2024 学年第一学期杭州北斗联盟期中联考

高二年级数学学科试题

考生须知：

1.本卷共 5 页满分 150 分，考试时间 120 分钟.

2.答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字.

3.所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效.

4.考试结束后，只需上交答题纸.

选择题部分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|2x^2-3x>0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\ln\left(x-1\right)<0\right.\right\}$ 则 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=$（　）

A. $\left(\frac{2}{3},2\right)$　　B. $\left[0,\frac{2}{3}\right)$　　C. $(0,2)$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】由一元二次不等式的解法，可求得集合 A，从而可求出 $\complement_{\mathbf{R}}A$，再根据对数函数的性质求出集合 B 中 x 的具体范围，即可求得 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B$.

【详解】因为 $A=\left\{x\left|2x^2-3x>0\right.\right\}=\{x\mid x<0,或x>\frac{3}{2}\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{xc\mid 0\le x\le\frac{3}{2}\}$，

对于集合 B：$\ln(x-1)<0=\ln 1$，所以 $\begin{cases}x-1>0\\x-1<1\end{cases}$，即 $1<x<2$，

$B=\left\{x\left|\ln\left(x-1\right)<0\right.\right\}=\{x\mid 1<x<2\}$，所以 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=\{x\mid 1<x\le\frac{3}{2}\}$.

故选：D.

2. 已知 i 是虚数单位，$3+5\mathrm{i}=\left(1+\mathrm{i}\right)z$，则 $\left|z+1\right|=$（　）

A. $5\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{37}$　　C. $\sqrt{26}$　　D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R})$，根据条件，利用复数的运算及复数相等的条件，得到 $a=4,b=1$，从而

$z=4+\mathrm{i}$，即可求解.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R})$，因为 $3+5\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})z$，得到 $3+5\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})=a-b+(a+b)\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}a-b=3\\a+b=5\end{cases}$，解得 $a=4,b=1$，得到 $z=4+\mathrm{i}$，

所以 $|z+1|=|5+\mathrm{i}|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$，

故选：C.

3. 已知向量 $\vec{a}=(4,m)$，$\vec{b}=(m-2,2)$，则“$m=4$”是“$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由 $m=4$，可得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，充分性成立；由 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，可得 $m=-2$ 或 $m=4$，必要性不成立，可得结论.

【详解】由 $m=4$，得 $\vec{a}=(4,4)$，$\vec{b}=(2,2)$，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，

所以“$m=4$”是“是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的充分条件；

由 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，可得 $m(m-2)=8$，解得 $m=-2$ 或 $m=4$，

“$m=4$”是“$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”成立的不必要条件，

故“$m=4$”是“$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的充分不必要条件.

故选：A.

4. 若函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x(\omega>0,x\in\mathbf{R})$，又 $f(x_1)=3$，$f(x_2)=-1$ 且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{3}{4}\pi$，则 ω 的值为（　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角恒等变换可得 $f(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，即可根据最大值和最小值求解

$T=2\left|x_1-x_2\right|=\frac{3}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}$得解.

【详解】$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x=\sqrt{3}\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x-1+1=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+1$

$=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,

由于$f\left(x\right)_{\max}=3, f\left(x\right)_{\min}=-1$,

结合$f\left(x_1\right)=3$，$f\left(x_2\right)=-1$，故x_1,x_2分别为$f\left(x\right)$的最大值点和最小值点,

由于$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\frac{3}{4}\pi$，故$T=2\left|x_1-x_2\right|=\frac{3}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}$,解得$\omega=\frac{2}{3}$.

故选；A

5. 下列说法错误的有（   ）

A. 若A与B相互独立，$P\left(A\right)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，则$P\left(A\overline{B}\right)=\frac{1}{9}$

B. 把红、橙、黄 3 张纸牌随机分给甲、乙、丙 3 人，每人分得 1 张，则事件“甲分得的不是红牌”与事件“乙分得的不是红牌”是互斥事件

C. 从装有 3 个红球，4 个白球的袋中任意摸出 3 个球，事件$A=$“至少有 2 个红球”，事件$B=$“都是白球”，则事件A与事件B是互斥事件

D. 甲乙两人投篮训练，甲每次投中的概率为$\frac{2}{3}$，乙每次投中的概率为$\frac{1}{2}$，甲乙两人投篮互不影响，则甲乙各投篮一次同时投中的概率为$\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据互斥事件、对立事件和的概念独立事件的乘法公式和概率一一判断即可

