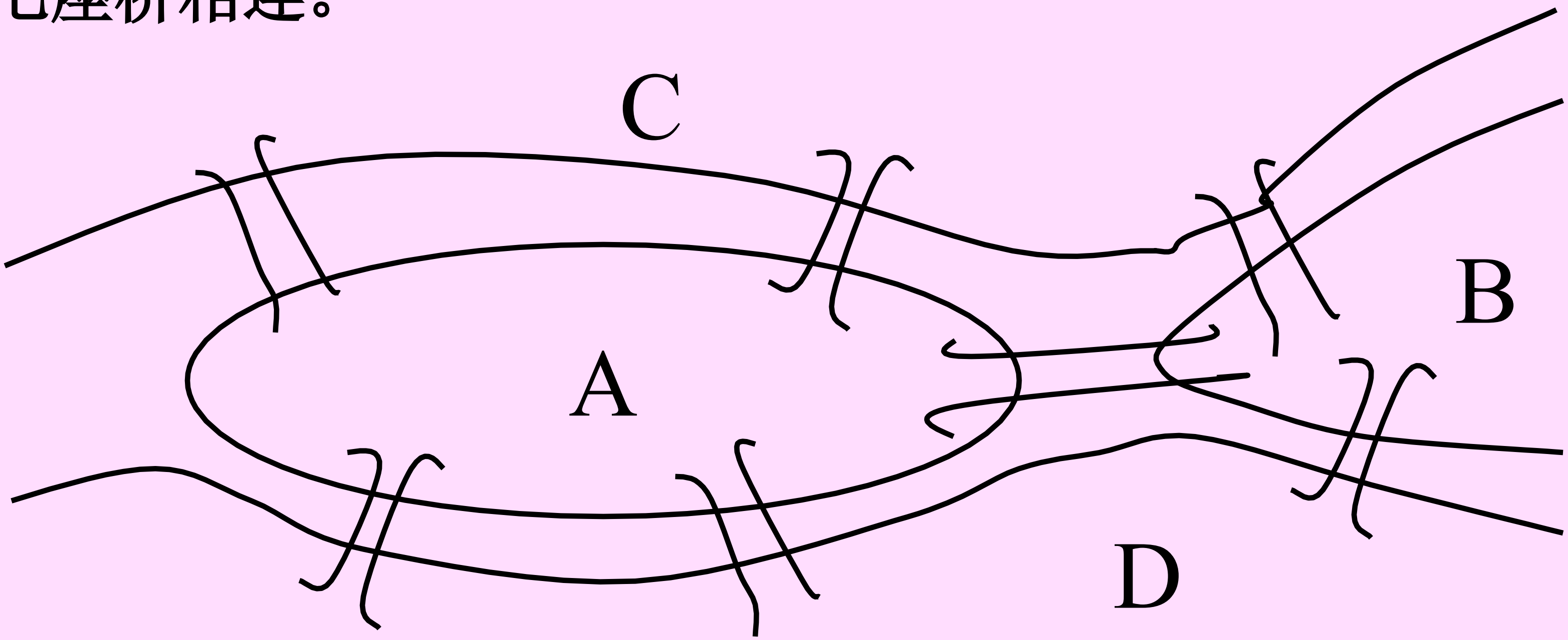
第7章　图

图论起源

公元十八世纪有这样一个问题：在东普鲁士有个哥尼斯堡城（ konigsberg，后属于苏联立陶宛苏维埃社会主义共和国，现名为加里宁格勒；现属于立陶宛共和国）。哥尼斯堡城位于pregel河畔，河中有两个岛，城市中的各个部分由七座桥相连。

