

2025 届北京市顺义区、通州区高三第一次调研测试数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -1 < x < 2\}$, $N = \{x | x(x+3) \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $[-3, 2)$ B. $(-3, 2)$ C. $(-1, 0]$ D. $(-1, 0)$
2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, $\vec{AE} = 2\vec{EB}$, $|\vec{AB}| = \lambda |\vec{AC}|$, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9\vec{AO} \cdot \vec{EC}$, 则实数 $\lambda =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
3. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x^2 + 2ex - a$ (其中 e 为自然对数的底数) 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $\left(-\infty, e^2 + \frac{1}{e}\right]$ B. $\left(-\infty, e^2 + \frac{1}{e}\right)$
 C. $\left[e^2 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $\left(e^2 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$
4. 小张家订了一份报纸, 送报人可能在早上 6:30-7:30 之间把报送到小张家, 小张离开家去工作的时间在早上 7:00-8:00 之间. 用 A 表示事件: “小张在离开家前能得到报纸”, 设送报人到达的时间为 x , 小张离开家的时间为 y , (x, y) 看成平面中的点, 则用几何概型的公式得到事件 A 的概率 $P(A)$ 等于 ()
 A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{8}$
5. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍. 其中记载有求“囷盖”的术: “置如其周, 令相承也. 又以高乘之, 三十六成一”. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h , 计算其体积 $V \approx \frac{1}{36} L^2 h$ 的近似公式. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率近似取为 3. 那么近似公式 $V \approx \frac{3}{112} L^2 h$ 相当于将圆锥体积公式中的圆周率近似取为 ()
 A. $\frac{22}{7}$ B. $\frac{157}{50}$ C. $\frac{28}{9}$ D. $\frac{337}{115}$
6. 已知点 F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的右焦点, 直线 $y = kx$ 与双曲线交于 A, B 两点, 若 $\angle AF_2 B = \frac{2\pi}{3}$, 则

$\triangle VAF_2B$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

7. 已知 $y = \log_2(x^2 - 2x + 17)$ 的值域为 $[m, +\infty)$, 当正数 a, b 满足 $\frac{2}{3a+b} + \frac{1}{a+2b} = m$ 时, 则 $7a+4b$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. 5 C. $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$ D. 9

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$, 则实数 ω 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ C. $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

10. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 2, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 且三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心 O 恰好是 CD 中点, 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{52\pi}{3}$ B. $\frac{40\pi}{3}$ C. $\frac{25\pi}{3}$ D. 24π

11. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | 3^x < 1\}$, 则

- A. $A \cap B = \{x | x < 0\}$ B. $A \cup B = R$
C. $A \cup B = \{x | x > 1\}$ D. $A \cap B = \emptyset$

12. 若复数 z 满足 $(1-i)z = -1+2i$, 则 $|\bar{z}| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 定义 $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$, 已知 $f(x) = e^x - \frac{1}{m}$, $g(x) = (x-1)(mx + 2m^2 - m - 1)$, 若

$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 恰好有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

14. 已知 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, 求 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ _____.

15. 已知 x, y 均为非负实数, 且 $x + y \leq 1$, 则 $4x^2 + 4y^2 + (1 - x - y)^2$ 的取值范围为 _____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{2}{3}x$, 则 $a =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$.

(1) 已知关于 x 的不等式 $f(x) < a$ 有实数解, 求 a 的取值范围;

(2) 求不等式 $f(x) \geq x^2 - 2x$ 的解集.

18. (12 分) 本小题满分 14 分)

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系, 直线 l 的参数

方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1 \end{cases}$ (t 为参数), 求直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \cos x$ ($a \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(1) 当 $a = 1$ 时, 令 $h(x) = f'(x) - x + \ln x$, $h'(x)$ 为 $h(x)$ 的导数. 证明: $h'(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一的极小值点;

(2) 已知函数 $y = f(2x) - \frac{2}{3}x^4$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: 9x^2 + y^2 = m^2 (m > 0)$, 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B , 线段 AB 的中点为 M .

(I) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

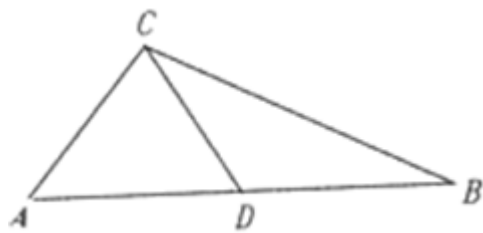
(II) 若 l 过点 $\left(\frac{m}{3}, m\right)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率, 若不能, 说明理由.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $c = 4\sqrt{2}$, $\sin \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 若 $a = 1$, 求 $\sin A$;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

22. (10 分) 如图: 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{10}$, $c = 4$, $\cos C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(1) 求角 A ;

(2) 设 D 为 AB 的中点, 求中线 CD 的长.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

先化简 $N = \{x | x(x+3) \leq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 0\}$, 再根据 $M = \{x | -1 < x < 2\}$, 求两集合的交集.