【详解】对于 A，若 A 与B相互独立，则 A 与$\overline{B}$与也相互独立,

$\therefore P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)P\left(\overline{B}\right)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$，故 A 正确；

对于 B，“甲分得的不是红牌”其中的一种情况是“甲分得黄牌，乙分得橙牌，丙分得红牌”，而“乙分得的不是红牌”也含有其中的一种情况是“甲分得黄牌，乙分得橙牌，丙分得红牌”这种情况，这两个事件不是互斥事件，故 B 错误；

对于 C，事件$A=$ “至少有 2 红球”包含“有 2 红球 1 个白球”及“有 3 个红球”这两种情况，与事件

$B=$“都是白球” 不可能同时发生，所以事件 A 与事件 B 是互斥事件，C 正确；

对于 D，由题意可知甲乙各投篮一次同时投中的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ ，故 D 正确.

故选：B.

6. 已知 M， N 是椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 上关于原点对称的两点， F 是椭圆 C 的右焦点，则 $|MF|^2+6|NF|$ 的取值范围为（）

A. $[36,54]$　　B. $[38,55]$

C. $[39,55]$　　D. $[39,56]$

【答案】C

【解析】

【分析】利用椭圆的对称性以及定义可得 $|MF|+|NF|=2a=8$， 即可得 $|MF|^2+6|NF|=(|MF|-3)^2+39$，利用二次函数的性质即可求解.

【详解】由对称性和椭圆定义可知 $|MF|+|NF|=2a=8$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，

故 $|MF|^2+6|NF|=|MF|^2+6\left(8-|MF|\right)=|MF|^2-6|MF|+48=(|MF|-3)^2+39$，

又因为 $F\left(3,0\right)$，设点 $M\left(m,n\right)$，则 $-4\le m\le 4$，所以

$$|MF|^2=(m-3)^2+n^2=(m-3)^2+7-\frac{7m^2}{16}=\frac{9m^2}{16}-6m+16=\left(\frac{3m}{4}-4\right)^2,$$

当 $m=4$ 时，$|MF|^2$ 取得最小值，最小值为 1，

当 $m=-4$ 时，$|MF|^2$ 取得最大值，最大值为 49，

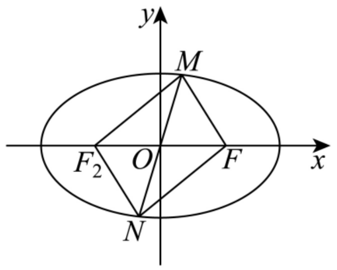
所以 $|MF|^2\in\left[1,49\right],\therefore|MF|\in\left[1,7\right]$，

故当 $|MF|=3$ 时，$|MF|^2+6|NF|$ 取得最小值，最小值为 39，

当 $|MF|=7$ 时，$|MF|^2+6|NF|$ 取得最大值，最大值为 $16+39=55$，

故 $|MF|^2+6|NF|$ 的取值范围是 $[39,55]$.

故选：C.



7. 已知函数 $f\left(x\right)=2024^{x}-2024^{-x}$，若 $x>0$， $y>0$，且 $f\left(x-2\right)+f\left(y\right)=f\left(0\right)$，则 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. 2　　　　C. 4　　　　D. $\frac{9}{2}$

【答案】D

【解析】

【详解】利用函数奇偶性的应用、基本不等式求和的最小值，先根据函数的性质，确定 x， y 满足的条件，再利用基本（均值）不等式求和的最小值.

【分析】函数 $f\left(x\right)=2024^{x}-2024^{-x}$ 的定义域为R， $f\left(-x\right)=2024^{-x}-2024^{x}=-f\left(x\right)$，

即函数 $f\left(x\right)$ 是奇函数，且 $f\left(0\right)=0$，

由函数 $y=2024^{x}$， $y=-2024^{-x}$ 都是R上的增函数，则 $f\left(x\right)$ 在R上为增函数，

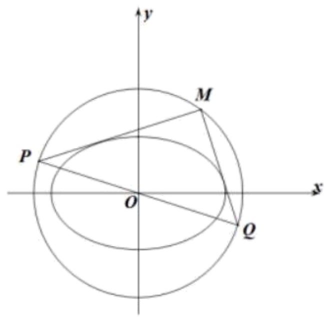
由 $f\left(x-2\right)+f\left(y\right)=f\left(0\right)$，则 $f\left(x-2\right)=-f\left(y\right)$，可得 $f\left(x-2\right)=f\left(-y\right)$，

于是 $x+y=2$， $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(x+y\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{9}{2}$，

当且仅当 $\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=\frac{4}{3},y=\frac{2}{3}$ 时， $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$ 取得最小值 $\frac{9}{2}$.

