第七章 平行线的证明 （压轴专练）（八大题型）

题型 1：平行线-M 型（含锯齿型）

1．如图 1，已知 $AB\parallel CD$，$\angle B=30^\circ$，$\angle D=120^\circ$；

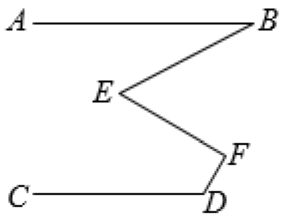


图1

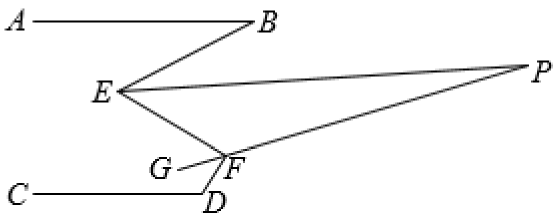


图2

(1)若$\angle E=60^\circ$，则$\angle F=$_；

(2)请探索$\angle E$ 与$\angle F$ 之间满足的数量关系？说明理由；

(3)如图 2，已知 EP 平分$\angle BEF$，FG 平分$\angle EFD$，反向延长 FG 交 EP 于点 P，求$\angle P$ 的度数．

2．问题情境：如图 1，已知 $AB\parallel CD$，$\angle APC=108^\circ$．求$\angle PAB+\angle PCD$ 的度数．

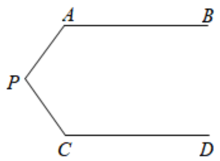


图1

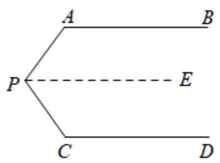


图2

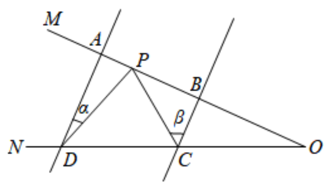


图3

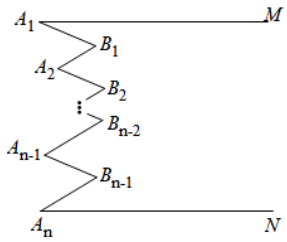


图4

经过思考，小敏的思路是：如图 2，过 P 作 $PE\parallel AB$，根据平行线有关性质，可得 $\angle PAB+\angle PCD=360^\circ-\angle APC=252^\circ$．

问题迁移：如图 3，$AD\parallel BC$，点 P 在射线 OM 上运动，$\angle ADP=\angle\alpha$，$\angle BCP=\angle\beta$．

(1)当点 P 在 A、B 两点之间运动时，$\angle CPD$、$\angle\alpha$、$\angle\beta$ 之间有何数量关系？请说明理由．

(2)如果点 P 在 A、B 两点外侧运动时（点 P 与点 A、B、O 三点不重合），请你直接写出$\angle CPD$、$\angle\alpha$、$\angle\beta$ 之间的数量关系．

(3)问题拓展：如图 4，$MA_1\parallel NA_n$，$A_1-B_1-A_2-\cdots-B_{n-1}-A_n$ 是一条折线段，依据此图所含信息，把你所发现的结论，用简洁的数学式子表达为_．

题型 2：平行线-笔尖型

3．如图 1，已知 $AB//CD$，P 是直线 AB，CD 外的一点，$PF\perp CD$ 于点 F，PE 交 AB 于点 E，满足$\angle FPE=60°$．

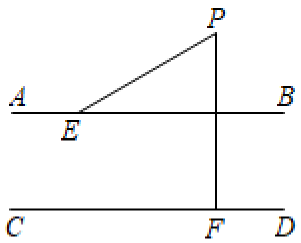


图1

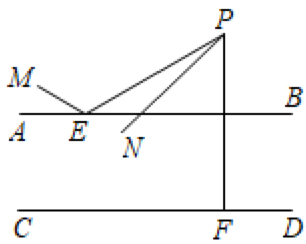
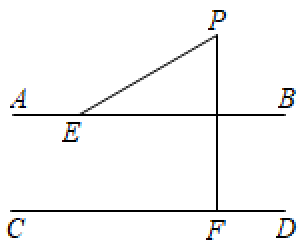


图2



备用图

（1）求$\angle AEP$ 的度数；

（2）如图 2，射线 PN 从 PE 出发，以每秒 10°的速度绕 P 点按逆时针方向匀速旋转，当 PN 到达 PF 时立刻返回至 PE，然后继续按上述方式旋转；射线 EM 从 EA 出发，以相同的速度绕 E 点按顺时针方向旋转至 EP 后停止运动，此时射线 PN 也停止运动．若射线 PN、射线 EM 同时开始运动，设运动时间为 t 秒．

①当射线 PN 平分$\angle EPF$ 时，求$\angle MEP$ 的度数（$0°<\angle MEP<180°$）；

②当直线 EM 与直线 PN 相交所成的锐角是 60°时，则 $t=$_____．

4．$AB\parallel CD$，点 P 为直线 AB，CD 所确定的平面内的一点．

（1）如图 1，写出$\angle APC$、$\angle A$、$\angle C$ 之间的数量关系，并证明；

（2）如图 2，写出$\angle APC$、$\angle A$、$\angle C$ 之间的数量关系，并证明；

（3）如图 3，点 E 在射线 BA 上，过点 E 作 $EF\parallel PC$，作$\angle PEG=\angle PEF$，点 G 在直线 CD 上，作$\angle BEG$ 的平分线 EH 交 PC 于点 H，若$\angle APC=30°$，$\angle PAB=140°$，求$\angle PEH$ 的度数．

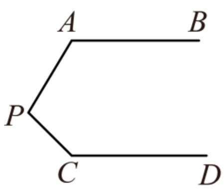


图1

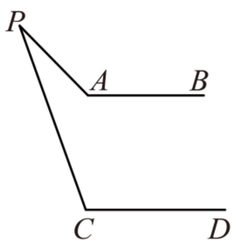


图2

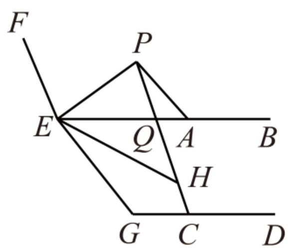
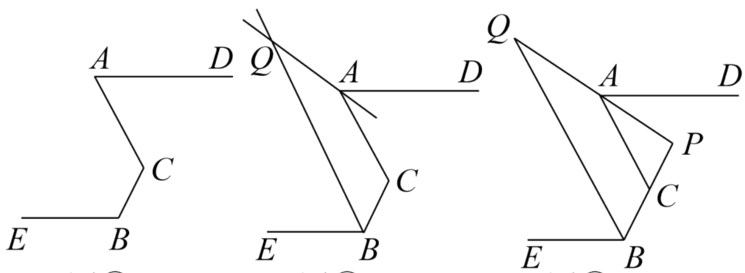


图3

题型 3：平行线-“鸡翅”型

5．如图，已知：点 A、C、B 不在同一条直线，$AD // BE$



图①　　图②　　图③

(1)求证：$\angle B+\angle C-\angle A=180^\circ$；

(2)如图②，AQ、BQ分别为$\angle DAC$、$\angle EBC$的平分线所在直线，试探究$\angle C$与$\angle AQB$的数量关系；

(3)如图③，在（2）的前提下，且有$AC\parallel QB$，直线AQ、BC交于点P，$QP\perp PB$，直接写出$\angle DAC$：$\angle ACB$：$\angle CBE$=_____.

