第十一章

曲线积分

合肥工业大学数学学院---周江涛

二零一四年四月

简介

积分学　定积分二重积分三重积分 **曲线积分 曲面积分**

积分域　区间域　平面域　空间域　**曲线域**　**曲面域**

曲线积分 $\begin{cases} \text{对弧长的曲线积分} \\ \text{对坐标的曲线积分} \end{cases}$

曲面积分 $\begin{cases} \text{对面积的曲面积分} \\ \text{对坐标的曲面积分} \end{cases}$

第一节

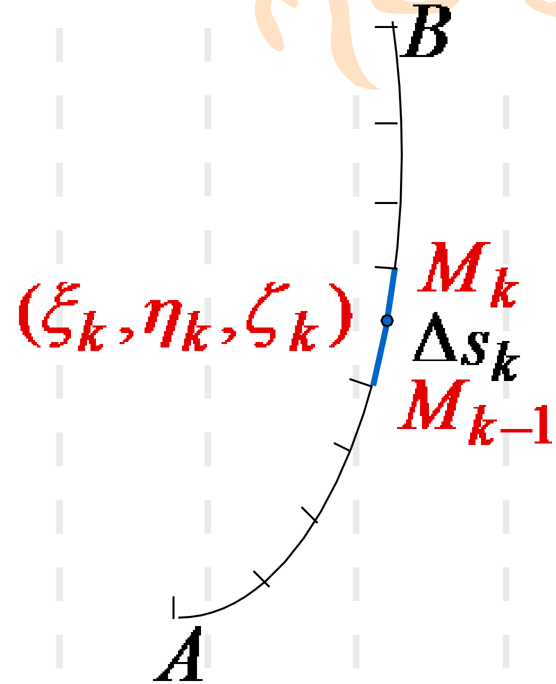
对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

二、对弧长的曲线积分的计算法

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

1. 引例：曲线形构件的质量



假设曲线形细长构件在空间所占弧段为$\overset{\frown}{AB}$，其线密度为$\rho(x, y, z)$，为计算此构件的质量，采用

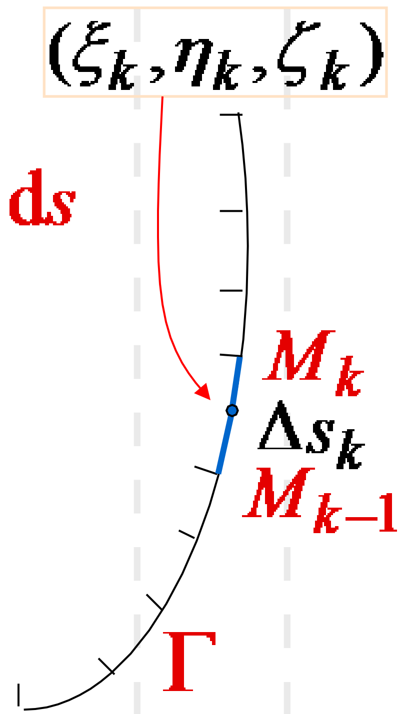
“分割，近似，求和，极限”

可得

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$

2. 定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线, $f(x,y,z)$是定义在 Γ上的一个有界函数, 若通过对 Γ 的任意分割和对局部的任意取点, 下列“乘积和式极限”



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \overset{\text{记作}}{=} \int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在曲线 Γ上对弧长的曲线积分, 或第一类曲线积分. $f(x,y,z)$称为被积函数, Γ 称为积分弧段 .

曲线形构件的质量 $M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

如果 L 是 xoy 面上的曲线弧，则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线，则记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x,y)\equiv 1$，问 $\int_L \mathrm{d}s$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例？

否! 对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s \geq 0$，但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

3. 性质

(1) $\int_{\Gamma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}s$

$$=\int_{\Gamma}f(x,y,z)\mathrm{d}s\pm\int_{\Gamma}g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(2) $\int_{\Gamma}k\,f(x,y,z)\mathrm{d}s=k\int_{\Gamma}f(x,y,z)\mathrm{d}s$ （k 为常数)

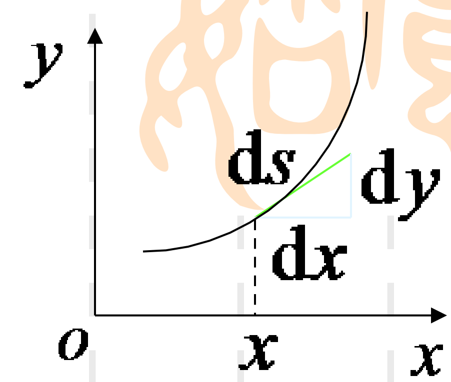
(3) $\int_{\Gamma}f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1 , Γ_2 组成)

(4) $\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=l$ (l 为曲线弧 Γ 的长度)

机动 目录 上页 下页 返回 结束

回忆往事:



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx \qquad (y = y(x))$$

$$= \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \qquad (x = x(t), y = y(t))$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta \qquad (r = r(\theta))$$

二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路： 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

定理： 设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧

$$L: x=\varphi(t),\, y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

上的连续函数, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在, 且

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

证： 根据定义

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设各分点对应参数为 $t_k\ (k=0,1,L\ \ ,n)$,

点 (ξ_k,η_k)对应参数为 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$,

$$\Delta s_k=\sqrt{\phi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k\,,\qquad \tau_k'\in[t_{k-1},t_k]$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$$

注意$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$连续

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

因此

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

说明:

(1) $\Delta s_k > 0,\ \therefore \Delta t_k > 0,$ 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$!

机动 目录 上页 下页 返回 结束

1.如果曲线 L 的方程 $y = y(x)\ (a \le x \le b)$, 则有为

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

2.如果曲线 L 的方程为 $x = x(y)\ (c \le y \le d)$, 则有

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

3.如果方程为极坐标: $L: r = r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$, 则

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$$

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

推广1: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$$ 则

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

推广2: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: y=y(x),\ z=z(x)\ (a\le x\le b)$$ 则

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_{a}^{b} f(x,y(x),z(x))\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$