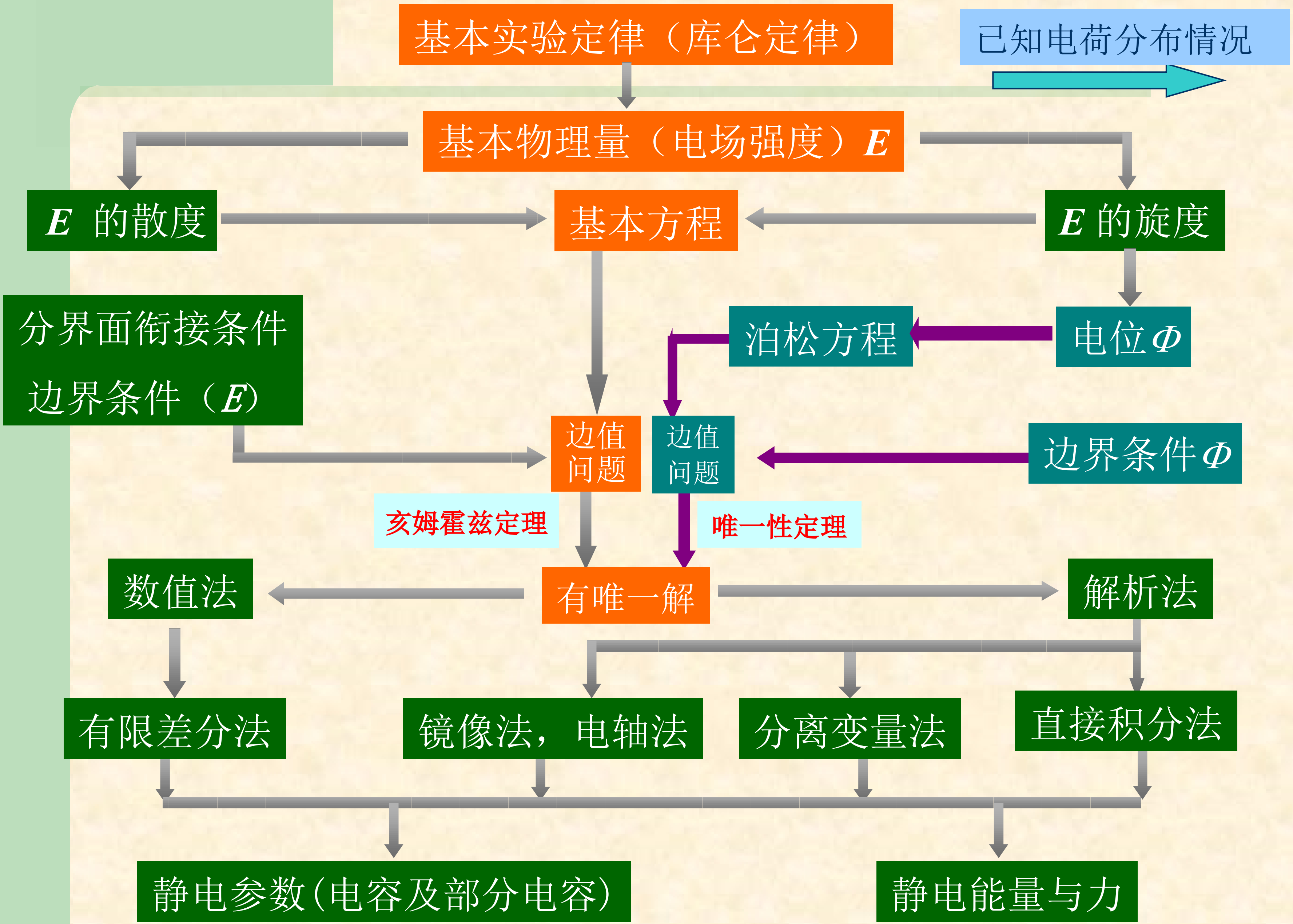
第 一 章

静 电 场


基本实验定律（库仑定律）
已知电荷分布情况
基本物理量（电场强度）E
E 的散度
基本方程
E 的旋度
分界面衔接条件
边界条件（E）
泊松方程
电位 Φ
边值问题
边值问题
边界条件 Φ
亥姆霍兹定理
唯一性定理
数值法
有唯一解
解析法
有限差分法
镜像法，电轴法
分离变量法
直接积分法
静电参数(电容及部分电容)
静电能量与力