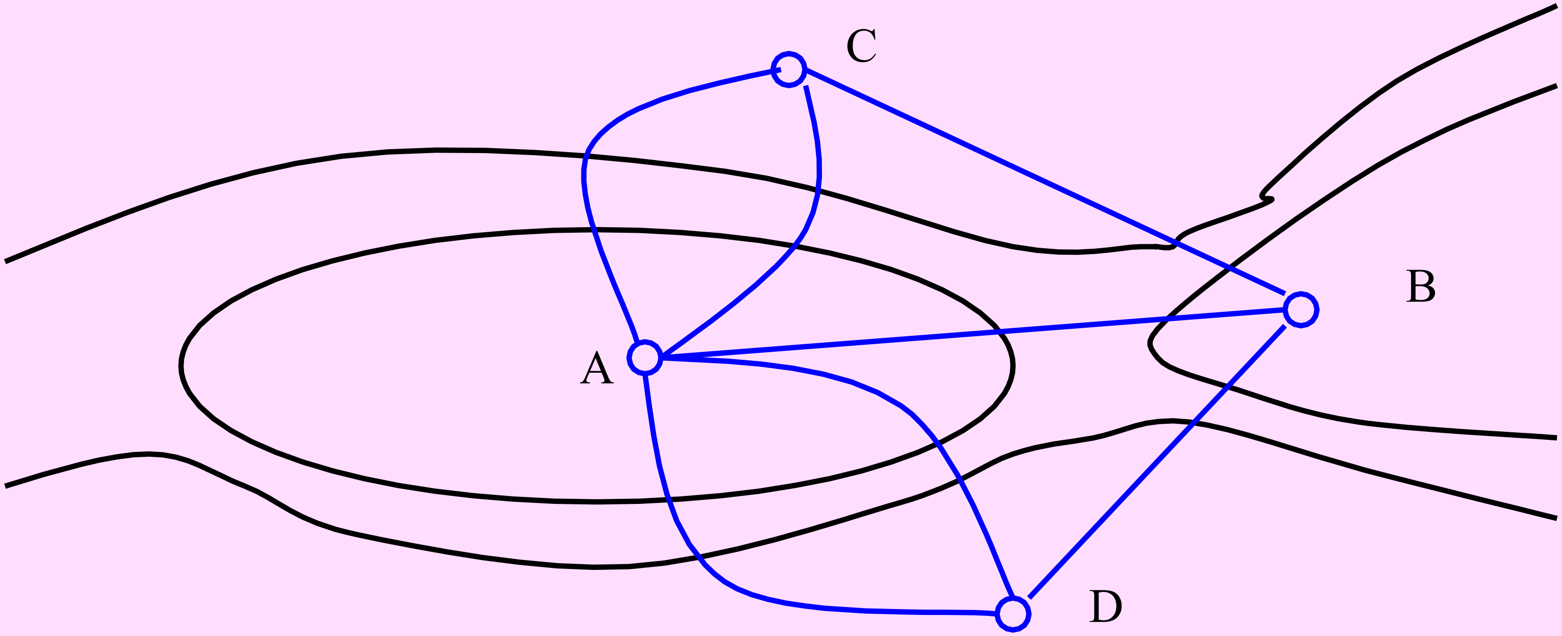


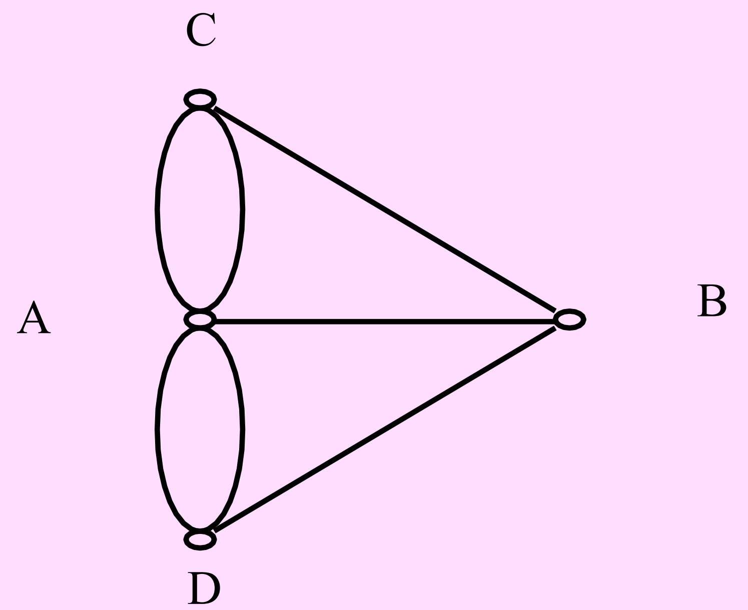
当时，城中的居民热衷于这样一个问题，从四块陆地的任一块出发，怎样才能做到经过每座桥一次且仅一次，然后回到出发点。问题看来并不复杂，但当地的居民和游人做了不少的尝试，却都没有取得成功。