6．已知，$AE//BD$，$\angle A=\angle D$．

（1）如图1，求证：$AB//CD$；

（2）如图2，作$\angle BAE$的平分线交CD于点F，点G为AB上一点，连接FG，若$\angle CFG$的平分线交线段AG于点H，连接AC，若$\angle ACE=\angle BAC+\angle BGM$，过点$H$作$HM\perp FH$交$FG$的延长线于点$M$，且$3\angle E-5\angle AFH=18^\circ$，求$\angle EAF+\angle GMH$的度数．

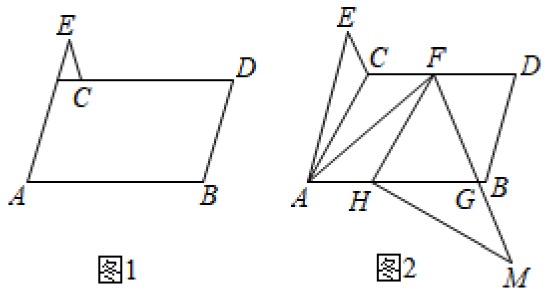


图1　　图2

题型4：平行线-“骨折”型

7．已知，$AB\parallel CD$．点M在AB上，点N在CD上．

（1）如图1中，$\angle BME$、$\angle E$、$\angle END$的数量关系为：___；（不需要证明）

如图2中，$\angle BMF$、$\angle F$、$\angle FND$的数量关系为：___；（不需要证明）

（2）如图3中，NE平分$\angle FND$，MB平分$\angle FME$，且$2\angle E+\angle F=180^\circ$，求$\angle FME$的度数；

（3）如图4中，$\angle BME=60^\circ$，EF平分$\angle MEN$，NP平分$\angle END$，且$EQ\parallel NP$，则$\angle FEQ$的大小是否发生变化，若变化，请说明理由，若不变化，求出$\angle FEQ$的度数．

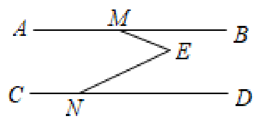


图1

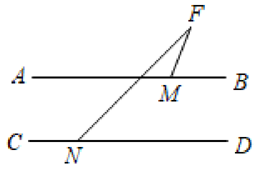


图2

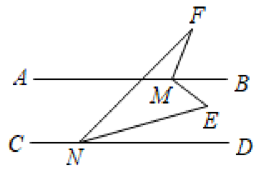


图3

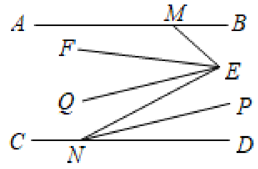
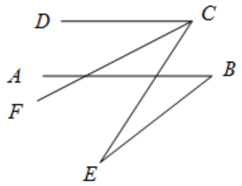
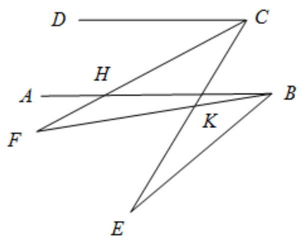


图4

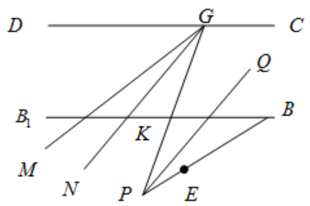
8．（1）如图，$AB//CD$，CF 平分$\angle DCE$，若$\angle DCF$=30°，$\angle E$=20°，求$\angle ABE$ 的度数；



（2）如图，$AB//CD$，$\angle EBF$=2$\angle ABF$，CF 平分$\angle DCE$，若$\angle F$ 的 2 倍与$\angle E$ 的补角的和为 190°，求$\angle ABE$ 的度数．



（3）如图，P 为（2）中射线 BE 上一点，G 是 CD 上任一点，PQ 平分$\angle BPG$，$GN//PQ$，GM 平分$\angle DGP$，若$\angle B$＝30°，求$\angle MGN$ 的度数．



题型 5：三角形的内角和与外角性质综合

9．综合与探究

如图 1，在△ABC 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线相交于点 O，老师通过度量角的度数，计算后发现 $\angle O = 90° + \frac{1}{2}\angle A$．

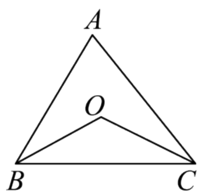


图1

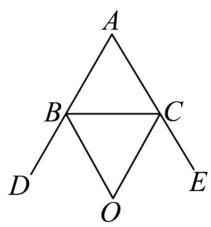


图2

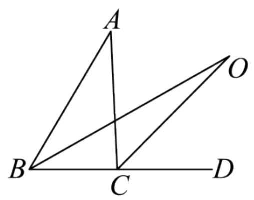


图3

(1)请你证明老师的发现；

(2)老师在学生完成后说："如果将三角形内角平分线改成外角平分线会怎样呢？"

①"兴趣小组"提出问题：如图2，$\triangle ABC$的外角$\angle CBD$，$\angle BCE$的平分线相交于点O，请猜想$\angle O$与$\angle A$之间的数量关系，并加以证明；

②"智慧小组"提出问题：如图3，$\triangle ABC$的外角$\angle ACD$的平分线与内角$\angle ABC$的平分线相交于点O，请猜想$\angle O$与$\angle A$之间的数量关系（请直接写出数量关系式）.

10．已知：如图1，在$\triangle ABC$中，点D是AC上一定点，点E是AB上一动点.

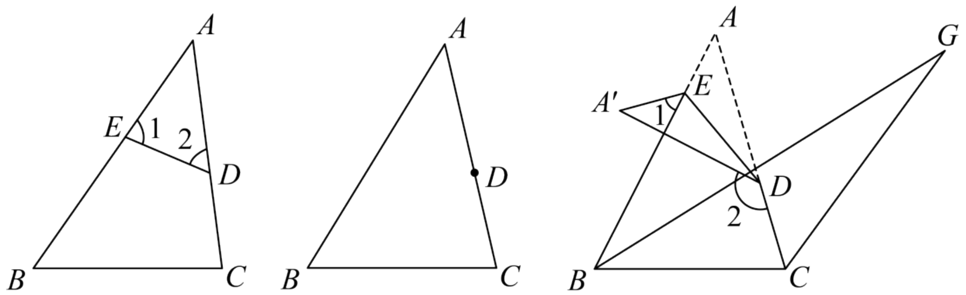


图1　　图2　　图3

(1)设$\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$.

①当$\alpha+\beta=110^\circ$时，求$\angle 1+\angle 2$的度数；

②在图2中，作出点E使$\angle BED$与β互补(要求尺规作图，保留作图痕迹．不写作法)；

(2)把$\triangle ABC$沿着DE所在的的直线折叠，使A的对应点A'落在$\triangle ABC$的外部，如图3，$\angle ABC$和$\angle ACB$相邻的外角的平分线相交于点G．①求证：$\angle G=\dfrac{1}{2}\angle A$；

②当$\angle 1=78^\circ,\angle 2=160^\circ$时，试探究$\angle G$是否为定值，若是定值，求出$\angle G$的度数，若不是定值，请说明理由.