静电场知识结构图

已知电荷分布情况求*E*

- 通过*E* 的定义直接积分求解
- 高斯定理
- *E* 的旋度 → 电位*Φ*

第一章 静电场

§ 1.1 电场强度，电位 → 实验基础与理论基础

§1.2 高斯定律
§1.3 静电场的基本方程，
分界面上的衔接条件 → 静电场的基本方程

§1.4 静电场边值问题，唯一性定理
§1.5 分离变量法
§1.6 有限差分法
§1.7 镜像法和电轴法
基本方程的解

§1.8 电容和部分电容
§1.9 静电能量与力 → 应用

静电场

库仑定律→电场强度*E*→电位的引入

↓ ↓

*E*线 等

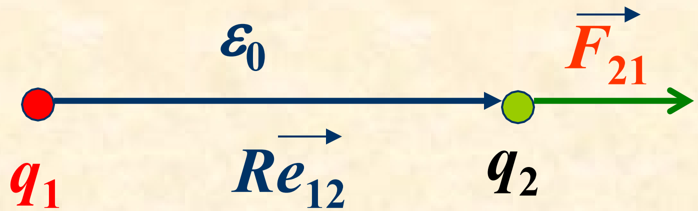
位面

§1.1 电场强度，电位

1.1.1 电场强度

一、库仑定律：（实验定律）

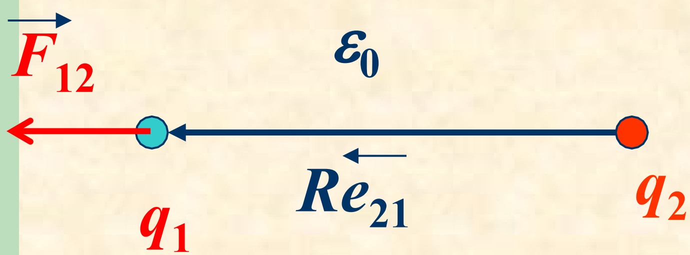
在无限大真空中，当两个静止的小带电体(点电荷)之间的距离远远大于它们本身的几何尺寸时，该两带电体之间的作用力为：



$$\vec{F}_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_{12}}{R^2}$$

果因

ε_0：真空的介电常数，$10^{-9}/(36\pi)$ F/m



$$\vec{F}_{12} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_{21}}{R^2}$$

果因

1.1.1 电场强度

二、电场：

电荷周围存在的一种特殊的物质。

一般属性： 有动量、质量、能量等

特殊性： 带电体放入电场中要受力的作用。

静电场:

相对观察者静止，且量值不随时间而变的电荷所产生的电场。

1.1.1 电场强度

三、电场强度：

试体q_t：电量少，体积小（点电荷）

1.定义： 单位正电荷在该点所受的电场力。

$$\vec{E} \overset{def}{=} \lim_{q_t \to 0} \frac{\vec{F}}{q_t} \qquad \text{N/C} \quad \text{V/m}$$

(1) 大小　电场中某点处一个单何正电荷受到的作用力。

(2) 方向　与带正电荷的试验电荷的受力方向一致。

思考　为什么定义式中$q_t \to 0$？

（1）是为了在引入试验电荷时不致影响场源电荷的状态(亦即不影响电场本身的分布；

（2）表征电场特性的基本场矢量，仅与电场有关而与试体的电荷无关。

1.1.1 电场强度

三、电场强度：

$$\vec{E} \overset{def}{=} \lim_{q_t \to 0} \frac{\vec{F}}{q_t}$$

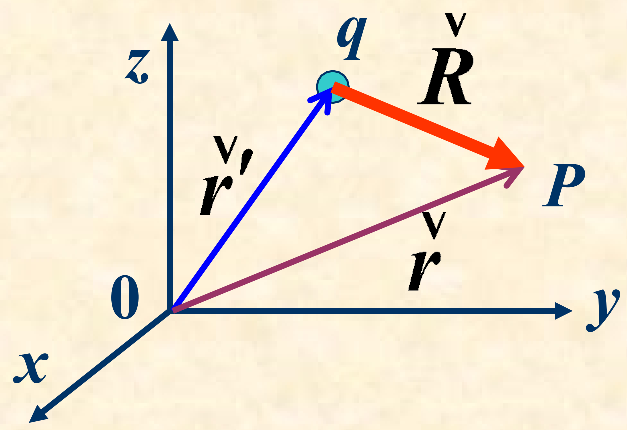
2.计算公式：

点电荷q在真空中点P产生的电场强度：

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_R}{R^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