最早引入图论处理的问题就是哥尼斯堡七桥问题。

1736年，瑞士数学家 L.Eluer （欧拉）在他发表的“哥尼斯堡七座桥”的著名文章中阐述了解决这个问题的观点，从而被誉为图论之父。

Euler将四块陆地表示成四个结点，凡陆地间有桥相连的，便在两点间连一条边。





此时，哥尼斯堡七桥问题归结为：

从A，B，C，D 任一点出发，通过每条边一次且仅一次而返回出发点的回通路是否存在？

欧拉断言这样的回通路是不存在的。

理由是：

从图中的任一点出发，为了要回到原来的出发点，要求与每个点相关联的边数均为偶数。

这样才能保证从一条边进入某点后，再从另一条边出去，从一个点的不同的两条边一进一出才能回到出发点。

而图中的A，B，C，D全是与奇数条边相连，由此可知所要求的回通路是不可能存在的。

第7章 图

- 7.1 图的基本概念
- 7.2 通路与回路、连通的概念
- 7.3 图的表示
- 7.4 图的运算

7.1 图的基本概念

- 7.1.1 无向图和有向图
- 7.1.2 度的概念
- 7.1.3 图的分类
- 7.1.4 子图与补图
- 7.1.5 图的同构

7.1.1 无向图和有向图

无向图

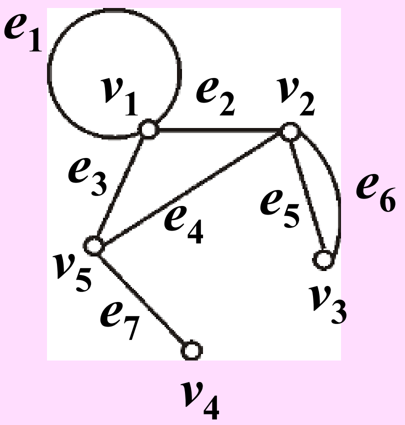
定义7.1.1 一个无向图可以表示为G =（V，E），其中V是非空有限结点集，称V中的元素为结点或顶点；E是边集，其中的元素是由V中的元素组成的无序对，称E中的元素为边。

若（v，w）是无序对，则（v，w）=（w，v）。

例如, $G=<V,E>$如图所示,

其中$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$

$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$



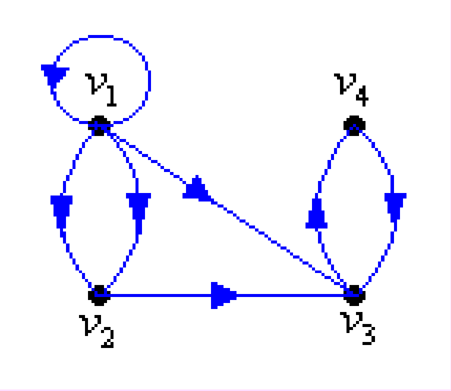
有向图

定义7.1.2 **一个有向图可以表示为D=（V，E），其中V是非空有限结点集，称V中的元素为结点或顶点；E是有向边集，E中的元素是由V中的元素组成的有序对，称E中的元素为有向边。**

有向图D=（V，E）。结点集V=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，

有向边集E=$\{<v_1, v_1>, <v_1, v_2>, <v_1, v_2>, <v_1, v_3>, <v_2, v_3>, <v_3, v_4>, <v_4, v_3>\}$。

