角形中位线定理，延长 CP 至 E ，使 $CP = PE$ ，连接 DE ，结合题意得出即点 E 在圆上，由三角形中位线定理得出 $PM = \frac{1}{2}DE$ ，则当 DE 经过原点 O 时， DE 有最大值为 9 ，此时 PM 有最大值，即可得解。

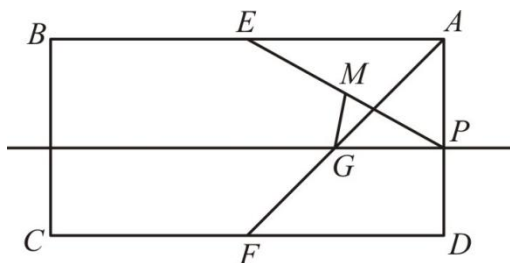
【详解】解：如图，延长 CP 至 E ，使 $CP = PE$ ，连接 DE ，



$\because CP \perp AB$ ， $\therefore$ 点 C 、 E 关于直线 AB 对称，即点 E 在圆上， $\because M$ 是 CD 的中点， $\therefore PM = \frac{1}{2}DE$ ，

$\therefore$ 当 DE 经过原点 O 时， DE 有最大值为 9 ，此时 PM 有最大值，为 $\frac{1}{2}DE = \frac{9}{2}$ ，故答案为： $\frac{9}{2}$ 。

例3. (2023·四川成都·一模) 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB=2AD=8$, 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点, 点 P 为 AD 边上动点, 过点 P 作与 AB 平行的直线交 AF 于点 G , 连接 PE , 点 M 是 PE 中点, 连接 MG , 则 MG 的最小值=_____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【分析】连接 AC 交 PG 与点 N , 连接 EN , 证明 $MG=\frac{1}{2}EN$, 求 EN 最小值即可.

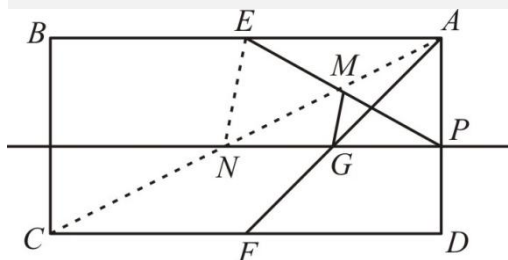
【详解】解: $\because AB=2AD=8$, 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点,

$\therefore CF=FD$, $AE=4$, $AC=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$, $\therefore \sin \angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 连接 AC 交 PG 与点 N , 连接 EN ,

$\because PG \parallel CD$, $\therefore \triangle ANG \sim \triangle ACF$, $\triangle APG \sim \triangle ADF$; $\therefore \frac{NG}{CF}=\frac{AG}{AF}=\frac{PG}{DF}$,

$\because CF=FD$, $\therefore NG=PG$, $\because$ 点 M 是 PE 中点, $\therefore MG=\frac{1}{2}EN$,

当 $EN \perp AC$ 时, EN 最小, MG 也最小; $\sin \angle BAC=\frac{EN}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $EN=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $MG=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 故答案为: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



【点睛】本题考查了相似三角形的性质和解直角三角形, 解题关键是恰当作辅助线, 得出 $MG=\frac{1}{2}EN$, 求 EN 最小值.

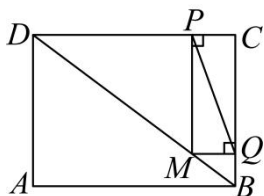
模型4.几何转化模型-(特殊)平行四边形对角线转化法

模型解读

该模型主要运用(特殊)平行四边形对角线的性质(如: 平行四边形对角线互相平分、矩形的对角线相等)来将不易求得的某些线段转化为能易求的线段进行求解.

模型运用

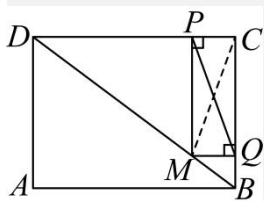
例 1. (24-25 九年级上·广东河源·阶段练习) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=6$, $AB=8$, M 为线段 BD 上一动点, $MP \perp CD$ 于点 P , $MQ \perp BC$ 于点 Q , 则 PQ 的最小值为_____.