场点位置：$\vec{r}$　　源点位置：$\vec{r}'$

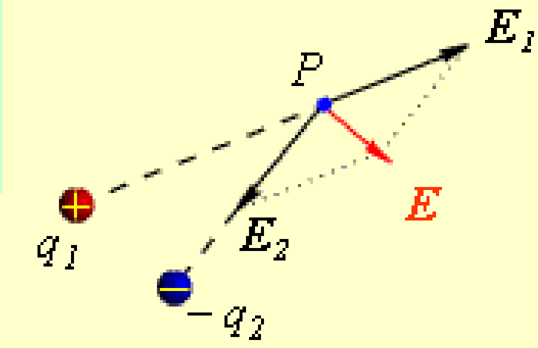
特点

1. $\vec{E} \propto \frac{\vec{e}_R}{R^2}$, 呈球对称辐射状分布，
2. $E \propto q$, 根据这种线性关系，可利用叠加原理来计算各种电荷分布的电场：

1.1.2 用叠加积分法计算电场强度E

（1）N个点电荷：

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\vec{e}_{R_i}$$



（2）连续分布的电荷：

$$d\vec{E}_P=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{e}_R}{R^2}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

(a)体电荷分布

$$\rho(\vec{r}')=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{q}{\Delta V}=\frac{dq}{dV}\quad\Rightarrow\quad dq=\rho(\vec{r}')\cdot dV$$

(b)面电荷分布

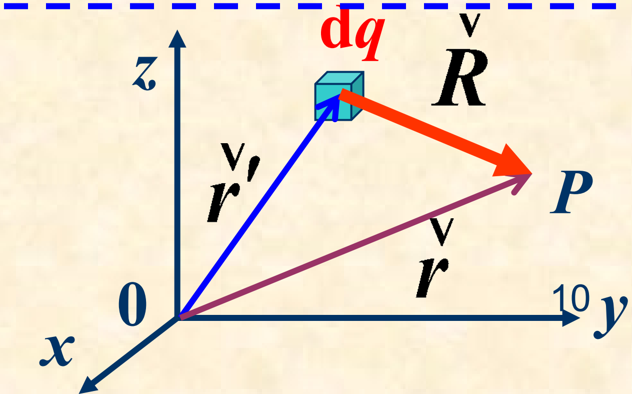
$$\sigma(\vec{r}')=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{q}{\Delta S}=\frac{dq}{dS}\quad\Rightarrow\quad dq=\sigma(\vec{r}')\cdot dS$$

(c)线电荷分布

$$\tau(\vec{r}')=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{q}{\Delta l}=\frac{dq}{dl}\quad\Rightarrow\quad dq=\tau(\vec{r}')\cdot dl$$

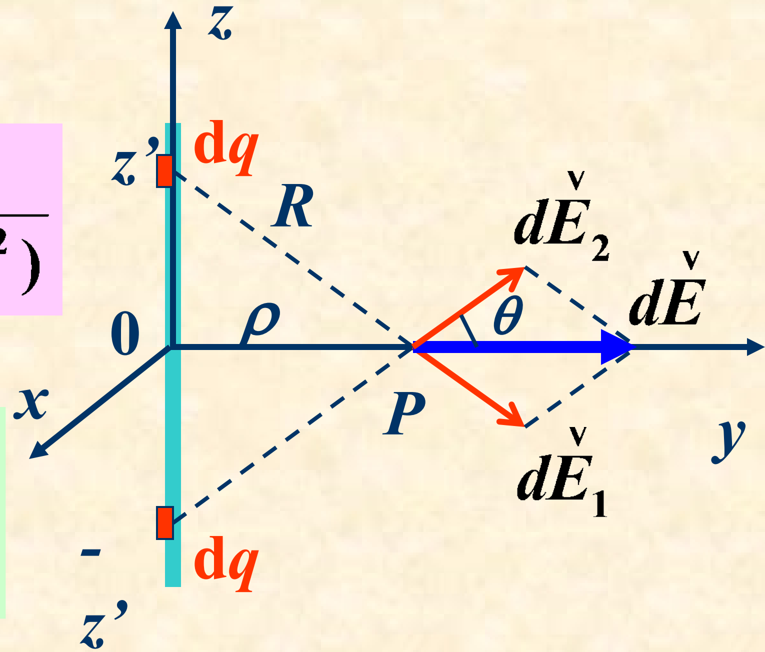
矢量积分

$$\vec{E}_P=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{e}_R}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{e}_R\,dq}{R^2}$$