题型6：平行线、三角形的内角和与外角性质综合

11．在四边形$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线交边BC于点E，$\angle ADC$的平分线交直线AE于点O.

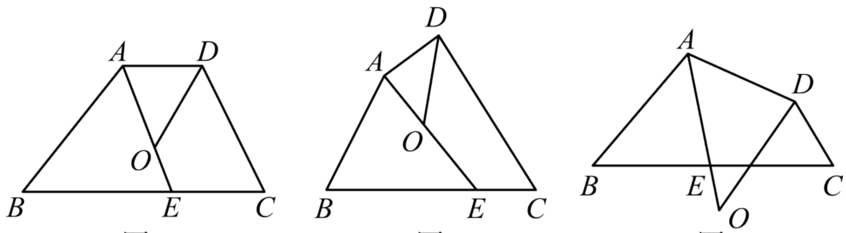


图1　　图2　　图3

(1)当点O在四边形$ABCD$的内部时.

①如图①，若$AD\parallel BC$，$\angle B=40^\circ$，$\angle C=70^\circ$，则$\angle DOE=$_______°，

(2)如图②，试探索$\angle B$、$\angle C$和$\angle DOE$之间的数量关系，并说明理由；

(3)如图③，当点O在四边形$ABCD$的外部时，请你直接写出$\angle B$、$\angle C$和$\angle DOE$之间的数量关系．

12．已知$\angle MON=40°$，OE平分$\angle MON$，点A，B，C分别是射线OM，OE，ON上的动点（A，B，C不与点O重合），连接AB，连接AC交射线OE于点D，设$\angle BAC=\alpha$．

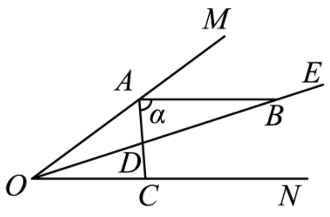


图1

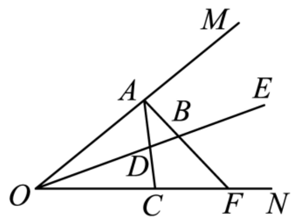
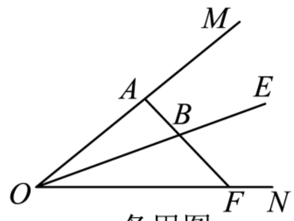


图2



备用图

(1)如图1，若$AB /\!/ ON$，

①$\angle ABO$的度数是_________；

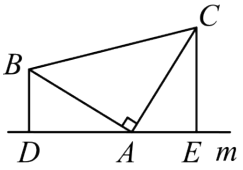
②当$\angle BAD=\angle ABD$时，$\angle OAC$的度数是_________；

当$\angle BAD=\angle BDA$时，$\angle OAC$的度数是_________；

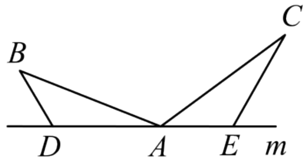
(2)在一个四边形中，若存在一个内角是它的对角的2倍，我们称这样的四边形为“完美四边形”，如图2，若$AB\perp OM$，延长AB交射线ON于点F，当四边形$DCFB$为“完美四边形”时，求α的值．

题型7：几何中的存在，方程问题

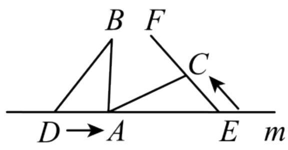
13．已知，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D，A，E三点都在直线m上，且$DE=9\text{cm}$，$\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$．



图①



图②



图③

(1)如图①，若$AB\perp AC$，则BD与AE的数量关系为_；

(2)如图②，判断并说明线段BD，CE与DE的数量关系；

(3)如图③，若改变题干中的条件，只保持$\angle BDA=\angle AEC$，$BD=EF=7\text{cm}$，$DE=9\text{cm}$，点A在线段DE上以2cm/s的速度由点D向点E运动，同时，点C在线段EF上以$x\text{cm/s}$的速度由点E向点F运动，它们运动的时间为t(s)．是否存在x，使得$\triangle ABD$与$\triangle EAC$全等?若存在，求出相应的t的值和x的值；若不存在，请说明理由．

14．已知，$AB // CD$，直线MN交AB于点 M，交CD于点 N，（$\angle BMN > \angle DNM$ 点 E 是线段 MN 上一点 （不与 M、N 重合）， P、Q 分别是射线MB、ND上异于端点的点，连接PE、EQ， PF 平分$\angle MPE$交 MN 于点 F， QG 平分$\angle DQE$交直线PF于点 G．

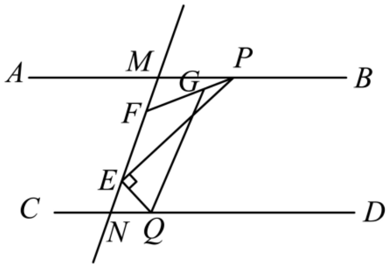
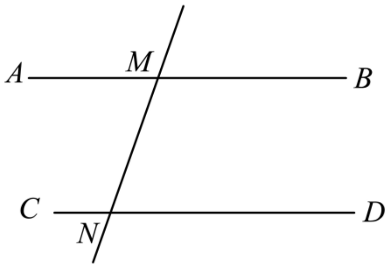


图1



备用图

(1)如图 1， $PE \perp EQ$， $\angle MPE = 42°$， 点 G 在线段 PF 上．

①求 $\angle EQN$ 的度数；

②求 $\angle PGQ$ 的度数；

(2)试探索$\angle PGQ$ 与 $\angle PEQ$之间的数量关系；

(3)已知 $\angle PGQ = 40°$，$\angle MPE = 42°$，$\angle MND = 70°$． 直线PE、GQ交于点K， 直线$M'N$从与直线MN重合的位置开始绕点N顺时针旋转，旋转速度为每秒$4°$，当$M'N$首次与直线CD重合时，运动停止，在此运动过程中，经过t秒，$M'N$恰好平行于$\triangle PGK$的其中一条边，请直接写出所有满足条件的t的值．

题型 8：全等三角形在本章的应用

15．在通过构造全等三角形解决的问题中，有一种方法叫倍长中线法．

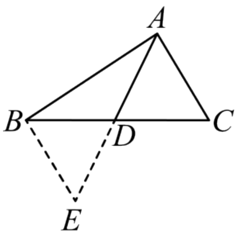


图1

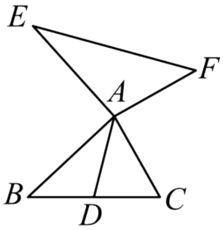


图2

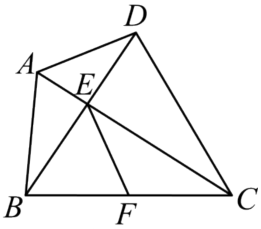


图3

(1)如图 1，AD是$\triangle ABC$的中线，$AB = 8$，$AC = 5$，求AD的取值范围．我们可以延长AD到点E．使$DE = AD$，连接BE，根据SAS可证$\triangle ADC \cong \triangle EDB$，所以$BE = AC$．接下来，在$\triangle ABE$中利用三角形的三边关系可求得$AE$的取值范围，从而得到中线$AD$的取值范围是：_；

(2)如图 2，$AB = AE$，$AC = AF$，$\angle BAE = \angle CAF = 90°$．点$D$为$BC$的中点，求证：$EF = 2AD$；

(3)如图 3，四边形$ABCD$，对角线AC，BD相交于点E，点F是BC边的中点，

$\angle CEF=\angle ADB$，$\angle BAC+\angle BAD=180°$，试探索 BD 与 EF 的数量关系，并证明.