【答案】 4.8 / $4\frac{4}{5}$ / $\frac{24}{5}$

【分析】本题主要考查了矩形的判定与性质、勾股定理、垂线段最短以及三角形面积等知识, 掌握矩形的判定与性质是解题的关键. 连接 MC , 首先根据勾股定理求得 BD 的值, 证明四边形 $MPCQ$ 是矩形, 可得 $PQ=CM$, 当时 $CM \perp BD$, CM 最小, 则 PQ 最小, 然后由面积法求出 CM 的长, 即可获得答案.

【详解】解: 如图, 连接 MC ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AD=6$, $AB=8$, $\therefore \angle BCD=90^\circ$, $BC=AD=6$, $AB=CD=8$,

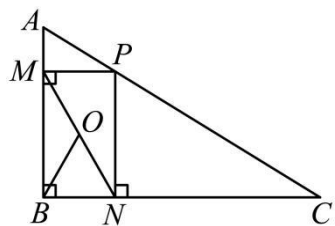
$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ $\because MP \perp CD$, $MQ \perp BC$, $\therefore \angle MPC=\angle MQC=\angle PCQ=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $MPCQ$ 是矩形, $\therefore PQ=CM$, 当时 $CM \perp BD$, CM 最小, 则 PQ 最小,

此时 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC \cdot CD=\frac{1}{2}BD \cdot CM$, 即 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8=\frac{1}{2} \times 10CM$, 解得 $CM=4.8$,

$\therefore PQ$ 的最小值为 4.8 . 故答案为: 4.8 .

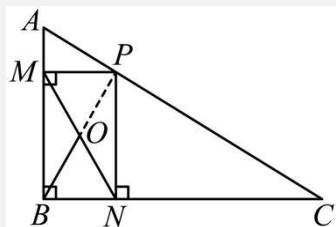
例 2. (23-24 九年级上·广东茂名·期末) 如图, P 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AC (不与点 A 、 C 重合) 上一动点, 分别作 $PM \perp AB$ 于点 M , $PN \perp BC$ 于点 N , O 是 MN 的中点, 若 $AB=5$, $BC=12$, 当点 P 在 AC 上运动时, BO 的最小值是_____.



【答案】 $\frac{30}{13}/2\frac{4}{13}$

【分析】 本题考查了矩形的判定与性质、垂线段最短、勾股定理等知识．连接 BP ，证四边形 $BMPN$ 是矩形，得 $BP = MN$ ．再根据当 $BP \perp AC$ 时， BP 最小，然后由面积法求出 BP 的最小值，即可解决问题．

【详解】 解：连接 BP ，如图，



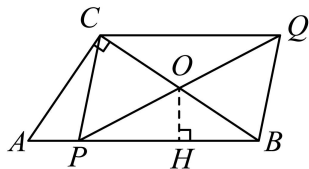
$$\because AB = 5, BC = 12, \therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13.$$

$\because \angle ABC = 90^\circ, PM \perp AB, PN \perp BC, \therefore$ 四边形 $BMPN$ 是矩形， $\therefore BP = MN$ ， BP 与 MN 互相平分．

$\because$ 点 O 是 MN 的中点， $\therefore$ 点 O 在 BP 上， $BO = \frac{1}{2}BP$ ． $\therefore$ 当 $BP \perp AC$ 时， BP 最小，

又 $\because$ 此时 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BP, \therefore 5 \times 12 = 13BP, \therefore BP = \frac{60}{13}, \therefore BO = \frac{1}{2}BP = \frac{30}{13}$ ．故答案为： $\frac{30}{13}$ ．

例 3．（2024·河南周口·一模）如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 6$ ，点 P 为 AB 上一个动点，以 PC, PB 为邻边构造平行四边形 $PBQC$ ，连接 PQ ，则 PQ 的最小值为（ ）



A. $\frac{6}{13}\sqrt{13}$

B. $\frac{10}{13}\sqrt{13}$

C. $\frac{12}{13}\sqrt{13}$

D. $\sqrt{13}$

【答案】 C

【分析】 本题主要考查了平行四边形的性质，勾股定理，解直角三角形，垂线段最短，设 BC, PQ 交于 O ，过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H ，由平行四边形的性质得到 $PQ = 2OP, OB = \frac{1}{2}BC = 3$ ，则由垂线段最短可知，当点 P 与点 H 重合时， OP 最小，最小值为 OH 的值，即此时 PQ 最小，最小值为 OH 的值的 2 倍，利用勾股定理求出 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{13}$ ，再解直角三角形得到 $\frac{OH}{OB} = \frac{AC}{AB}$ ，据此求解即可．

