

专题 6 三角函数的图像与性质

考情解读

1. 三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象变换, 周期及单调性是高考热点.

2. 备考时应掌握 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 的图象与性质, 并熟练掌握函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$)

的值域、单调性、周期性等.

重点知识梳理

1. 任意角和弧度制

(1) 终边相同的角: 所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

(3) 弧长公式: $l = |\alpha|r$,

扇形的面积公式: $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

2. 任意角的三角函数

(1) 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, 那么 $\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$.

(2) 各象限角的三角函数值的符号: 一全正, 二正弦, 三正切, 四余弦.

3. 诱导公式

公式一	$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha,$ $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$
公式二	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
公式三	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

公式四	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
公式五	$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$

公式六	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
口诀	奇变偶不变，符号看象限

4. 同角三角函数基本关系式

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} (\cos\alpha \neq 0).$$

5. 正弦、余弦、正切函数的性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
最小正周期	2π	2π	π
单调性	在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递增. 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递减	在 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递增. 在 $[2k\pi, \pi + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递减	在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbf{Z})$ 上递增
最值	当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最大值 1. 当 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最小值 -1	当 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最大值 1. 当 $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最小值 -1	无最值
对称性	对称中心: $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$. 对称轴: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$	对称中心: $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$. 对称轴: $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$	对称中心: $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$

	Z)	Z)	
--	----	----	--

6. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

(1)“五点法”作图

设 $z = \omega x + \varphi$ ， 令 $z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ， 求出 x 的值与相应的 y 的值， 描点连线可得.

(2) 图象变换

$$\textcircled{1} y = \sin x \xrightarrow[\text{平移 } |\varphi| \text{ 个单位}]{\text{向左 } (\varphi > 0) \text{ 或向右 } (\varphi < 0)} y = \sin(x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y = \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \quad (A > 0, \omega > 0).$$

$$\textcircled{2} y = \sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y = \sin \omega x$$

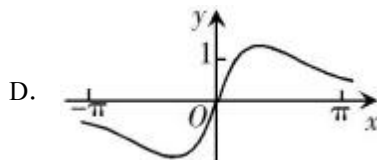
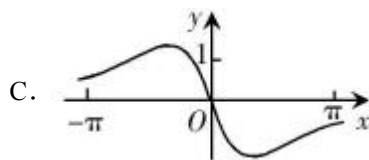
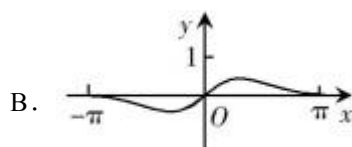
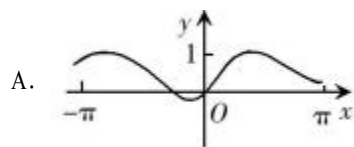
$$\xrightarrow[\text{平移 } |\frac{\varphi}{\omega}| \text{ 个单位}]{\text{向左 } (\omega > 0) \text{ 或向右 } (\varphi < 0)} y = \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \quad (A > 0, \omega > 0).$$

高频考点突攻

高频考点一 三角函数图象及其变换

例 1、【2019 年高考全国 I 卷】函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



【举一反三】（2018 年天津卷）将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

数

A. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增 B. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减

C. 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增 D. 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

【变式探究】【2017 课标 1，理 9】已知曲线 $C_1: y=\cos x$ ， $C_2: y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ ，则下面结论正确的是

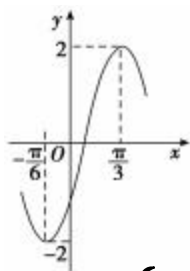
A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

【变式探究】函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则()



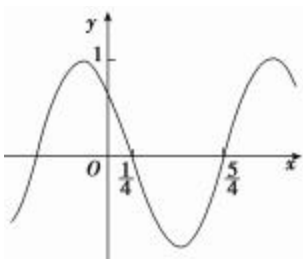
A. $y = 2\sin\left[2x - \frac{\pi}{6}\right]$

C. $y = 2\sin\left[x + \frac{\pi}{6}\right]$

B. $y = 2\sin\left[\frac{2x - \pi}{3}\right]$

D. $y = 2\sin\left[\frac{x + \pi}{3}\right]$

【变式探究】(1) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为()



$\left[k\pi - \frac{1}{2}, k\pi + \frac{3}{2}\right]$

$\left[2k\pi - \frac{1}{2}, 2k\pi + \frac{3}{2}\right]$

$\left[k\pi - \frac{3}{2}, k\pi + \frac{1}{2}\right]$

A. $\frac{4}{2k\pi - \frac{1}{4}}, \frac{4}{2k\pi + \frac{3}{4}}, k \in \mathbf{Z}$

$\frac{4}{2k\pi - \frac{1}{4}}, \frac{4}{2k\pi + \frac{3}{4}} \Big|$

B. $\frac{4}{k - \frac{1}{4}}, \frac{4}{k + \frac{3}{4}}, k \in \mathbf{Z}$

$\frac{4}{k - \frac{1}{4}}, \frac{4}{k + \frac{3}{4}} \Big|$

C. $\frac{4}{2k - \frac{1}{4}}, \frac{4}{2k + \frac{3}{4}}, k \in \mathbf{Z}$

$\frac{4}{2k - \frac{1}{4}}, \frac{4}{2k + \frac{3}{4}} \Big|$

D. $\frac{4}{k - \frac{1}{4}}, \frac{4}{k + \frac{3}{4}}, k \in \mathbf{Z}$

$$|4x - \frac{\pi}{3}|$$

(2)要得到函数 $y = \sin \frac{x}{3}$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 4x$ 的图象()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