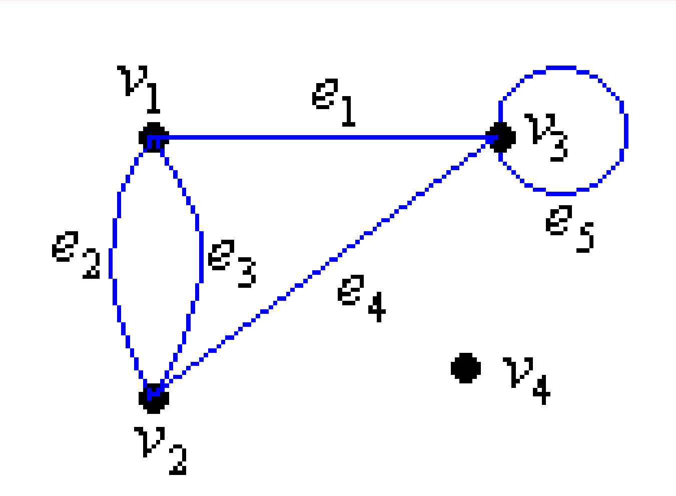
在有向图中，$<b, a> \neq <a, b>$



无向图

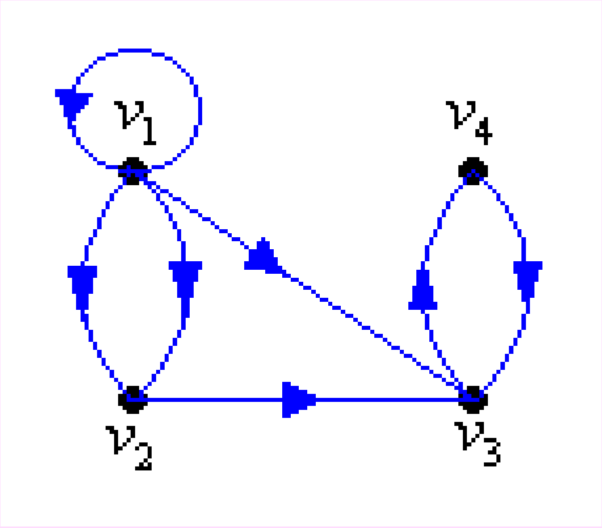
- **定义7.1.3** **如果关联一对结点的边多于一条，则称这些边为平行边。如果有边关联于一对结点，则称这对结点是邻接的。一条边的两个端点如果关联于同一个结点，则称为环，和任何边都不关联的点称为孤立点。**

边e_2和e_3是平行边，边e_1关联结点v_1和v_3，则称v_1和v_3是邻接的，边e_5=（v_3，v_3）是环，v_4是孤立点。



有向图

- 如果关联一对结点的方向相同的有向边多于一条，则称这些有向边为多重有向边或平行边。如关联于结点v_1和v_2的两条有向边是平行边，而关联于结点v_3和v_4的两条有向边方向相反，不是平行边。（v_1，v_1）称为环。对于有向边（v_2，v_3），称v_2为起点，v_3为终点，v_2和v_3是邻接的。



- n 阶图: n个顶点的图
- 零图: E=∅的图
- 平凡图: 1 阶零图
- 在图的定义中规定结点集合V为非空集，但在运算中可能产生结点集为空集的运算结果，因此规定结点集为空集的图为空图，记为∅

7.1.2 度的概念

定义7.1.6 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $v\in V$, v所关联的边数称为v的度数，简称度，记作$d(v)$。

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

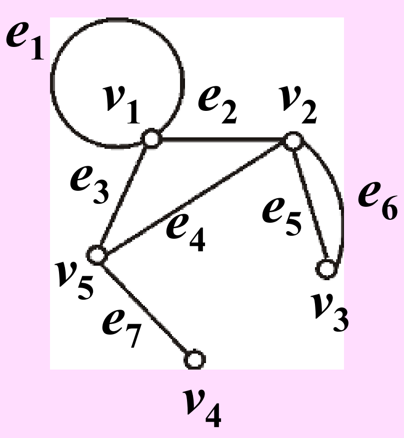
G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

G的最小度$\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

例如 $d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

v_4是悬挂顶点, e_7是悬挂边, e_1是环



顶点的度数(续)

定义7.1.7 设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$, 以v为起点所关联的边数称为v的出度，记作$d^+(v)$；以v为终点所关联的边数称为v的入度，记作$d^-(v)$。v的总度数(度) $d(v)$是v的出度和入度之和：

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

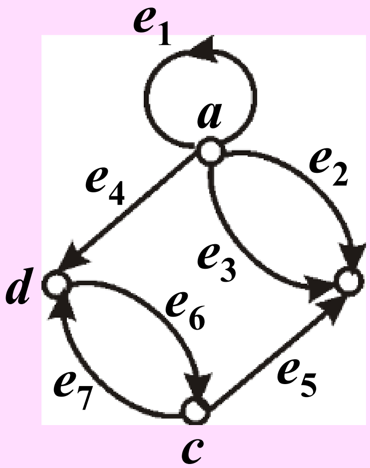
$\Delta^+(D), \delta^+(D), \Delta^-(D), \delta^-(D), \Delta(D), \delta(D)$