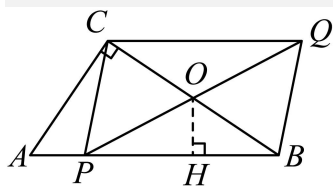
【详解】 解：如图所示，设 BC, PQ 交于 O ，过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H ，

$\because$ 四边形 $PBQC$ 是平行四边形， $\therefore PQ = 2OP, OB = \frac{1}{2}BC = 3, \therefore$ 当 OP 最小时， PQ 最小，

由垂线段最短可知，当点 P 与点 H 重合时， OP 最小，最小值为 OH 的值，即此时 PQ 最小，最小值为 OH 的值的 2 倍，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 6$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{13}, \therefore \sin \angle OBH = \sin \angle ABC = \frac{OH}{OB} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \frac{OH}{3} = \frac{4}{2\sqrt{13}}, \therefore OH = \frac{6\sqrt{13}}{13}, \therefore PQ \text{ 最小值为 } \frac{12}{13}\sqrt{13}, \text{ 故选: C.}$$



模型 5.几何转化模型-其他性质转化法

模型解读

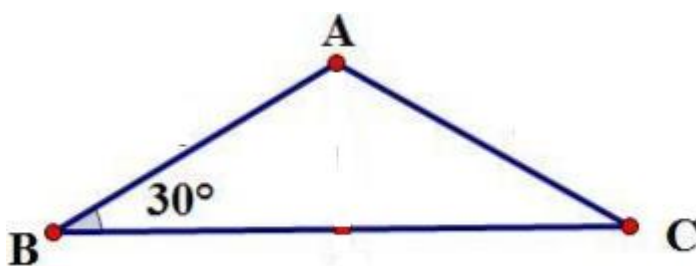


图 1

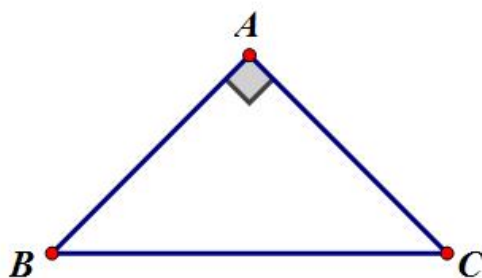


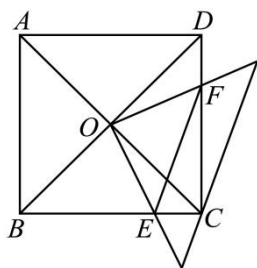
图 2

如图 1, 等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, $\angle BAC=120^\circ$, 则 $BC=\sqrt{3}AC$.

如图 2, 等腰直角三角形 ABC 中, $AB=AC$, $\angle BAC=90^\circ$, 则 $BC=\sqrt{2}AC$.

模型运用

例 1. (23-24 九年级上·广西柳州·期末) 如图, 正方形 $ABCD$, 边长 $AB=2$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 将直角三角板的直角顶点放在点 O 处, 三角板两边足够长, 与 BC 、 CD 交于 E 、 F 两点, 当三角板绕点 O 旋转时, 线段 EF 的最小值为 ()



A. 1

B. 2

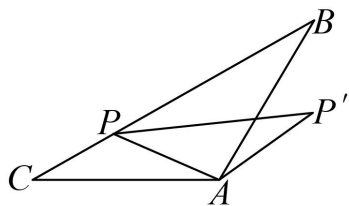
C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$ **【答案】C**

【分析】证明 $\triangle OEC \cong \triangle OFD$ ，得到 $EF = \sqrt{2}OE$ ，要使 EF 有最小值，即求 OE 的最小值，当 $OE \perp BC$ 时， OE 有最小值，由等腰三角形的性质可求出。

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ ，∴ $OC = OD$ ， $\angle ODC = \angle OCB = 45^\circ$ ， $OC \perp OD$ ，
 ∴ $\angle DOF = \angle COE$ ， $OC = OD$ ， $\angle ODC = \angle OCB = 45^\circ$ ，∴ $\triangle OEC \cong \triangle OFD$ (ASA)，
 ∴ $OE = OF$ ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，∴ $EF = \sqrt{2}OE$ ，故要使 EF 有最小值，即求 OE 的最小值，
 当 $OE \perp BC$ 时， OE 有最小值，∵ $OB = OC$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ， $OE \perp BC$ ，
 ∴ $OE = \frac{1}{2}BC = 1$ ，∴ 线段 EF 的最小值为 $\sqrt{2}$ 。故选：C。