【详解】

因为 $N = \{x | x(x+3) \leq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 0\}$,

又因为 $M = \{x | -1 < x < 2\}$,

所以 $M \cap N = \{x | -1 < x \leq 0\}$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题.

2、D

【解析】

将 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{EC}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 表示, 再代入 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$ 中计算即可.

【详解】

由 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心,

所以 $\vec{AO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC})$, 又 $\vec{AE} = 2\vec{EB}$,

所以 $\vec{EC} = \vec{AC} - \vec{AE} = \vec{AC} - \frac{2}{3} \vec{AB}$, $9\vec{AO} \cdot \vec{EC} = 3(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \frac{2}{3} \vec{AB})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AC} - 2\vec{AB}^2 + 3\vec{AC}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$, 所以 $2\vec{AB}^2 = 3\vec{AC}^2$, $\lambda = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选: D

【点睛】

本题考查平面向量基本定理的应用, 涉及到向量的线性运算, 是一道中档题.

3、B

【解析】

求出导函数 $f'(x)$, 确定函数的单调性, 确定函数的最值, 根据零点存在定理可确定参数范围.

【详解】

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 2(x - e)$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减, $\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 只有一个极大值也是最大值 $f(e) = \frac{1}{e} + e^2 - a$, 显然 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时,

$f(x) \rightarrow -\infty$,

因此要使函数有两个零点, 则 $f(e) = \frac{1}{e} + e^2 - a > 0$, $\therefore a < e^2 + \frac{1}{e}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数的零点, 考查用导数研究函数的最值, 根据零点存在定理确定参数范围.

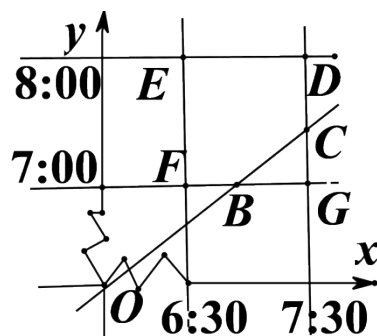
4、D

【解析】

这是几何概型, 画出图形, 利用面积比即可求解.

【详解】

解：事件 A 发生，需满足 $x \leq y$ ，即事件 A 应位于五边形 $BCDEF$ 内，作图如下：



$$P(A) = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{7}{8}$$

故选：D

【点睛】

考查几何概型，是基础题.

5、C

【解析】

将圆锥的体积用两种方式表达，即 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{3}{112} (2\pi r)^2 h$ ，解出 π 即可.

【详解】

设圆锥底面圆的半径为 r ，则 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ，又 $V \approx \frac{3}{112} L^2 h = \frac{3}{112} (2\pi r)^2 h$ ，

故 $\frac{3}{112} (2\pi r)^2 h \approx \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ，所以， $\pi \approx \frac{112}{36} = \frac{28}{9}$.

故选：C.

【点睛】

本题利用古代数学问题考查圆锥体积计算的实际应用，考查学生的运算求解能力、创新能力.

6、D

【解析】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，连接 AF_1, BF_1 ，由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$ ，得 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \frac{\pi}{3}$ ，求出 r_1r_2 的值，即得解.

【详解】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，连接 AF_1, BF_1 ，

由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = S_{\triangle AF_2B}$ ， $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$.

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$, 则 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \frac{\pi}{3} = r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2$,

又 $|r_1 - r_2| = 2a$. 故 $r_1r_2 = 4b^2 = 16$,

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查双曲线的简单几何性质, 考查余弦定理解三角形和三角形面积的计算, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7、A

【解析】

利用 $y = \log_2(x^2 - 2x + 17)$ 的值域为 $[m, +\infty)$, 求出 m , 再变形, 利用 1 的代换, 即可求出 $7a + 4b$ 的最小值.

【详解】

解: $\because y = \log_2(x^2 - 2x + 17) = \log_2[(x-1)^2 + 16]$ 的值域为 $[m, +\infty)$,

$\therefore m = 4$,

$\therefore \frac{4}{6a+2b} + \frac{1}{a+2b} = 4$,

$\therefore 7a + 4b = \frac{1}{4}[(6a+2b) + (a+2b)] \left(\frac{4}{6a+2b} + \frac{1}{a+2b} \right)$

$= \frac{1}{4} \left[5 + \frac{6a+2b}{a+2b} + \frac{4(a+2b)}{6a+2b} \right] \geq \frac{1}{4} \times (5+4) = \frac{9}{4}$,

当且仅当 $\frac{6a+2b}{a+2b} = \frac{4(a+2b)}{6a+2b}$ 时取等号,

$\therefore 7a + 4b$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了对数复合函数的值域运用, 同时也考查了基本不等式中“1 的运用”, 属于中档题.

