

第六章 二次型

主要内容：①二次型的概念及其矩阵表示

- ②用配方法化二次型为标准型
- ③用合同变换法化二次型为标准型
- ④用正交变换化二次型为标准型
- ⑤二次型及矩阵的正定性

第一次课：主要介绍二次型的概念及其矩阵表示，用配方法化二次型为标准型。

§ 6. 1二次型及其标准型

6.1 二次型及其标准型

定义6.1.1 :

(6.1.1)

的n元二次齐次多项式叫做 的二次型,简称n

元二次型。其中 称为乘积项 $x_i x_j$ 的系数，当（6.1.1）的全部系数均为实数时，称之为实二次型。当（6.1.1）的系数允许有复数时，称之为复次型（本课程只讨论实二次型）。

若记 , 且

(6.1.2)

(6.1.3)

重点：②④⑤
 难点：④⑤

若记

	1 1	1 n	1
n 1		n n	n

 , 则 (6.1.3) 式可记为

--

 (6.1.4)

(6.1.3) 和 (6.1.4) 式称为二次型的矩阵表示。在

--

 的规定下, 显然

--

 为实对称阵, 且

--

 与二次型时一一对应的。因此, 实对称阵

--

 又称为二次型 (6.1.2) 的矩阵,

--

 的秩叫做二次型的秩。

例：二次型

--

 的矩阵

A	2	$\frac{3}{2}$	3
	$\frac{3}{2}$	1	0
	3	0	$\frac{1}{2}$

$f(x_1, x_2, x_3)$	(x_1, x_2, x_3)	2	$\frac{3}{2}$	3	$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$	$X^T A X$
		$\frac{3}{2}$	1	0		
		3	0	$\frac{1}{2}$		

X	x_1
	x_2
	x_3

611 二次型的标准型

最简单的二次型是只含平方项的, 形如

$$\sum_{i=1}^n p_{ii} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2p_{ij} y_i y_j$$

(6.1.5)

的二次型。其中 $p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn}$ 是实常数。这种形式的二次型称为标准形式的二次型。

对一般的二次型 (6.1.2)，通常采用如下形式（称为变量代换或线性替换）。

注：二次型矩阵为对称阵

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$P = (p_{ij})_{n \times n}$$

(6.1.6)

代入 (6.1.2) 式后，将其化为关于新变量 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的标准形式的二次型：

$$\sum_{i=1}^n p_{ii} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2p_{ij} y_i y_j$$
。系数矩阵 P 是适当选取的满秩矩阵，即 P 是可逆阵。

定义6.1.2 二次型 (6.1.2) 经满秩线性变换 (6.1.6) 化成如 (6.1.5) 的标准形式，称为二次型用满秩线性变换化标准形。所得到的标准形 (6.1.5) 叫做二次型 (6.1.2) 的标准形。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

用矩阵语言：记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，线性变换 $X = PY$ ， P 是可逆阵
 则 $Y = P^{-1}X$ 。

记 $D = \text{diag}(p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn})$ ，当 D 为对角阵时，

$$P^T A P = D$$

$$f(x) = X^T A X = (PY)^T A (PY) = Y^T (P^T A P) Y = Y^T D Y = \sum_{i=1}^n p_{ii} y_i^2$$

由此可见，化一般 n 元二次型 $f(x)$ 成标准形等同于对二次型矩阵 A 寻找一

个 n 阶满秩矩阵 P ，使 $P^{-1}AP = D$ 成对角阵 D 。

定义 6.1.3 设 A, B 为 n 阶实对称阵，若存在 n 阶可逆阵 P 使 $P^{-1}AP = B$ 成立，则称矩阵 A 合同于 B ，或简称 A 与 B 合同。