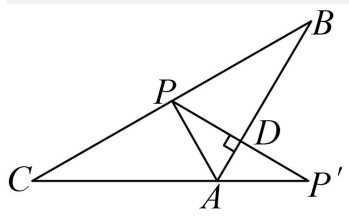
【点睛】本题主要考查了旋转的性质，正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，熟练掌握旋转的性质是解题的关键。

例 2. (23-24 九年级上·广东深圳·阶段练习) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， P 为 BC 边上一动点，连接 AP ，将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 120° 至 AP' ，则线段 PP' 的最小值为 ()

A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$ **【答案】B**

【分析】过点 A 作 $AD \perp PP'$ 于 D ，根据旋转的性质得到 $AP = AP'$ ， $\angle PAP' = 120^\circ$ ，进而得到当 PD 最短时， PP' 最短，当 $AP \perp BC$ 时， AP 最短，然后利用含 30° 角直角三角形的性质得到 $AP = \frac{1}{2}AC = 2$ ， $AD = \frac{1}{2}AP = 1$ ，最后利用勾股定理求解即可。

【详解】解：如图所示，过点 A 作 $AD \perp PP'$ 于 D ，



由旋转可得， $AP = AP'$ ， $\angle PAP' = 120^\circ$ ，∴ $PP' = 2PD$ ， $\angle APD = 30^\circ$ ，

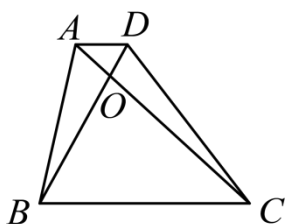
当 PD 最短时， PP' 最短，∵ P 为 BC 边上一动点，∴ 当 $AP \perp BC$ 时， AP 最短，

$\because AB = AC = 4$, $\angle BAC = 120^\circ$, $\therefore \angle C = 30^\circ$, $\therefore$ 当 $AP \perp BC$ 时, $AP = \frac{1}{2}AC = 2$,

$\therefore AD = \frac{1}{2}AP = 1 \therefore PD = \sqrt{AP^2 - AD^2} = \sqrt{3} \therefore PP' = 2PD = 2\sqrt{3}$. 故选: B.

【点睛】此题考查了旋转的性质, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理和勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

例 3. (2024·江苏无锡·三模) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel CB$, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 且 $\angle AOB = 120^\circ$. 若 $AC + BD = 4$, 则 $AD + BC$ 的最小值为 ()



A. 16

B. 4

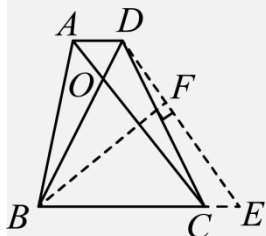
C. 9

D. 2

【答案】D

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质, 解直角三角形, 二次函数的性质等知识, 解决问题的关键是作辅助线将条件集中在同一个三角形中求解. 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的的延长线于 E , 作 $BF \perp DE$ 于 F , 设 $BD = a$, 表示出 DE , 解斜三角形 BCD , 进而求得结果.

【详解】解: 如图, 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的的延长线于 E , 作 $BF \perp DE$ 于 F ,



$\because DE \parallel AC$, $\therefore \angle BDF = \angle BOC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$, $\because AD \parallel CB$, $\therefore$ 四边形 $ADEC$ 是平行四边形,

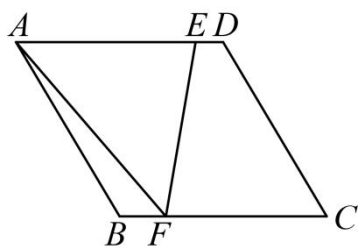
$\therefore AD = CE$, $DE = AC$, $\therefore AD + BC = CE + BC = BE$, 设 $BD = a$, 则 $DE = AC = 4 - a$,

在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, $BD = a$, $\angle BDF = 60^\circ$, $\therefore DF = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$, $BF = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore EF = DE - DF = 4 - a - \frac{1}{2}a = 4 - \frac{3}{2}a$, 在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, $BE^2 = BF^2 + EF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}a\right)^2 = 3(a - 2)^2 + 4$,

$\therefore$ 当 $a = 2$ 时, $BE_{\text{最小}}^2 = 4$, 即 $BE_{\text{最小}} = 2 \therefore (AD + BC)_{\text{最小}} = 2$. 故选: D.