故选：D.

8. 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”，他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆.若椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的蒙日圆为 $C:x^2+y^2=\frac{5}{3}a^2$，过 C 上的动点 M 作 Γ 的两条切线，分别与 C 交于 P， Q 两点，直线 PM,QM 交 Γ 于 A， B 两点，则下列结论错误的是（　）



A. 椭圆Γ的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\triangle MPQ$面积的最大值为$\dfrac{5}{3}a^2$

C. M到Γ的左焦点的距离的最小值为$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)a$

D. 若动点D在Γ上，将直线DA，DB的斜率分别记为k_1，k_2，则$k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】求椭圆的离心率，根据直线与椭圆的位置关系求参数或范围、求椭圆中的最值问题，根据题意结合圆，椭圆的知识并结合直线与椭圆位置关系，韦达定理可逐项求解.

【详解】A：依题意，过椭圆Γ的上顶点作y轴的垂线，过椭圆Γ的右顶点作x轴的垂线则这两条垂线的交点在C上，

因为$a^2+b^2=\dfrac{5}{3}a^2$，所以椭圆Γ的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故A正确；

B：因为点P，M，Q都在C上，且$\angle PMQ=90^\circ$，PQ为C的直径，

所以$\triangle MPQ$面积的最大值为$\dfrac{1}{2}|PQ|\times\sqrt{\dfrac{5}{3}a^2}=\dfrac{5}{3}a^2$，故B正确；

C：设$M\left(x_0,y_0\right)$，Γ的左焦点为$F_1\left(-c,0\right)$，连接MF_1，

所以$|MF_1|^2=\left(x_0+c\right)^2+y_0^2=x_0^2+y_0^2+2x_0c+c^2=\dfrac{5}{3}a^2+2cx_0+c^2$，

又$-\dfrac{\sqrt{15}}{3}a\le x_0\le\dfrac{\sqrt{15}}{3}a$，当$x_0=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}a$时，$|MF_1|$的最小值为$\dfrac{\sqrt{15}}{3}a-c$，

则M到Γ的左焦点的距离的最小值为$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)a$，故C正确；

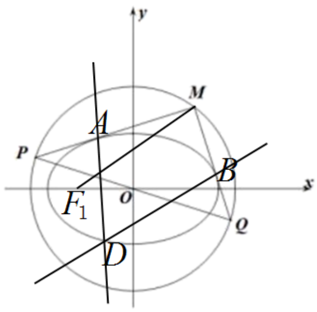
D：由直线 PQ 经过坐标原点，易得点 A， B 关于原点对称，

设 $A\left(x_1,y_1\right)$， $D\left(x_2,y_2\right)$，则 $B\left(-x_1,-y_1\right)$，得 $k_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$， $k_2=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，

又 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x_2^2+y_2^2=b^2\\ \dfrac{2}{3}x_1^2+y_1^2=b^2\end{cases}$，两式相减得， $\dfrac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\dfrac{2}{3}$，

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\dfrac{2}{3}$，故 D 错误.

故选：D



【点睛】方法点睛：解答圆锥曲线的最值问题的方法与策略：

（1）几何转化代数法：若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用圆锥曲线的定义、图形、几何性质来解决；

（2）函数取值法：若题目的条件和结论的几何特征不明显，则可以建立目标函数，再求这个函数的最值（或值域），常用方法：配方法；基本不等式法；单调性法；三角换元法；导数法等，要特别注意自变量的取值范围.

二、多选题:本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 给出下列说法，其中正确的是（　）

A. 数据 0，1，1，2，2，2，3，4 的极差与众数之和为 6

B. 已知一组数据 1，2，m，8，$m+1$，9 的平均数为 6，则这组数据的中位数是 8

C. 已知某班共有 45 人，小明在一次数学测验中成绩排名为班级第 9 名，则小明成绩是全班数学成绩的第 20 百分位数

D. 一组不完全相同数据 x_1， x_2， $\cdots$， x_n 的方差为 3，则数据 $2x_1+1$， $2x_2+1$， $\cdots$， $2x_n+1$ 的方差为 12

【答案】AD

【解析】

【分析】根据众数、极差的定义即可判断 A；根据平均数、中位数定义即可判断 B；根据百分位数定义即可判断 C；根据方差的性质即可判断 D.