由定义，二次型矩阵 A 与其标准形矩阵是合同的，矩阵合同有如下性质：（1）

反射性。 A 与 A 合同

（2）对称性。 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同

（3）传递性。 A 与 B 合同， B 与 C 合同，则 A 与 C 合同

（4）若是 A 实对称阵，且 A 合同于 B ，则 B 也是实对称阵

（5）合同阵的秩相等（但逆不成立）。

注：1. P 必须可逆，这样才能保证变换可逆，即 P^{-1} 存在。

2. 由 $P^{-1}AP = B$ ，变换前后二次型性质不变。2. 由 $P^{-1}AP = B$ ，

P 可逆故 P^{-1} 存在，因 D 为对角阵。故 $r(D)$ 是 D 中主对角线元素不为零的个数，因而有结论：二次型的秩等于标准形中系数不为零的完全平方项的项数，等于标准形矩阵主对角线元素不为零的个数。

§ 6.2 满秩线性变换化标准形、惯性定理

定理 6.2.1 任何 n 元二次型都可以经过满秩线性变换化成标准形，化二次型为标准型的两个常用方法：配方法、矩阵合同变换法。

6.2.1 配方法化标准形

基本思想：第一步：把给定的二次型经适当的配完全平方，把（6.1.2）配成若干个线性式子的平方之代数和的形式，设二次型已配方成：

第二步：作线性变换

$$\begin{matrix} y_1 & p_{11}x_1 & p_{1n}x_n \\ y_2 & p_{21}x_1 & p_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & p_{n1}x_1 & p_{nn}x_n \end{matrix}$$

即得标准型：。

例1、用满秩线性变换化二次型 $f = 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 为标准形。

解：

$$f = (4x_2^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3) + 3x_3^2 + 4x_1x_3$$
$$= 4\left[x_2^2 + x_2\left(x_1 + 2x_3\right) + \frac{1}{4}\left(x_1 + 2x_3\right)^2\right] + \left(x_1 + 2x_3\right)^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3$$
$$= 4\left(x_2 + \frac{x_1 + 2x_3}{2}\right)^2 - x_1^2 + 8x_1x_3 + 7x_3^2$$
$$= 4\left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_1^2 + 8x_1x_3 + 16x_3^2\right) + 9x_3^2$$
$$= 4\left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_1 + 4x_3\right)^2 + 9x_3^2$$

令 $\begin{matrix} y_1 & \frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 \\ y_2 & x_1 + 4x_3 \\ y_3 & x_3 \end{matrix}$

则标准形为 $f = 4y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

注：用数学归纳法可证用配方法化二次型为标准形所作得线性变换是非退化的。

注：关键是确保所得线性变换是满秩的。

上述线性变换反解可为

$$\begin{matrix} x_1 & y_2 & 4y_3 \\ x_2 & y_1 - \frac{1}{2}y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & 0 & 1 & 4 \\ p & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$|p| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ 即 p 是满秩阵。

例2、用满秩线性变换化二次型

$f \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \begin{matrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & 4x_1x_3 & 2x_2x_3 & 4x_2^2 & 4x_3^2 \end{matrix}$ 为标准形。

解： $f \begin{pmatrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^2 & 4x_2x_3 & 4x_3^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 & (x_2 - 2x_3)^2 \end{pmatrix}$

令 $\begin{matrix} y_1 & x_1 & x_2 \\ y_2 & x_2 & 2x_3 \\ y_3 & x_3 & \end{matrix}$ 有 $f \begin{matrix} y_1^2 & y_2^2 \end{matrix}$

例1、例2中都含有某变元的平方项，可按该变元配方，若原二次型中不含任何变元的平方项，或配到某一处，只含交叉项，不含平方项。比如 $a_{22} = 0$ ，这时可先做变换

$\begin{matrix} x_1 & y_1 & y_2 \\ x_2 & y_1 & y_2 \\ x_3 & y_3 & \\ x_n & y_n & \end{matrix}$

将原二次型化为以 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 为变元的二次型 $f \begin{matrix} a_{12}y_1^2 & a_{12}y_2^2 \end{matrix}$ ，这样就含有变元的平方项了，再进行配方。

例3、用满秩线性变换化二次型 $f \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \begin{matrix} 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 6x_2x_3 \end{matrix}$ 为标准形。