例 4. (2024·陕西渭南·二模) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, 点 E 、 F 分别是 AD 、 BC 边上的两个动点, 连接 AF , EF , 若 FA 平分 $\angle BFE$, 则 DE 的最大值为_____ (结果保留根号)



【答案】 $2\sqrt{3}-3$

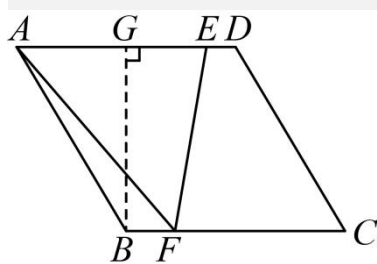
【分析】此题考查了菱形的性质，利用三角函数求边长，过点 B 作 $BG \perp AD$ 于点 G ，由菱形的性质易得 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，求出 $BG = AB \cdot \sin \angle BAD = 3$ 。根据菱形的性质及角平分线得到 $\angle DAF = \angle AFE$ ，推出 $AE = EF$ 。由 $AE + DE = AD = 2\sqrt{3}$ 可知，当 AE 最小时， DE 最大，从而得到 DE 的最大值。

【详解】过点 B 作 $BG \perp AD$ 于点 G ，由菱形的性质易得 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\angle AFB = \angle DAF$ 。

$\because AB = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore BG = AB \cdot \sin \angle BAD = 3$ 。 $\because FA$ 平分 $\angle BFE$ ，

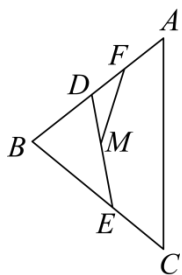
$\therefore \angle AFB = \angle AFE$ ，则 $\angle DAF = \angle AFE$ ， $\therefore AE = EF$ 。

$\because AE = EF$ ， $\therefore AE_{\text{最小}} = BG = 3$ ， $\therefore DE$ 的最大值为 $2\sqrt{3}-3$ 。



习题练模型

1. (23-24 九年级上·山西临汾·期中) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 10$ ， $AC = 12$ ，点 D, E 分别是 AB, BC 边上的动点，连结 DE ， F, M 分别是 AD, DE 的中点，则 FM 的最小值为 ()



A. 12

B. 10

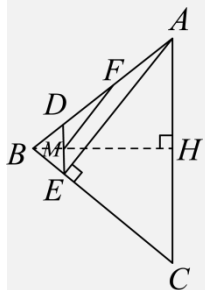
C. 9.6

D. 4.8

【答案】D

【分析】本题考查等腰三角形三线合一的性质，三角形的面积，三角形中位线定理，正确得出 AE 的值是解题的关键．过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H ，当 AE 取最小值时， FM 的值最小，由垂线段最短可知，当 $AE \perp BC$ 于点 E 时， AE 的值最小，利用等腰三角形三线合一的性质求出 BH 的长，进而利用三角形等面积法求解即可．

【详解】过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H ，



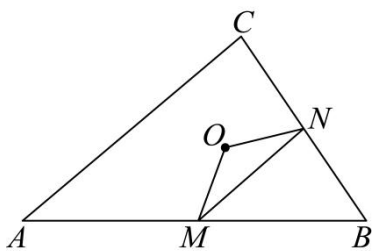
$\because F, M$ 分别是 AD, DE 的中点， $\therefore FM = \frac{1}{2}AE$ ，当 AE 取最小值时， FM 的值最小，

由垂线段最短可知，当 $AE \perp BC$ 于点 E 时， AE 的值最小，

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 10$ ， $AC = 12$ ， $\therefore CH = \frac{1}{2}AC = 6$ ， $\therefore BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 8$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE$ ， $\therefore AE = 9.6$ ， $\therefore FM = 4.8$ ，故选：D．

2. (2023·浙江杭州·二模) 如图，点 O 为 $\triangle ABC$ 的内心， $\angle B = 60^\circ$ ， $BM \neq BN$ ，点 M, N 分别为 AB, BC 上的点，且 $OM = ON$ ．甲、乙两人有如下判断：甲： $\angle MON = 120^\circ$ ；乙：当 $MN \perp BC$ 时， $\triangle MON$ 的周长有最小值．则下列说法正确的是 ()