16．四边形 $ABCD$, $AD\perp CD$,点 E 在 CD 上,点 F 在 AE 上,连接 CF , $\angle FCE+3\angle DAE=\angle D$

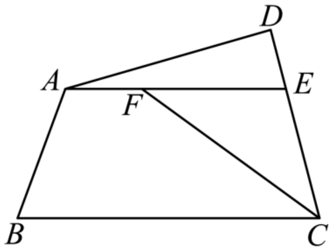


图1

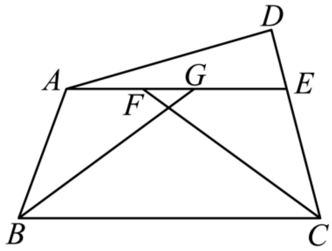


图2

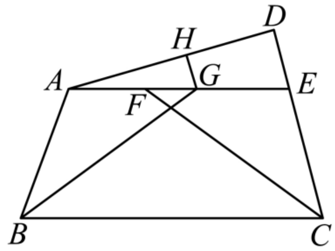


图3

(1)如图 1,求证: $\angle CFE=2\angle DAE$;

(2)如图 2,点 G 在 AE 上,连接 BG , $BG=FC$ ， $\angle ABG=2\angle DAE$, $\angle BAD-\angle CFE=90°$,求证： $AG=EC$;

(3)如图 3,在（2）的条件下,过点 G 作 CD 的平行线交 AD 于点 H , $CE=2DE$, $AF=6$,求 HG 的值.

17．在 $\triangle ABC$ 中，D ，E 分别是 BC 和 AC 上的点，$\angle ADB=\angle AEB=\alpha$ ．过点 E 作 $EF\parallel AD$ 交 BC 于点 F ，已知 $EF=CD$.

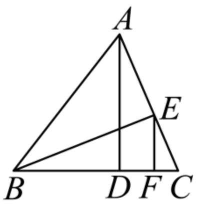


图1

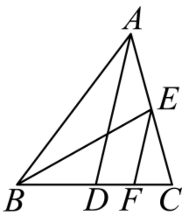


图2

(1)如图①，若 $\alpha=90°$ ，求证： $BE=AC$;

(2)在（1）的条件下，若 $BF=7$ ， $CF=1$ ，求 AC 的长;

(3)如图②，若 $\alpha\neq 90°$ ，则（1）中的结论是否成立？请说明理由.

18．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$ ，点 D 是直线 BC 上一点（不与 B 、C 重合），以 AD 为一边在 AD 的右侧作 $\triangle ADE$ ，使 $AD=AE$ ， $\angle DAE=\angle BAC$ ，连结 CE .

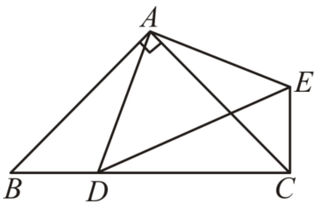


图1

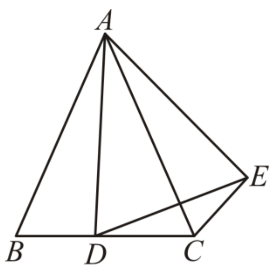
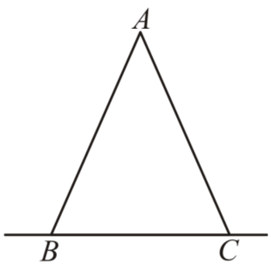


图2



备用图

(1)如图 1，当点 D 在线段 BC 上时，如果 $\angle BAC=90°$，则 $\angle BCE=$______°.

(2)设 $\angle BAC=\alpha$， $\angle BCE=\beta$.

①如图 2，当点 D 在线段 BC 上移动时，α 、β 之间有怎样的数量关系？请说明理由.

②当点 D 在直线 BC 上移动时，α 、β 之间有怎样的数量关系？请你在备用图上画出图形，并直接写出你的结论.

19．发现问题

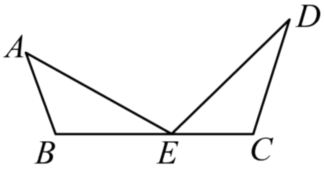
（1）已知，如图①，在四边形 $ABCD$ 中，E 在 BC 上，$AE=DE$，$\angle ABE=\angle AED=\angle ECD$，若 $AB=5$，$BC=12$，则 $BE=$_.

探究问题

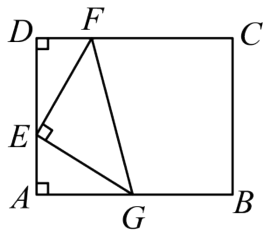
（2）如图②，已知长方形 $ABCD$ 的周长为 36，$CD=10$，点 E 为 AD 边上一点，$EG\perp EF$ 分别交 AB 于点 G，交 CD 于点 F，且 $EG=EF$，求四边形 $BCFG$ 的面积.

解决问题

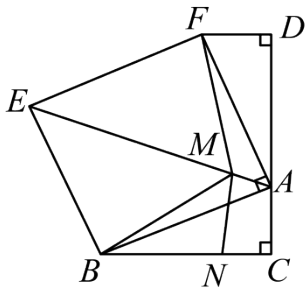
（3）如图③，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=5$，$BC=12$，$AB=13$，以 AB 为边在其左上方作正方形 $ABEF$，FD 垂直于 CA 延长线于点 D，连接 AE，M、N 分别为 AE、BC 上两动点，连接 FM，BM，MN，当 $BM+MN$ 的值最小时，求多边形 $EFMNB$ 的面积.（注：四边相等，四个角是直角的四边形是正方形，正方形是轴对称图形，对角线是其一条对称轴）



图①



图②



图③

1．(1) $90°$

(2) $\angle F=\angle E+30°$，理由见解析

(3) $15°$

【分析】（1）如图 1，分别过点 E，F 作 $EM//AB$，$FN//AB$，根据平行线的性质得到 $\angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，$\angle D+\angle DFN=180°$，代入数据即可得到结论；

（2）如图 1，根据平行线的性质得到 $\angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，由 $AB//CD$，$AB//FN$，得到 $CD//FN$，根据平行线的性质得到 $\angle D+\angle DFN=180°$，于是得到结论；

（3）如图 2，过点 F 作 $FH//EP$，设 $\angle BEF=2x°$，则 $\angle EFD=(2x+30)°$，根据角平分线的定义得到 $\angle PEF=\frac{1}{2}\angle BEF=x°$，$\angle EFG=\frac{1}{2}\angle EFD=(x+15)°$，根据平行线的性质得到 $\angle PEF=\angle EFH=x°$，$\angle P=\angle HFG$，于是得到结论．