解：令 $\begin{matrix} x_1 & y_1 & y_2 \\ x_2 & y_1 & y_2 \\ x_3 & y_3 & \end{matrix}$ 即 $\begin{matrix} x_1 & 1 & 1 & 0 & y_1 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & y_2 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & y_3 \end{matrix}$

原二次型变为 $f \begin{matrix} 2y_1^2 & 2y_2^2 & 2(y_1 - y_2)y_3 & 6(y_1 - y_2)y_3 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2y_1^2 & 2y_2^2 & 4y_1y_3 & 8y_2y_3 \end{matrix}$

配方得 $f \begin{pmatrix} 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) & 2y_2^2 & 8y_2y_3 & 2y_3^2 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 2(y_1 - y_3)^2 & 2(y_2 - 2y_3)^2 & 6y_3^2 \end{matrix}$

令
$$\begin{pmatrix} z_1 & y_1 & y_3 \\ z_2 & y_2 & 2y_3 \\ z_3 & y_3 & \end{pmatrix}$$
 则标准型为
$$f = z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_3^2 + 6z_3^2$$

上面变换反解得
$$\begin{pmatrix} y_1 & x_1 & x_3 \\ y_2 & x_1 & x_3 \\ y_3 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$
 即
$$\begin{pmatrix} y_1 & 1 & 0 & 1 & z_1 \\ y_2 & 0 & 1 & 2 & z_2 \\ y_3 & 0 & 0 & 1 & z_3 \end{pmatrix}$$

而
$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & z_2 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & z_3 \end{pmatrix}$$

且
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例、若给定二次型
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2$$

如果简单地令
$$\begin{pmatrix} y_1 & x_1 & x_3 \\ y_2 & x_1 & x_3 \\ y_3 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$
 即
$$\begin{pmatrix} y_1 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ y_2 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ y_3 & 1 & 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix}$$

变换不是满秩的，应把原二次型平方计算出来，再用配方法。

作业：练习6—1 1 (1) (3)、2 (1)

练习6—2 1

思考题：练习6—1 3、4

6. 2. 2矩阵合同变换法化标准型

配方法对二次型进行配方，化为标准型。当然，由于二次型与其矩阵的一一对应可寻求可逆阵 P ，使 $A = P^T \Lambda P$ 。由于任一可逆阵 P 均可分解成一系列初等阵之积，

设 $A_1 = A$ 。

则 $A_2 = P_1^T A_1 P_1$ 。

且有 $A_3 = P_2^T A_2 P_2$ 。

其中 P_1^T 表示对 A_1 作一次与 P_1 相应的列初等变换，再作一次同样的初等行变

换。得到与 A 合同的矩阵 A_2 ，此时称对 A 作了一次合同变换，然后对 A_2 用

P_2 作第二次合同变换得到 A_3 。

注：用配方法化二次型为标准型的时候，所求线性变换应是满秩的。

注：必须是合同变换，即做一次列初等变换必须有同样的行初等变换。

依次实施 s 次合同变换，最终得到与 A 合同的对角矩阵 $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 。从而得到二次型的标准形 $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 。变换所用矩阵 $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ，即 P 是由对单位阵作 s 次与 A 同样的列初等变换得到的。因而这种方法就是所谓的矩阵合同变换法化二次型成标准形。

例4. 用合同变换法将本节例3中的二次型化标准形, 并求其所用满秩线性变换, 并验证结果的正确性。

解：二次型 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ 。

The diagram consists of two identical sets of three horizontal lines. The left set is labeled $C_1 (1) 2$ and the right set is labeled $R_1 (1) 2$. Each set of lines is arranged in a staggered, zig-zag pattern, with the top line shifted to the left, the middle line centered, and the bottom line shifted to the right.