- A. 只有甲正确 B. 只有乙正确 C. 甲、乙都正确 D. 甲、乙都错误

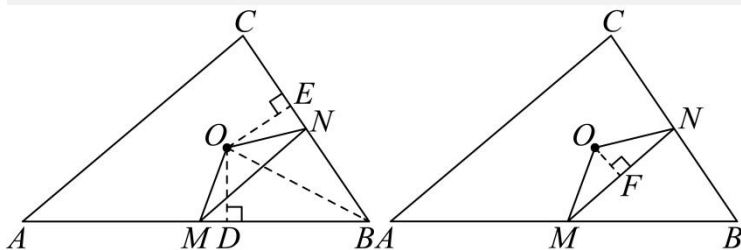
【答案】A

【分析】此题主要考查了三角形的内心，全等三角形的判定和性质，解答此题的关键正确的作出辅助线构造全等三角形，难点是在解答 $\triangle MON$ 的周长最小时，将三角形的各边都用 ON 表示，并根据垂线段最短来判断．连接 OB ，过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D ， $OE \perp BC$ 于 E ，依据“HL”判定 $\text{Rt}\triangle ODM$ 和 $\text{Rt}\triangle OEN$ 全等，从而得出 $\angle DOM = \angle EON$ ，然后再根据四边形的内角和等于 360° 即可对甲的说法进行判断；过点 O 作 $OF \perp MN$

于点 F ，则 $MN = 2NF$ ，根据 $\angle MON = 120^\circ$ 得 $\angle NOF = \angle MOF = 60^\circ$ ，进而得 $NF = \frac{\sqrt{3}}{2}ON$ ，据此得 $\triangle MON$

的周长为 $(2 + \sqrt{3})ON$ ，只有当 ON 最小时， $\triangle MON$ 的周长为最小，然后根据“垂线段最短”可对乙的说法进行判断。

【详解】解：连接 OB ，过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D ， $OE \perp BC$ 于 E ，



$\because$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的内心， $\therefore OB$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，又 $OD \perp AB$ ， $OE \perp BC$ ， $\therefore OD = OE$ ，

在 $Rt\triangle ODM$ 和 $Rt\triangle OEN$ 中， $\begin{cases} OM = ON \\ OD = OE \end{cases}$ ， $\therefore Rt\triangle ODM \cong Rt\triangle OEN (HL)$ ， $\therefore \angle DOM = \angle EON$ ，

在四边形 $ODBE$ 中， $\angle ODB = \angle OEB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle B + \angle DOE = 180^\circ$ ，

又 $\angle B = 60^\circ$ ， $\therefore \angle DOE = 120^\circ$ ，即： $\angle DON + \angle EON = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle DON + \angle DOM = 120^\circ$ ，即： $\angle MON = 120^\circ$ ，故甲的说法正确；

过点 O 作 $OF \perp MN$ 于点 F ， $\because OM = ON$ ， $OF \perp MN$

$\therefore OF$ 是 $\angle MON$ 的平分线， $MF = NF$ ， $\therefore MN = 2NF$ ，

又 $\because$ 甲的说法正确； $\therefore \angle MON = 120^\circ$ ， $\therefore \angle NOF = \angle MOF = 60^\circ$ ，

在 $Rt\triangle NOF$ 中， $\sin \angle NOF = \frac{NF}{ON}$ ， $\therefore NF = ON \cdot \sin \angle NOF = ON \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}ON$ ，

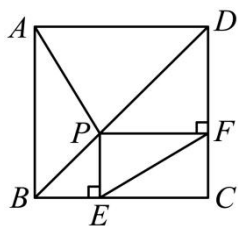
$\therefore MN = 2NF = \sqrt{3}ON$ ， $\therefore \triangle MON$ 的周长为： $OM + ON + MN = (2 + \sqrt{3})ON$ ，

$\therefore$ 当 ON 最小时， $\triangle MON$ 的周长为最小，根据“垂线段最短”可知：当 $ON \perp BC$ 时， $\triangle MON$ 的周长为最小，