【详解】（1）解：如图 1，分别过点 E，F 作 $EM//AB$，$FN//AB$，

$\therefore EM//AB//FN$，

$\therefore \angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，

又 $\because AB//CD$，$AB//FN$，

$\therefore CD//FN$，

$\therefore \angle D+\angle DFN=180°$，

又 $\because \angle D=120°$，

$\therefore \angle DFN=60°$，

$\therefore \angle BEF=\angle MEF+30°$，$\angle EFD=\angle EFN+60°$，

$\therefore \angle EFD=\angle MEF+60°$

$\therefore \angle EFD=\angle BEF+30°=90°$；

故答案为：$90°$；

（2）解：如图 1，分别过点 E，F 作 $EM//AB$，$FN//AB$，

$\therefore EM//AB//FN$，

$\therefore \angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，

又 $\because AB//CD$，$AB//FN$，

$\therefore CD//FN$，

$\therefore \angle D+\angle DFN=180°$，

又 $\because \angle D=120°$，

$\therefore \angle DFN = 60°$，

$\therefore \angle BEF = \angle MEF + 30°$， $\angle EFD = \angle EFN + 60°$，

$\therefore \angle EFD = \angle MEF + 60°$，

$\therefore \angle EFD = \angle BEF + 30°$；

（3）解：如图2，过点F作$FH // EP$，

由（2）知，$\angle EFD = \angle BEF + 30°$，

设$\angle BEF = 2x°$，则$\angle EFD = (2x + 30)°$，

$\because EP$平分$\angle BEF$，GF平分$\angle EFD$，

$\therefore \angle PEF = \frac{1}{2}\angle BEF = x°$， $\angle EFG = \frac{1}{2}\angle EFD = (x + 15)°$，

$\because FH // EP$，

$\therefore \angle PEF = \angle EFH = x°$， $\angle P = \angle HFG$，

$\because \angle HFG = \angle EFG - \angle EFH = 15°$，

$\therefore \angle P = 15°$．

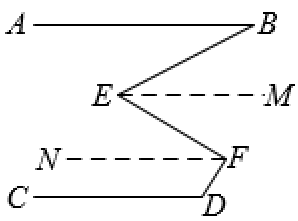


图1

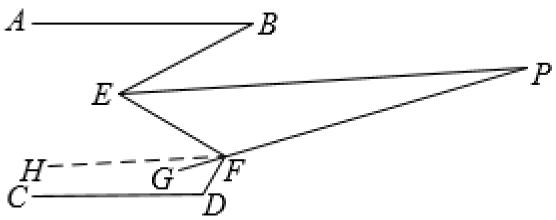


图2

【点睛】本题考查了平行线的性质，角平分线的定义，熟练掌握平行线的性质定理是解题的关键．

2．(1)$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，理由见解析

(2)$\angle CPD=\angle\beta-\angle\alpha$或$\angle CPD=\angle\alpha-\angle\beta$

(3)$\angle A_1+\angle A_2+\ldots+\angle An=\angle B_1+\angle B_2+\ldots+\angle B_{n-1}$

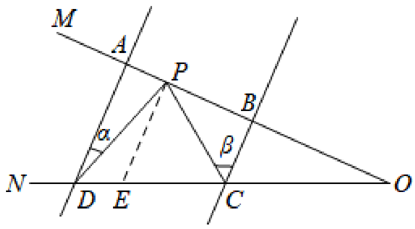
【分析】(1）过P作$PE\parallel AD$，根据平行线的判定可得$PE\parallel AD\parallel BC$，再根据平行线的性质即可求解；

（2）过P作$PE\parallel AD$，根据平行线的判定可得$PE\parallel AD\parallel BC$，再根据平行线的性质即可求解；

（3）问题拓展：分别过A_2，$A_3\ldots$，An_{-1}作直线$\parallel A_1M$，过B_1，B_2，…，Bn_{-1}作直线$\parallel A_1M$，根据平行线的判定和性质即可求解．

【详解】(1）$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，理由如下：

如图，过P作$PE\parallel AD$交CD于E，



∵$AD\parallel BC$，

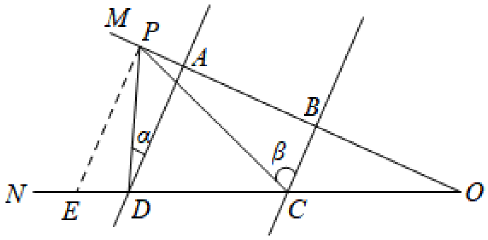
∴$AD\parallel PE\parallel BC$，

∴$\angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

∴$\angle CPD=\angle DPE+\angle CPE=\angle\alpha+\angle\beta$；

（2）当 P 在 BA 延长线时，$\angle CPD=\angle\beta-\angle\alpha$；理由：

如图，过 P 作 $PE\parallel AD$ 交 CD 于 E，



∵$AD\parallel BC$，

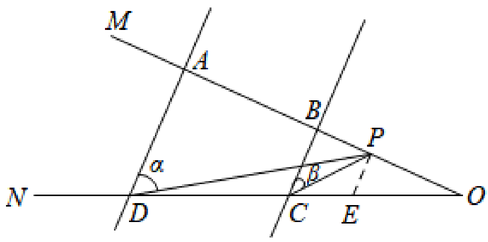
∴$AD\parallel PE\parallel BC$，

∴$\angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

∴$\angle CPD=\angle CPE-\angle DPE=\angle\beta-\angle\alpha$；

当 P 在 BO 之间时，$\angle CPD=\angle\alpha-\angle\beta$．理由：

如图，过 P 作 $PE\parallel AD$ 交 CD 于 E，



∵$AD\parallel BC$，

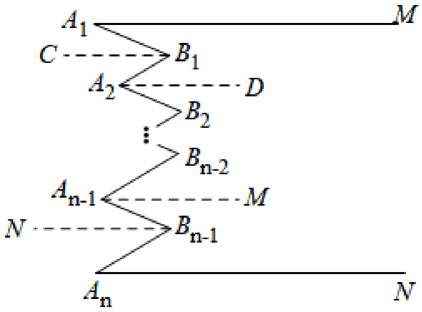
∴$AD\parallel PE\parallel BC$，

∴$\angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

∴$\angle CPD=\angle DPE-\angle CPE=\angle\alpha-\angle\beta$.

（3）问题拓展：分别过 A_2，A_3…，An_{-1} 作直线$\parallel A_1M$，过 B_1，B_2，…，Bn_{-1} 作直线$\parallel A_1M$，

由平行线的性质和角的和差关系得$\angle A_1+\angle A_2+\ldots+\angle An=\angle B_1+\angle B_2+\ldots+\angle B_{n-1}$.



故答案为：$\angle A_1+\angle A_2+\ldots+\angle An=\angle B_1+\angle B_2+\ldots+\angle B_{n-1}$.

【点睛】本题主要考查了平行线的判定和性质的应用，主要考查学生的推理能力，第（2）问在解题时注意分类思想的运用.

3．（1）150°；（2）①$\angle MEP=60°$或 120°；②$\frac{3}{2}$或$\frac{9}{2}$

【分析】（1）根据平行线的性质及三角形外角性质可得答案；

（2）①由角平分线的定义得$\angle EPN=30°$，再根据三角形外角性质可得答案；

②利用三角形外角性质列出方程，通过解方程即可得到问题的答案.