电场强度例题

例一、带电体长$2L$，线电荷密度为τ，沿z轴分布，中心在原点。求在xoy平面上离它距离为ρ的点P的电场强度。



解：① $dq = \tau dz'$

② $$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_R}{R^2} = \frac{\tau dz'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_R}{(\rho^2 + z'^2)}$$

$$dE = 2dE_1\cos\theta$$

$$= 2 \times \frac{\tau dz'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)} \times \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

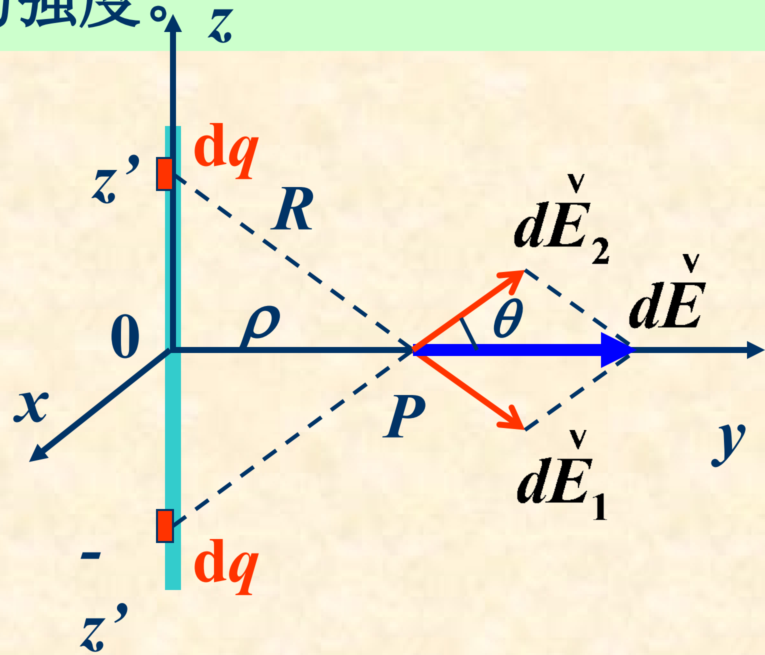
$$= \frac{\tau dz'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot (\rho^2 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

③ $$E = \int dE = \int_0^L \frac{\tau \cdot \rho \cdot (\rho^2 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}}{2\pi\varepsilon_0} dz' = \frac{\tau \cdot \rho}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^L (\rho^2 + z'^2)^{-\frac{3}{2}} dz'$$

$$= \frac{\tau\rho}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left. \frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right|_0^L = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho} \cdot \left. \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right|_0^L$$

电场强度例题

例一、带电体长2*L*，线电荷密度为*τ*，沿z轴分布，中心在原点。求在*xoy*平面上离它距离为*ρ*的点*P*的电场强度。



解：

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\cdot\frac{z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\Bigg|_0^L$$