$\because MN \perp BC$ ， $\therefore ON$ 与 BC 一定不垂直， $\therefore ON$ 不是最小，

$\therefore \triangle MON$ 的周长不是最小，故乙的说法不正确。故选：A。

3. (23-24 八年级下·广东江门·期中)如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 P 是对角线 BD 上一点， $PE \perp BC$ 于点 E ， $PF \perp CD$ 于点 F ，连接 AP ， EF 。给出下列结论：① $AP = EF$ 且 $AP \perp EF$ ；② $\angle PFE = \angle BAP$ ；③ $\triangle ADP$ 一定是等腰三角形；④四边形 $PECF$ 的周长为 $4\sqrt{2}$ ；⑤ EF 的最小值为 $2\sqrt{2}$ ；⑥ $PB^2 + PD^2 = 2PA^2$ 。其中结论正确的是（ ）



A. ①③④⑤

B. ②③④⑥

C. ①④⑤⑥

D. ①②⑤⑥

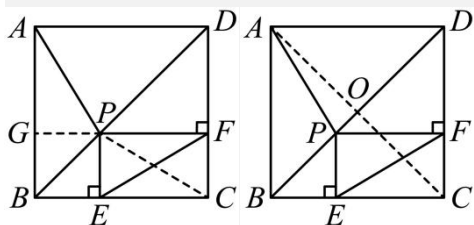
【答案】D

【详解】①连接 PC ，延长 FP 交 AB 于点 G ， $\because PE \perp BC$ ， $PF \perp CD$ ， $\therefore \angle PEC = \angle PFC = 90^\circ$ ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EPF = 90^\circ$ ， $\therefore$ 四边形 $PECF$ 是矩形， $\therefore PC = EF$ ，

由正方形的对称性知， $AP = PC$ ， $\therefore AP = EF$ ； $\because AB \parallel CD$ ， $\therefore PF \perp AB$ ，

$\therefore \triangle APG$ 和 $\triangle FEP$ 中， $PE \perp PG$ ， $PF \perp AG$ ， $\therefore AP \perp EF$ ； $\therefore$ 正确；



② $\because PC = EF$ ， $PE = EP$ ， $\therefore \text{Rt}\triangle PCE \cong \text{Rt}\triangle EFP$ (HL)， $\therefore \angle PFE = \angle ECP$ ，

$\because \angle BAP = \angle BCP$ ， $\therefore \angle BAP = \angle PFE$ ； $\therefore$ 正确；

③ $\because \angle ADP = 45^\circ$ ， $\therefore \angle DAP + \angle DPA = 135^\circ$ ， $\because \angle DAP < \angle DAB = 90^\circ$ ， $\angle DPA > \angle DBA = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 只有当 $\angle DAP = \angle DPA = 67.5^\circ$ 时，或 $\angle PAD = \angle PDA = 45^\circ$ 时， $\triangle ADP$ 才是等腰三角形，除此之外都不是等腰三角形； $\therefore$ 不正确；

④ $\because \angle BDC = \angle DBC = 45^\circ$ ， $\angle DFP = \angle PEB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BPE = 90 - \angle PBE = 45^\circ$ ， $\angle DPF = 90 - \angle PDF = 45^\circ$ ，

$\therefore BE = PE$ ， $DF = PF$ ， $\therefore PE + EC + PF + CF = (BE + EC) + (DF + CF) = BC + CD = 4 + 4 = 8$ ； $\therefore$ 不正确；

⑤连接 AC ，设 AC 与 BD 交点为 O ，则 $AC \perp BD$ ， $\therefore AP \geq AO$ ，

$\because AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$ ， $\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore AP \geq 2\sqrt{2}$ ， $\therefore EF \geq 2\sqrt{2}$ ， $\therefore EF$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ ； $\therefore$ 正确；

⑥ $\because AP^2 = EF^2 = PE^2 + PF^2$ ， $PE = BE$ ， $PF = DF$ ，

$\therefore 2AP^2 = 2PE^2 + 2PF^2 = PB^2 + PD^2$ ，即 $PB^2 + PD^2 = 2AP^2$ ； $\therefore$ 正确。故正确的有①②⑤⑥故选：D。

【点睛】本题主要考查了正方形，矩形，全等三角形，轴对称，等腰三角形，勾股定理，解决问题的关键是熟练掌握正方形性质，矩形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，轴对称性质，等腰三角形判定和性质，勾股定理理解直角三角形。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/717112141133010046>