	2	0	-2		2	0	-2		2	0	0
	1	$\frac{-1}{2}$	-3		0	$\frac{-1}{2}$	-2		0	$\frac{-1}{2}$	-2
$G_2 \quad (\frac{-1}{2}) 1$	-2	-2	0	$K_2 \quad (\frac{-1}{2}) 1$	-2	-2	0	$G_3 \quad (1) 1$	-2	-2	-2
	1	$\frac{-1}{2}$	0		1	$\frac{-1}{2}$	0		1	$\frac{-1}{2}$	1
	1	$\frac{-1}{2}$	0		1	$\frac{-1}{2}$	0		1	$\frac{-1}{2}$	1
	0	0	1		0	0	1		0	0	1

	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$R_3 \ (4) \ 2$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$R_3 \ (4) \ 2$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	A_1
--	---	-----------------	--	-----------------	---	-------

D	$\begin{matrix} 2 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & 6 & \end{matrix}$	$, P$	$\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$, \text{且 } P^T A P$	$\begin{matrix} 2 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 6 \end{matrix}$	$。$
-----	---	-------	---	-----------------------	---	-----

经满秩线性变换 ，二次型化为标准形 。

例3所得的结果 与例4不同。这说明标准形不唯一。但注意到，若对例4最后的结果进一步作合同变换：

A_1	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$C_{(2)} \ 2$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$R_{(2)} \ 2$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
-------	--	---------------	--	---------------	--

P	$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$, P^T A P$	$\begin{matrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{matrix}$
-----	---	-------------	---

这时，

标准形为 $f = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{1}{3} y_3^2$ 。

6.2.3 惯性定理

从上面例子可见，二次型的标准形不是唯一的。甚至可以有无穷多个。事实上，从矩阵合同变换看，若可逆矩阵 P_1 使 $P_1^T A P_1 = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ 。取

$P_2 = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) (k_1, k_2, \dots, k_n \neq 0)$ ，并

令 $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ ，则 P 是满秩的，且有 $P^T A P = \text{diag}(k_1^2 d_1, k_2^2 d_2, \dots, k_n^2 d_n)$ 。若对二次型

$f(x) = X^T A X$ 作变换 $X = P Y$ ，得到标准形 $f = \frac{1}{2} k_1^2 d_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2^2 d_2 y_2^2 + \dots + \frac{1}{2} k_n^2 d_n y_n^2$ 。由于这里

$k_1, k_2, \dots, k_r$ 可以取任意不为零的常数，上式表明二次型 $f(x) = X^T A X$ 的标准形的确有无穷多个。

虽然二次型的标准形不唯一。但由于 P 满秩， $P^T A P$ 与 A 的秩总相同。即二次型的标准形中系数不为零的项数是由 A 唯一确定的，且恰好等于 A 的秩 $r(A) = r$ 。设二次型的秩为 r ($0 < r < n$)。其标准形为

$f(x) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_r y_r^2$ ，不妨设 $d_1, d_2, \dots, d_p$ 为正值，其余 $r-p$ 个系数 $d_{p+1}, \dots, d_r$ 为负值。记 $(0 \dots p \dots r)$ 。则标准形可写成

$$f(x) = |d_1| y_1^2 + \dots + |d_p| y_p^2 - |d_{p+1}| y_{p+1}^2 - \dots - |d_r| y_r^2.$$

取 $M = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_p}}, \frac{1}{\sqrt{|d_{p+1}|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|d_r|}}, 1, \dots, 1 \right)$ ，并令 $C = P M$ 。

注：标准形不唯一

显然 C 满秩，且有 $C^T A C = \text{diag} (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ 。若记 $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$

则二次型 $f(x) = X^T A X$ ，经满秩线性变换 $X = C Z$ 得到标准形

$f = z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$ 。这种形式的标准形成为二次型的规范型。下面证规范型唯一。

定理6.2.2 (惯性定理) 任何 n 元实二次型 $f(x) = X^T A X$ 都存在满秩线性变换化成规范形，且它的规范型是唯一的。

证：证唯一性。设 $f(x) = X^T A X$ 经满秩线性变换 $X = P Y$ 化成规范型

$$f = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2$$

设另一个满秩线性变换 $X = C Z$ 化成规范型

$$f = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2$$