【详解】解：（1）如图 1，$\because AB//CD$，$PF\perp CD$，

$\therefore PF\perp AB$，

$\therefore \angle AMP=90°$，

$\because \angle FPE=60°$，

$\therefore \angle AEP=\angle FPE+\angle AMP=150°$；

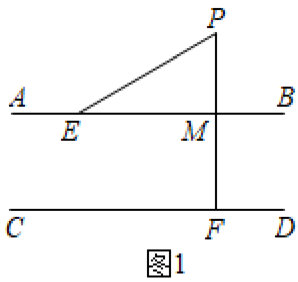


图1

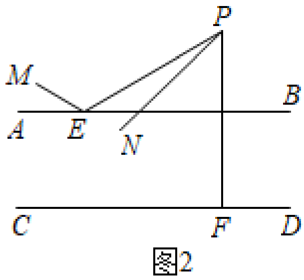


图2

（2）如图 2，①当 PN 平分$\angle EPF$ 时，$\angle EPN=30°$时，

运动时间 $t=\frac{30}{10}=3$（秒），此时 ME 也运动了 3 秒，

$\therefore \angle AEM=3\times10°=30°$，

$\therefore \angle MEP=150°-30°=120°$；

PN 继续运动至 PF 时，返回时，当 PN 平分$\angle EPF$ 时，运动时间至$\frac{60}{10}+\frac{30}{10}=9$（秒）时，

此时 ME 也运动了 9 秒，

∴$\angle AEM=9\times10°=90°$，

∴$\angle MEP=150°-90°=60°$；

当第二次 PE 运动至 PF 时，当 PN 平分$\angle EPF$ 时，运动了 $\frac{60}{10}\times2+\frac{30}{10}=15$（秒）

∴$\angle AEM=15\times10°=150°$，

∴$\angle MEP=150°-150°=0°$，不符合题意；

综上所述，$\angle MEP$ 的度数为 60°或 120°；

②如图 3，

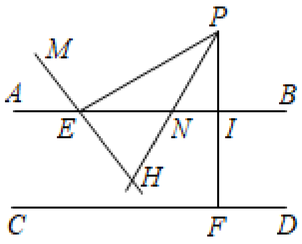


图3

当 $0\le t\le6$ 时，此时$\angle EPN=\angle AEM=10t$，$\angle NEH=10t$，$\angle PEN=30°$，

$\angle PHE=180°-\angle HPE-\angle PEH=180°-10t-30°-10t=150°-20t$，

当 $150°-20t=120°$时，$t=\frac{3}{2}$ ，

当 $150°-20t=60°$时，$t=\frac{9}{2}$ ；

当 $6<t\le12$ 时，此时$\angle EPN=120°-10t$，$\angle NEH=\angle AEM=10t$，$\angle PEN=30°$，

$\angle PHE=30°$，不成立，

当 $12<t\le15$ 时，此时$\angle EPN=10t-120°$，$\angle NEH=\angle AEM=10t$，$\angle PEN=30°$，

$\angle PHE=270°-20t$，

$\angle PHE=270°-20t=60°$时，$t=\frac{21}{2}$ （不合题意），$\angle PHE=270°-20t=120°$，$t=\frac{15}{2}$ （不合题意）

故答案为：$\frac{3}{2}$或$\frac{9}{2}$.

【点睛】此题考查了平行线的性质，三角形外角性质，三角形内角和定理，熟练掌握平行线的性质及三角形外角性质是解决此题关键.

4.（1）$\angle A+\angle C+\angle APC=360°$，证明详见解析；（2）$\angle APC=\angle A-\angle C$，证明详见解析；（3）55°.

【分析】（1）首先过点 P 作 PQ∥AB，结合题意得出 AB∥PQ∥CD，然后由“两直线平行，同

旁内角互补”进一步分析即可证得∠A+∠C+∠APC＝360°；

（2）作 PQ∥AB，结合题意得出 AB∥PQ∥CD，根据“两直线平行，内错角相等”进一步分析即可证得∠APC＝∠A−∠C；

（3）由（2）知，∠APC＝∠PAB−∠PCD，先利用平行线性质得出∠BEF＝∠PQB＝110°，然后进一步得出∠PEG＝$\frac{1}{2}$∠FEG，∠GEH＝$\frac{1}{2}$∠BEG，最后根据∠PEH＝∠PEG−∠GEH 即可得出答案.

【详解】（1）∠A+∠C+∠APC＝360°，证明如下：

如图 1 所示，过点 P 作 PQ∥AB，

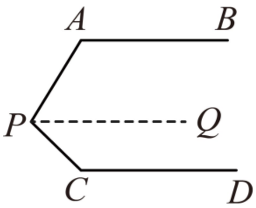


图1

∴∠A+∠APQ＝180°，

又∵AB∥CD，

∴PQ∥CD，

∴∠C+∠CPQ＝180°，

∴∠A+∠APQ+∠C+∠CPQ＝360°，

即∠A+∠C+∠APC＝360°；

（2）∠APC＝∠A−∠C，证明如下：

如图 2 所示，过点 P 作 PQ∥AB，

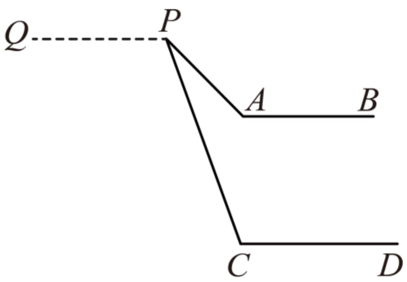


图2

∴∠A＝∠APQ，

∵AB∥CD，

∴PQ∥CD，

$\therefore\angle C=\angle CPQ$，

$\because\angle APC=\angle APQ-\angle CPQ$，

$\therefore\angle APC=\angle A-\angle C$；

（3）由（2）知，$\angle APC=\angle PAB-\angle PCD$，

$\because\angle APC=30^\circ$，$\angle PAB=140^\circ$，

$\therefore\angle PCD=110^\circ$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore\angle PQB=\angle PCD=110^\circ$，

$\because EF\parallel PC$，

$\therefore\angle BEF=\angle PQB=110^\circ$，

$\because\angle PEG=\angle PEF$，

$\therefore\angle PEG=\frac{1}{2}\angle FEG$，

$\because EH$ 平分$\angle BEG$，

$\therefore\angle GEH=\frac{1}{2}\angle BEG$，

$\therefore\angle PEH=\angle PEG-\angle GEH$

$=\frac{1}{2}\angle FEG-\frac{1}{2}\angle BEG$

$=\frac{1}{2}\angle BEF$

$=55^\circ$.

【点睛】本题主要考查了利用平行线性质与角平分线性质求角度的综合运用，熟练掌握相关概念是解题关键.