悬挂顶点, 悬挂边

例如 $d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$

$d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$

$\Delta^+=4, \delta^+=0, \Delta^-=3, \delta^-=1, \Delta=5, \delta=3$



握手定理

定理7.1.1 设图G=(V, E)为无向图或有向图，G有n个结点$v_1, v_2, \ldots, v_n$，e条边(无向或有向), 则图G中所有结点的度数之和为边数的两倍，即

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

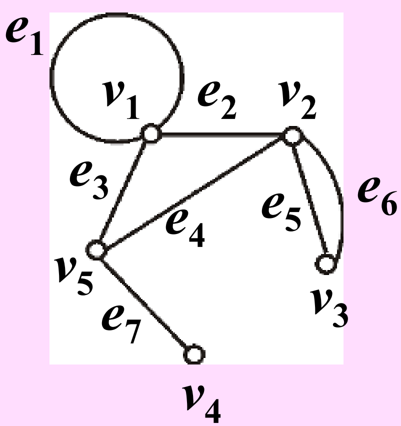
证 图中每条边(包括环)均有两个端点, 所以在计算各顶点度数之和时, 每条边均提供2度, m条边共提供$2m$度.

推论 任何图(无向图和有向图)中，度数为奇数的结点的个数为偶数。

定理7.1.2 **在有向图中，所有结点的入度之和与所有结点的出度之和相等，都等于图中的有向边数。**

证 在有向图中，每条有向边均有一个起点和一个终点。于是在计算图中各结点的出度之和与各结点的入度之和时，每条有向边各提供一个出度和一个入度。当然e条有向边共提供e个出度和e个入度。因此所有结点的入度之和与所有结点的出度之和相等，都等于图中的有向边数e。

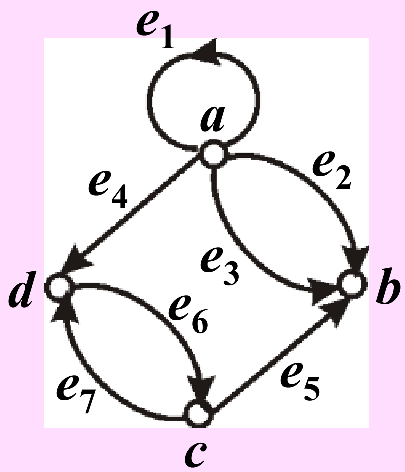
图的度数列



设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列:4,4,2,1,3



设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

如右图度数列:5,3,3,3

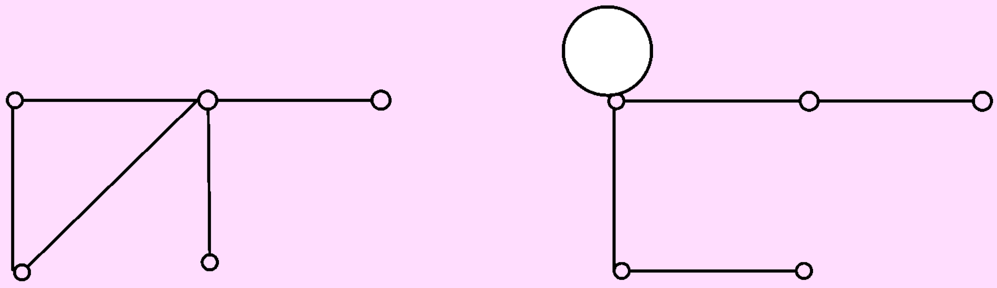
出度列:4,0,2,1

入度列:1,3,1,2

例1 **自然数序列(3，3，2，2，1)，(4，2，2，1，1)能作为图的结点的度数序列吗？为什么？**

解　在(3，3，2，2，1)中各个数之和为奇数，由握手定理可知，(3，3，2，2，1)不能作为图的结点的度数序列。

(4，2，2，1，1)能作为图的结点的度数序列，下图中的两个图都是以（4,2,2,1,1）为结点度数序列。



实例

例2 已知图G有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问G至少有多少个顶点?

解 设G有n个顶点. 由握手定理,

$$4\times3+2\times(n-4)\geq 2\times10$$

解得 $n\geq 8$

例3 已知5阶有向图的度数列和出度列分别为3,3,2,3,3和1,2,1,2,1, 求它的入度列

解 2,1,1,1,2