【详解】对于 A，数据0，1，1，2，2，2，3，4的极差为$4-0=4$，众数为2，

所以数据0，1，1，2，2，2，3，4极差与众数之和为6，A 正确；

对于 B，由题意可知$1+2+m+8+m+1+9=6\times 6=36$，解得：$m=7.5$，

所以数据为：1，2，7.5，8，8.5，9，数据的中位数为$\dfrac{7.5+8}{2}=7.75$，

B 错误；

对于 C，小明在一次数学测验中成绩排名为班级第9名，

若成绩从低到高排序，小明的成绩排在第36位，又因为$45\times\dfrac{20}{100}=9$，

又因为考试分数排名为由高分到低分，所以全班数学成绩的第20百分位数应为：

第班级成绩的第36名与第37名同学成绩的平均数，

所以小明的成绩不是全班数学成绩的第20百分位数，C 错误；

对于 D，因为x_1，x_2，$\cdots$，x_n的方差为 3，根据方差性质，

$2x_1+1$，$2x_2+1$，$\cdots$，$2x_n+1$的方差为$2^2\times 3=12$，D 正确.

故选：AD

10. 过定点 A 的动直线$l_1: x+my-4m-1=0$和过定点B的动直线$l_2: mx-y-m+3=0$，P点为两直线的交点，圆$C:(x-2)^2+(y-4)^2=4$，则下列说法正确的有（　　）

A. 对任意m，圆C上恒有 4 个点到直线l_1的距离为$\dfrac{1}{2}$

B. 直线l_2以与圆C相交且最短弦长为$2\sqrt{2}$

C. 动点P的轨迹与圆C相交

D. PA^2+PB^2为定值

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据已经条件，可求出两个定点 A 和B的坐标，以及圆C的圆心和半径.对于选项 A，只需判断圆心到直线l_1的距离，即可判断交点的个数；对于选项 B：因为点B在圆内，所以直线l_2与圆相交，当直线l_2与线段BC垂直时，所得弦最短，求出弦长即可判断；对于选项 C：注意到直线l_1与l_2垂直，所以点P

的轨迹是以$|AB|$为直径的圆，判断两圆的位置关系，即可知晓点P与圆C是否相交；对于选项 D：因为$l_1 \perp l_2$，所以$\triangle PAB$为直角三角形，即可判断.

【详解】将l_1方程写为$(x-1)+m(y-4)=0$，所以定点 A 的坐标为$(1,4)$，

将l_2方程写为$m(x-1)-(y-3)=0$，所以定点B的坐标为$(1,3)$，

由圆C的方程可知其圆心C坐标为$(2,4)$，半径为$r=2$.

对于选项 A：因为圆心C到直线l_1的距离为$d=\dfrac{|2+4m-4m-1|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\le 1$，

而半径$r=2$，$2-1>\dfrac{1}{2}$，所以圆C上恒有 4 个点到直线l_1的距离为$\dfrac{1}{2}$，所以选项 A 正确；

对于选项 B：点B与圆心C的距离为$|BC|=\sqrt{(1-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}<2$，

所以点B在圆C内，所以直线l_2以与圆C相交，当直线l_2与线段BC垂直时，

所交的弦最短，此时弦长为$2\sqrt{r^2-|BC|^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，所以选项 B 正确；

对于选项 C：因为直线l_1的斜率为$k_1=-\dfrac{1}{m}$，直线l_2的斜率为$k_2=m$，所以$l_1 \perp l_2$，

所以点P的轨迹是以$|AB|$为直径的圆，此圆的圆心为$(1,\dfrac{7}{2})$，半径为$r_2=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}$，

所以与圆C的圆心距为$d=\sqrt{(2-1)^2+(4-\dfrac{7}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以$d<r_1-r_2$，

两圆的位置关系是内含，两圆无交点，所以点P的轨迹与圆C不相交，所以选项 C 错误；

对于选项 D：由选项 C 的判断过程中已知$l_1 \perp l_2$，所以$PA \perp PB$，

所以$\triangle PAB$为直角三角形，所以$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=1$，所以选项 D 正确.

故选：ABD.

11. 如图，在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为棱BB_1的中点，Q为正方形BB_1C_1C内一动点（含边界），有下列正确的命题（　）