5．(1)见解析

(2)$2\angle AQB+\angle C=180^\circ$，理由见解析

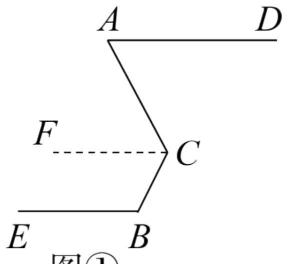
(3)1:2:2

【分析】（1）过点 C 作 $CF\parallel AD$，则 $CF\parallel BE$，根据平行线的性质可得出$\angle ACF=\angle A$、$\angle BCF=180^\circ-\angle B$，据此可得；

（2）过点 Q 作 $QM\parallel AD$，则 $QM\parallel BE$，根据平行线的性质、角平分线的定义可得出$\angle AQB=\frac{1}{2}(\angle CBE-\angle CAD)$，结合（1）的结论可得出$2\angle AQB+\angle C=180^\circ$；

（3）由（2）的结论可得出$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle CBE$①，由$QP\perp PB$可得出$\angle CAD+\angle CBE=180^\circ$②，联立①②可求出$\angle CAD$、$\angle CBE$的度数，再结合（ 1）的结论可得出$\angle ACB$的度数，将其代入$\angle DAC$：$\angle ACB$：$\angle CBE$中可求出结论．

【详解】(1）在图①中，过点C作$CF\parallel AD$，则$CF\parallel BE$．



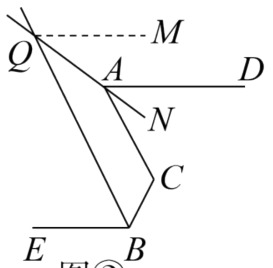
图①

$\because CF\parallel AD\parallel BE$，

$\therefore\angle ACF=\angle A$，$\angle BCF+\angle B=180^\circ$，

$\therefore\angle ACB+\angle B-\angle A=\angle ACF+\angle BCF+\angle B-\angle A=\angle A+180^\circ-\angle A=180^\circ$．

（2）在图2中，过点Q作$QM\parallel AD$，则$QM\parallel BE$．



图②

$\because QM\parallel AD$，$QM\parallel BE$，

$\therefore\angle AQM=\angle NAD$，$\angle BQM=\angle EBQ$．

$\because AQ$平分$\angle CAD$，BQ平分$\angle CBE$，

$\therefore\angle NAD=\frac{1}{2}\angle CAD,\angle EBQ=\frac{1}{2}\angle CBE$，

$\therefore\angle AQB=\angle BQM-\angle AQM=\frac{1}{2}(\angle CBE-\angle CAD)$．

$\because\angle C=180^\circ-(\angle CBE-\angle CAD)=180^\circ-2\angle AQB$，

$\therefore 2\angle AQB+\angle C=180^\circ$．

（3）$\because AC\parallel QB$，

$\therefore\angle AQB=\angle CAP=\frac{1}{2}\angle CAD,\angle ACP=\angle PBQ=\frac{1}{2}\angle CBE$，

$\therefore \angle ACB=180^{\circ}-\angle ACP=180^{\circ}-\frac{1}{2}\angle CBE$.

$\because 2\angle AQB+\angle ACB=180^{\circ}$，

$\therefore \angle CAD=\frac{1}{2}\angle CBE$..

又$\because QP\perp PB$，

$\therefore \angle CAP+\angle ACP=90^{\circ}$，即$\angle CAD+\angle CBE=180^{\circ}$，

$\therefore \angle CAD=60^{\circ}$，$\angle CBE=120^{\circ}$，

$\therefore \angle ACB=180^{\circ}-(\angle CBE-\angle CAD)=120^{\circ}$，

$\therefore \angle DAC$：$\angle ACB$：$\angle CBE=60^{\circ}:120^{\circ}:120^{\circ}=1:2:2$，

故答案为：$1:2:2$.

【点睛】本题主要考查平行线的的判定与性质，解题的关键是熟练掌握平行线的性质、添加辅助线构建平行线.

6.（1）见解析；（2）72°

【分析】（1）根据平行线的性质得出$\angle A+\angle B=180^{\circ}$，再根据等量代换可得$\angle B+\angle D=180^{\circ}$，最后根据平行线的判定即可得证；

（2）过点E作$EP//CD$，延长DC至Q，过点M作$MN//AB$，根据平行线的性质及等量代换可得出$\angle ECQ=\angle BGM=\angle DFG$，再根据平角的含义得出$\angle ECF=\angle CFG$，然后根据平行线的性质及角平分线的定义可推出$\angle BHF=\angle CFH,\angle CFA=\angle FAB$；设$\angle FAB=\alpha,\angle CFH=\beta$，根据角的和差可得出$\angle AEC=2\angle AFH$，结合已知条件$3\angle AEC-5\angle AFH=180^{\circ}$可求得$\angle AFH=18^{\circ}$，最后根据垂线的含义及平行线的性质，即可得出答案.

【详解】（1）证明：$\because AE//BD$

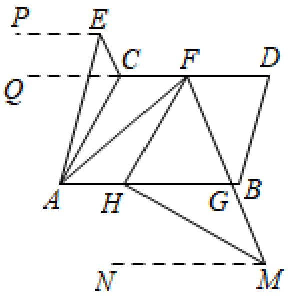
$\therefore \angle A+\angle B=180^{\circ}$

$\because \angle A=\angle D$

$\therefore \angle B+\angle D=180^{\circ}$

$\therefore AB//CD$；

（2）过点E作$EP//CD$，延长DC至Q，过点M作$MN//AB$



$\because AB//CD$

$\therefore \angle QCA=\angle CAB$， $\angle BGM=\angle DFG$， $\angle CFH=\angle BHF$， $\angle CFA=FAG$

$\because \angle ACE=\angle BAC+\angle BGM$

$\therefore \angle ECQ+\angle QCA=\angle BAC+\angle BGM$

$\therefore \angle ECQ=\angle BGM=\angle DFG$

$\because \angle ECQ+ECD=180°, \angle DFG+CFG=180°$

$\therefore \angle ECF=\angle CFG$

$\because AB//CD$

$\therefore AB//EP$

$\therefore \angle PEA=\angle EAB, \angle PEC=\angle ECF$

$\because \angle AEC=\angle PEC-\angle PEA$

$\therefore \angle AEC=\angle ECF-\angle EAB$

$\therefore \angle ECF=\angle AEC+\angle EAB$

$\because AF$ 平分 $\angle BAE$

$\therefore \angle EAF=\angle FAB=\dfrac{1}{2}\angle EAB$

$\because FH$ 平分 $\angle CFG$

$\therefore \angle CFH=\angle HFG=\dfrac{1}{2}\angle CFG$

$\because CD//AB$

$\therefore \angle BHF=\angle CFH, \angle CFA=\angle FAB$

设 $\angle FAB=\alpha, \angle CFH=\beta$

$\because \angle AFH=\angle CFH-\angle CFA=\angle CFH-\angle FAB$

$\therefore \angle AFH=\beta-\alpha$， $\angle BHF=\angle CFH=\beta$

$\therefore \angle ECF + 2\angle AFH = \angle AEC + \angle EAB + 2\angle AFH = \angle AEC + 2\beta$

$\therefore \angle ECF + 2\angle AFH = \angle E + 2\angle BHF$

$\therefore \angle AEC = 2\angle AFH$

$\because 3\angle AEC - 5\angle AFH = 180°$

$\therefore \angle AFH = 18°$

$\because FH \perp HM$

$\therefore \angle FHM = 90°$

$\therefore \angle GHM = 90° - \beta$

$\because \angle CFM + \angle NMF = 180°$

$\therefore \angle HMB = \angle HMN = 90° - \beta$

$\because \angle EAF = \angle FAB$

$\therefore \angle EAF = \angle CFA = \angle CFH - \angle AFH = \beta - 18°$

$\therefore \angle EAF + \angle GMH = \beta - 18° + 90° - \beta = 72°$

$\therefore \angle EAF + \angle GMH = 72°$.