8、B

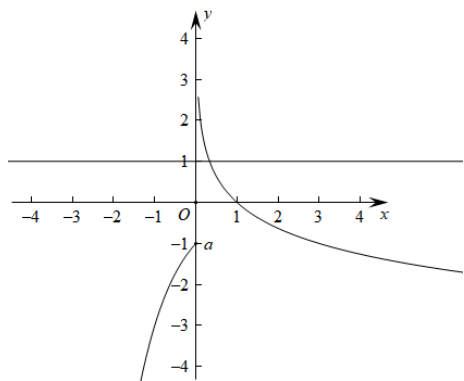
【解析】

利用换元法设 $t = f(x)$, 则等价于 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根, 分 $a < 0, a = 0, a > 0$ 三种情况进行讨论, 结合函数的图象, 求出 a 的取值范围.

【详解】

解：设 $t = f(x)$ ，则 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根.

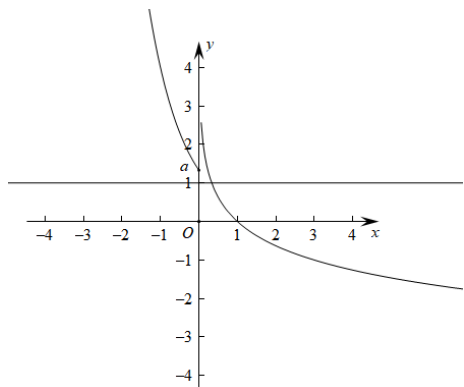
当 $a < 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$ ，由 $f(t) = 0$ 即 $\log_{\frac{1}{3}} t = 0$ ，解得 $t = 1$ ，



结合图象可知，此时当 $t = 1$ 时，得 $f(x) = 1$ ，则 $x = \frac{1}{3}$ 是唯一解，满足题意；

当 $a = 0$ 时，此时当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ ，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当 $a > 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \in [a, +\infty)$ ，此时 $f(x)$ 最小值为 a ，



结合图象可知，要使得关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根，此时 $a > 1$ 。

综上所述： $a < 0$ 或 $a > 1$ 。

故选:A.

【点睛】

本题考查了函数方程根的个数的应用.利用换元法，数形结合是解决本题的关键.

9、A

【解析】

将 $f(x)$ 整理为 $\sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据 x 的范围可求得 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3}\right]$ ；根据 $f(0) = \frac{3}{2}$ ，结合 $f(x)$ 的值域和 $\sin x$ 的图象，可知

$\frac{\pi}{2} \leq \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$ ，解不等式求得结果.

【详解】

$$f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x = \sin \omega x \cos \frac{\pi}{6} + \cos \omega x \sin \frac{\pi}{6} + \cos \omega x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{3}{2} \cos \omega x = \sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{当 } x \in [0, \pi] \text{ 时, } \omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\text{又 } f(0) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上的值域为 } \left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right] \quad \therefore \frac{\pi}{2} \leq \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{解得: } \omega \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$$

本题正确选项: A

【点睛】

本题考查利用正弦型函数的值域求解参数范围的问题，关键是能够结合正弦型函数的图象求得角的范围的上下限，从而得到关于参数的不等式.

10、A

【解析】

根据 O 是 CD 中点这一条件，将棱锥的高转化为球心到平面的距离，即可用勾股定理求解.

【详解】

解：设 D 点到平面 ABC 的距离为 h ，因为 O 是 CD 中点，

所以 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{h}{2}$ ，

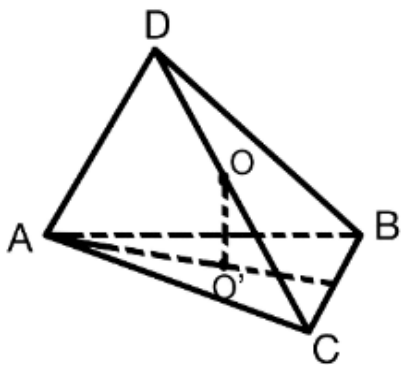
$$\text{三棱锥 } D-ABC \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \cdot h = 2, \text{ 解得 } h = 2\sqrt{3},$$

$$\text{作 } OO' \perp \text{平面 } ABC, \text{ 垂足 } O' \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的外心, 所以 } CO' = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 且 } OO' = \frac{h}{2} = \sqrt{3},$$

所以在 $Rt\triangle CO'O$ 中， $OC = \sqrt{CO'^2 + O'O^2} = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ，此为球的半径，

$$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{13}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

故选: A.



【点睛】

本题考查球的表面积，考查点到平面的距离，属于中档题．

11、 A

【解析】

$$\because \text{集合 } B = \{x \mid 3^x < 1\}$$

$$\therefore B = \{x \mid x < 0\}$$

$$\because \text{集合 } A = \{x \mid x < 1\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x \mid x < 0\}, \quad A \cup B = \{x \mid x < 1\}$$

故选 A

12、 C

【解析】

把已知等式变形，利用复数代数形式的除法运算化简，再由复数模的计算公式求解．

【详解】

$$\text{解：由 } (1-i)z = -1+2i, \text{ 得 } z = \frac{-1+2i}{1-i} = \frac{(-1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\therefore |\bar{z}| = |z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数模的求法，是基础题．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

$$13、 \left(\frac{1}{e}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/718043004103007032>