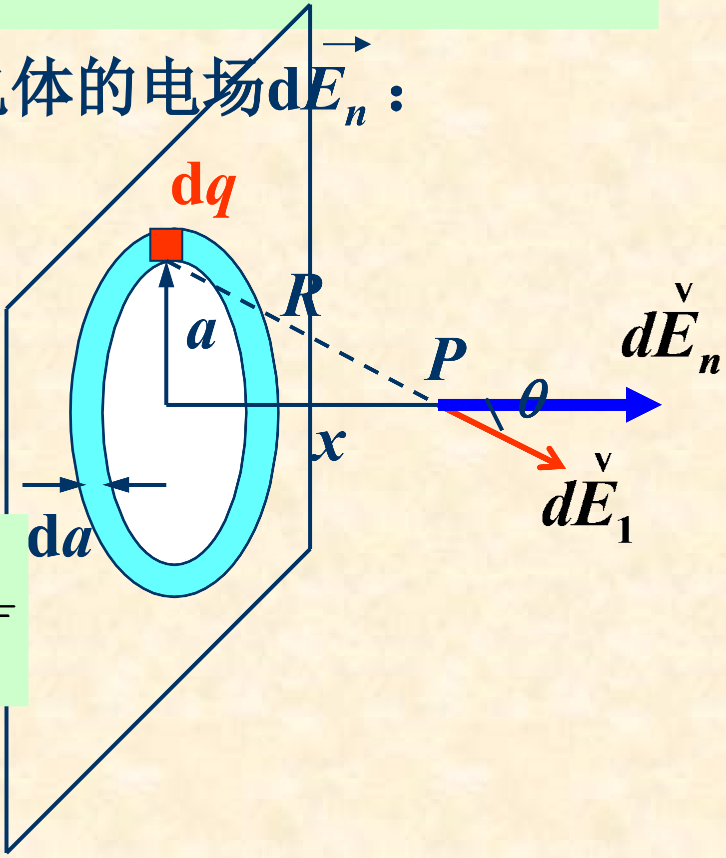
$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\frac{z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\Bigg|_0^L\vec{e}_\rho$$

$L\to\infty$:

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$$

电场强度例题

例二、面电荷密度为σ的均匀带电无限大平面。求离它距离为x的点P的电场强度。



解: 先求半径为a、宽度为da的环形带电体的电场$d\vec{E}_n$：

① $dq = \sigma \cdot a d\alpha \cdot da$

② $$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_R}{R^2} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_R}{a^2 + x^2}$$

$$dE_n = \int dE_1 \cos\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sigma a d\alpha da}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{\sigma a da}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

③ 再求无限大圆面带电体的电场:

$$E = \int dE_n = \int_0^{\infty} \frac{\sigma a da}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{a da}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

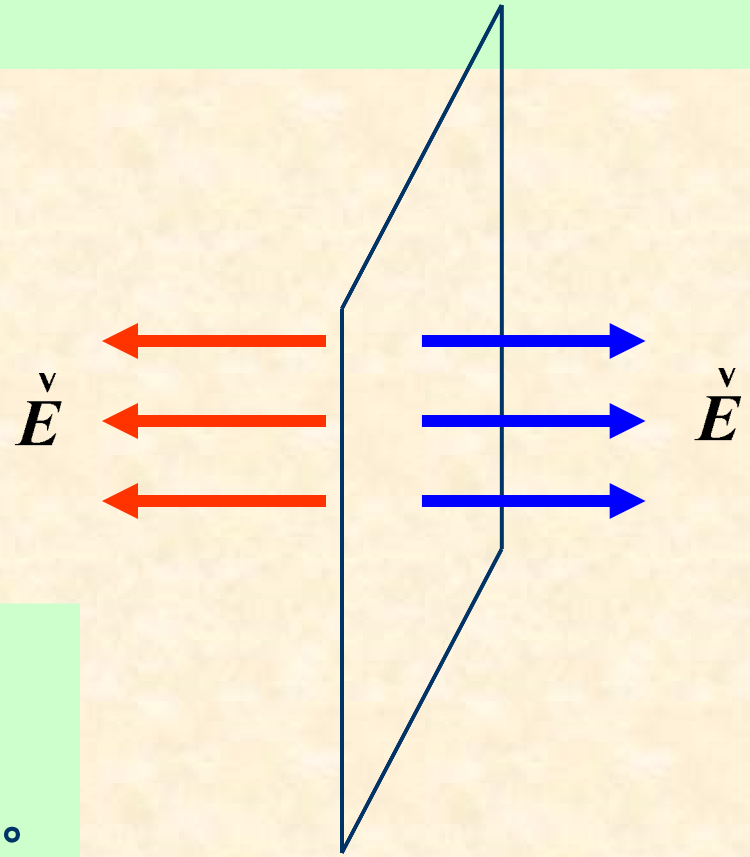
电场强度例题

例二、面电荷密度为σ的均匀带电无限大平面。求离它距离为x的点P的电场强度。

解:

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向：垂直于平面向外。



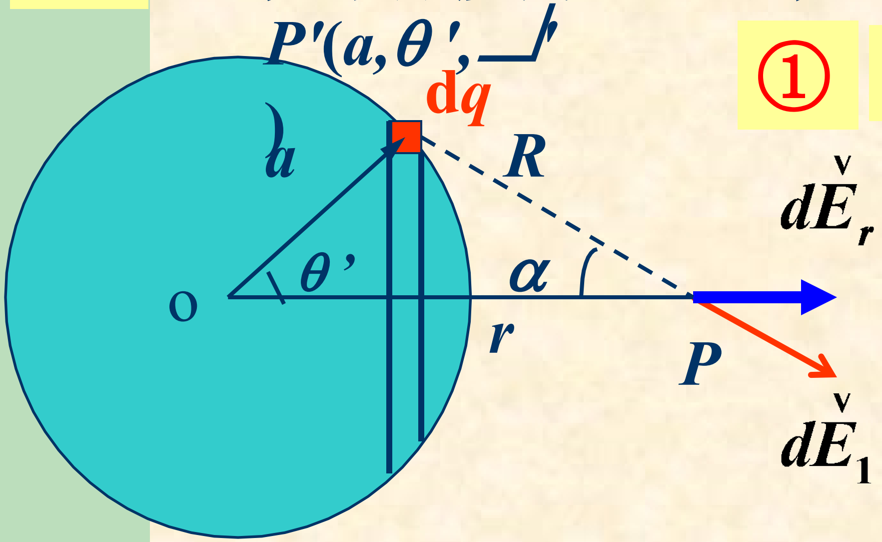
均匀带电的无限大平面两边的电场垂直于带电平面，场强与距离无关，为一恒值。

电场强度例题

例三、面电荷密度为σ的均匀带电球面，半径为a。求此球面电荷产生的电场。

参见P_{322}

解: 先求厚度为d θ'的带电圆台面的电场$d\vec{E}_r$:



① $dq = \sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi$

② $d\vec{E}_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\vec{e}_r}{R^2}$

$$dE_r = \int dE_1 \cos\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \cos\alpha$$

再求带电球面的电场:

③ $$E = \int dE_r = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sigma a^2 \cos\alpha \sin\theta'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} d\phi' d\theta'$$

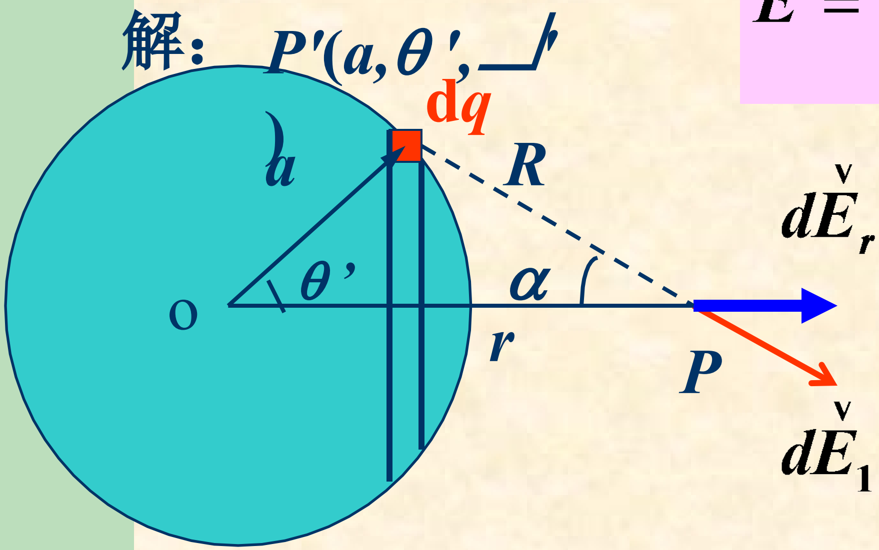
$$= \frac{\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\sin\theta'}{R^2} d\phi' d\theta'$$

电场强度例题

例三、面电荷密度为σ的均匀带电球面，半径为a。求此球面电荷产生的电场。

$$E=\frac{\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha\sin\theta'}{R^2}d\phi' d\theta'$$