【点睛】本题考查了平行线的判定及性质，角平分线的定义，能灵活根据平行线的性质和判定进行推理是解此题的关键.

7.（1）$\angle BME=\angle MEN - \angle END$；$\angle BMF=\angle MFN+\angle FND$；（2）120°；（3）不变，30°

【分析】（1）过 E 作 $EH\parallel AB$，易得 $EH\parallel AB\parallel CD$，根据平行线的性质可求解；过 F 作 $FH\parallel AB$，易得 $FH\parallel AB\parallel CD$，根据平行线的性质可求解；

（2）根据（1）的结论及角平分线的定义可得 2（$\angle BME+\angle END$）$+\angle BMF-\angle FND=180°$，可求解$\angle BMF=60°$，进而可求解；

（3）根据平行线的性质及角平分线的定义可推知$\angle FEQ=\frac{1}{2}\angle BME$，进而可求解.

【详解】解：（1）过 E 作 $EH\parallel AB$，如图 1，

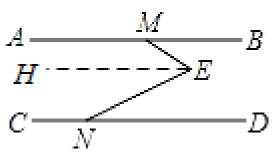


图1

$\therefore \angle BME=\angle MEH$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore HE \parallel CD$，

$\therefore \angle END = \angle HEN$，

$\therefore \angle MEN = \angle MEH + \angle HEN = \angle BME + \angle END$，

即$\angle BME = \angle MEN - \angle END$．

如图 2，过 F 作 $FH \parallel AB$，

$\therefore \angle BMF = \angle MFK$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore FH \parallel CD$，

$\therefore \angle FND = \angle KFN$，

$\therefore \angle MFN = \angle MFK - \angle KFN = \angle BMF - \angle FND$，

即：$\angle BMF = \angle MFN + \angle FND$．

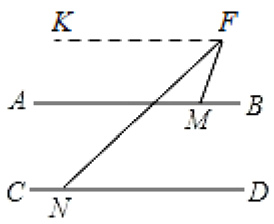


图2

故答案为$\angle BME = \angle MEN - \angle END$；$\angle BMF = \angle MFN + \angle FND$．

（2）由（1）得$\angle BME = \angle MEN - \angle END$；$\angle BMF = \angle MFN + \angle FND$．

$\because NE$ 平分$\angle FND$，MB 平分$\angle FME$，

$\therefore \angle FME = \angle BME + \angle BMF$，$\angle FND = \angle FNE + \angle END$，

$\because 2\angle MEN + \angle MFN = 180°$，

$\therefore 2$（$\angle BME + \angle END$）$+ \angle BMF - \angle FND = 180°$，

$\therefore 2\angle BME + 2\angle END + \angle BMF - \angle FND = 180°$，

即 $2\angle BMF + \angle FND + \angle BMF - \angle FND = 180°$，

解得$\angle BMF = 60°$，

$\therefore \angle FME = 2\angle BMF = 120°$；

（3）$\angle FEQ$ 的大小没发生变化，$\angle FEQ = 30°$．

由（1）知：$\angle MEN = \angle BME + \angle END$，

$\because EF$ 平分$\angle MEN$，NP 平分$\angle END$，

$\therefore\angle FEN=\dfrac{1}{2}\angle MEN=\dfrac{1}{2}$（$\angle BME+\angle END$），$\angle ENP=\dfrac{1}{2}\angle END$，

$\because EQ\parallel NP$，

$\therefore\angle NEQ=\angle ENP$，

$\therefore\angle FEQ=\angle FEN-\angle NEQ=\dfrac{1}{2}$（$\angle BME+\angle END$）$-\dfrac{1}{2}\angle END=\dfrac{1}{2}\angle BME$，

$\because\angle BME=60°$，

$\therefore\angle FEQ=\dfrac{1}{2}\times60°=30°$.

【点睛】本题主要考查平行线的性质及角平分线的定义，作平行线的辅助线是解题的关键.

8.（1）$\angle ABE=40°$；（2）$\angle ABE=30°$；（3）$\angle MGN=15°$.

【分析】（1）过E作$EM\parallel AB$，根据平行线的判定与性质和角平分线的定义解答即可；

（2）过E作$EM\parallel AB$，过F作$FN\parallel AB$，根据平行线的判定与性质，角平分线的定义以及解一元一次方程解答即可；

（3）过P作$PL\parallel AB$，根据平行线的判定与性质，三角形的内角和定理，三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，角平分线的定义解答即可.

【详解】解：（1）过E作$EM\parallel AB$，

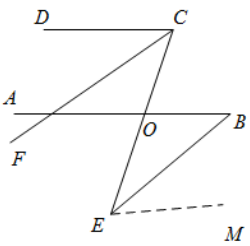


图1

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore CD\parallel EM\parallel AB$，

$\therefore\angle ABE=\angle BEM$，$\angle DCE=\angle CEM$，

$\because CF$平分$\angle DCE$，

$\therefore\angle DCE=2\angle DCF$，

$\because\angle DCF=30°$，

$\therefore\angle DCE=60°$，

$\therefore\angle CEM=60°$，

又$\because\angle CEB=20°$，

∴$\angle BEM=\angle CEM-\angle CEB=40°$，

∴$\angle ABE=40°$；

（2）过 E 作 $EM\parallel AB$，过 F 作 $FN\parallel AB$，

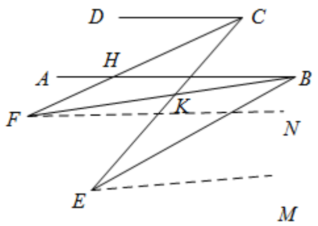


图 2

∵$\angle EBF=2\angle ABF$，

∴设$\angle ABF=x$，$\angle EBF=2x$，则$\angle ABE=3x$，

∵CF 平分$\angle DCE$，

∴设$\angle DCF=\angle ECF=y$，则$\angle DCE=2y$，

∵$AB\parallel CD$，

∴$EM\parallel AB\parallel CD$，

∴$\angle DCE=\angle CEM=2y$，$\angle BEM=\angle ABE=3x$，

∴$\angle CEB=\angle CEM-\angle BEM=2y-3x$，

同理$\angle CFB=y-x$，

∵$2\angle CFB+（180°-\angle CEB）=190°$，

∴$2（y-x）+180°-（2y-3x）=190°$，

∴$x=10°$，

∴$\angle ABE=3x=30°$；

（3）过 P 作 $PL\parallel AB$，

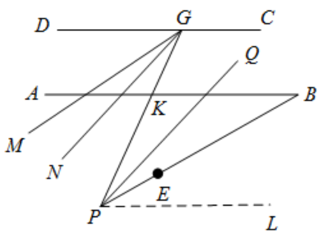


图 3

∵GM 平分$\angle DGP$，

∴设$\angle DGM=\angle PGM=y$，则$\angle DGP=2y$，

∵PQ 平分$\angle BPG$，