解：



$\cos\theta' = (a^2+r^2-R^2)/2ar$

$\cos\alpha=(R^2+r^2-a^2)/2Rr$

$\sin\theta' d\theta' = -d(\cos\theta') = RdR/ra$

当场点在球面以外时：$\begin{cases}\theta'=0: & R=r-a;\\ \theta'=\pi: & R=r+a\end{cases}$

当场点在球面以内时：$\begin{cases}\theta'=0: & R=a-r;\\ \theta'=\pi: & R=r+a\end{cases}$

$$E=\frac{\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r-a}^{r+a}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2+r^2-a^2)\cdot R}{R^2\cdot 2Rr\cdot ra}d\phi' dR$$

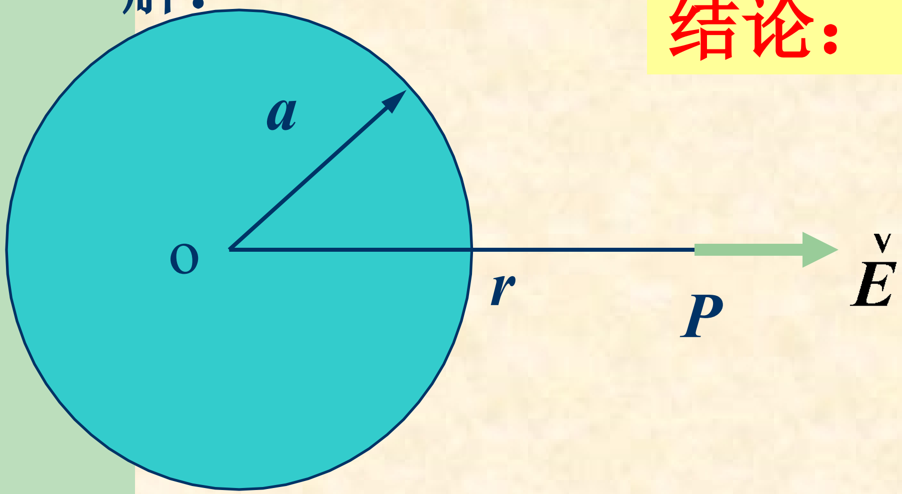
$$=\frac{\sigma a}{8\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\int_0^{2\pi}\int_{r-a}^{r+a}\frac{(R^2+r^2-a^2)}{R^2}dR\,d\phi'$$

$$=\frac{2\pi\sigma a}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{a-r}^{r+a}\frac{R^2+r^2-a^2}{R^2}dR = 0 \qquad = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

电场强度例题

例三、面电荷密度为σ的均匀带电球面，半径为a。求此球面电荷产生的电场。

解:



结论:

1. 当场点P在球面以外时:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

相当于把球面上的电荷集中到球心所形成的点电荷产生的电场。

2. 当场点P在球面以内时:

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

均匀带电球面内部的电场为0。

1.1.2 电位

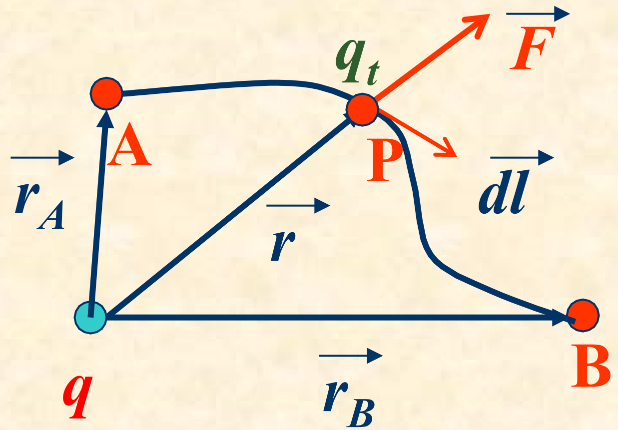
一、电场力作功的性质：

点电荷场强：$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

将一个试验电荷q_t沿某一路径从A点移到B点，电场力作功为：

$$W=\int_A^B q_t\vec{E}\bullet d\vec{l}=\frac{q_t q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B\frac{\vec{e}_r}{r^2}\bullet d\vec{l}$$

$$=\frac{q_t q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_t q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$



- 电场力作功与路径无关，只与起点、终点的位置有关；
- 在静电场中，沿闭合路径移动电荷，电场力作功为0。

$$\oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l}=0$$ ⇒ 静电场是守恒场（保守场）