高频考点二 三角函数性质及应用

例 2、【2019 年高考全国 II 卷】下列函数中, 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增的是

A. $f(x) = |\cos 2x|$

B. $f(x) = |\sin 2x|$

C. $f(x) = \cos|x|$

D. $f(x) = \sin|x|$

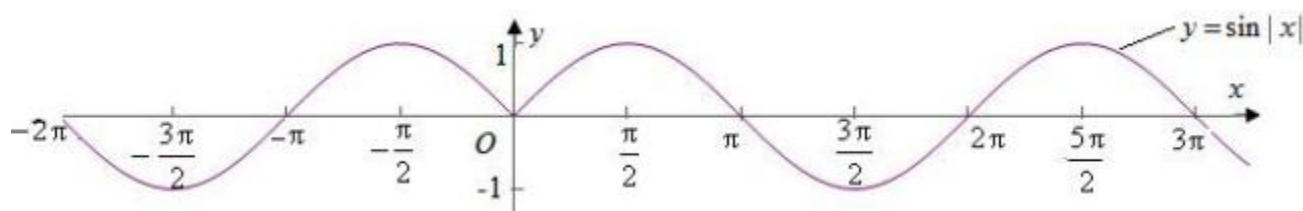


图 1

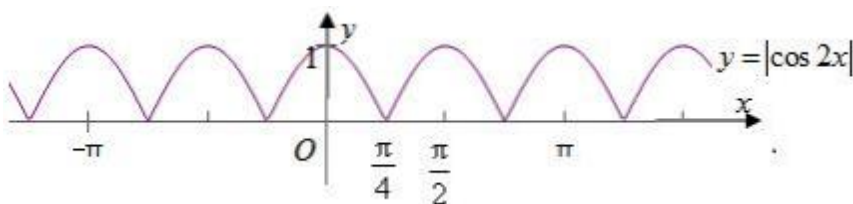


图 2

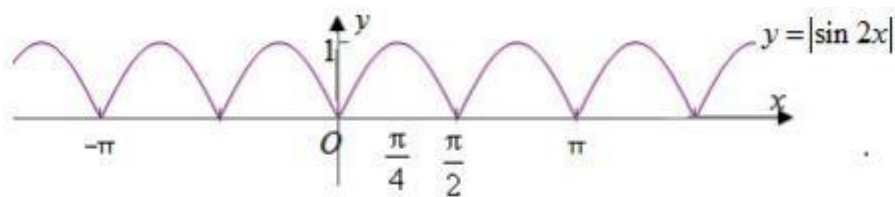


图 3

【举一反三】(2018 年全国 II 卷理数) 已知 $\sin \alpha + \cos \beta = 1$, $\cos \alpha + \sin \beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

【变式探究】【2017 课标 1, 理 17】 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积

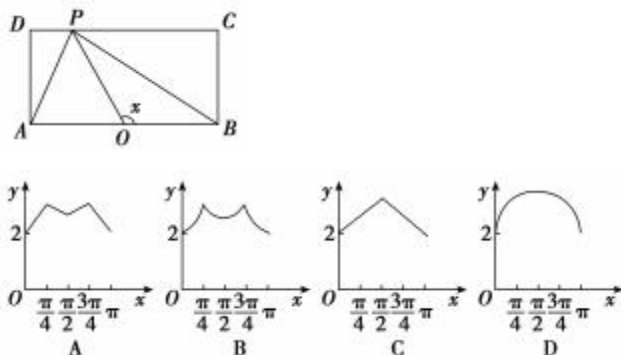
$$\text{为 } \frac{a^2}{3 \sin A}$$

(1) 求 $\sin B \sin C$;

(2) 若 $6\cos B \cos C = 1$, $a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【变式探究】(1)如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC , CD 与 DA

运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A , B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为()



(2) 函数 $f(x) = \sin(x+2\varphi) - 2\sin\varphi\cos(x+\varphi)$ 的最大值为_____.

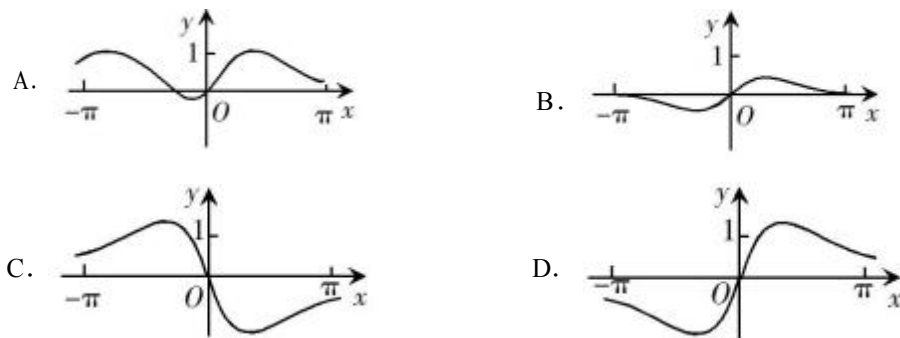
$$1 \quad \omega > 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{4}$$

(3) 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 π , 且 $f(-x) = f(x)$, 则()

- A. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减
- B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递减
- C. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递增
- D. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递增

真题感悟

1. 【2019 年高考全国 I 卷】函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



2. 【2019 年高考全国 I 卷】关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

① $f(x)$ 是偶函数

② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点

④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④

B. ②④

C. ①④

D. ①③

3. 【2019 年高考全国 II 卷】下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增的是

A. $f(x)=|\cos 2x|$

B. $f(x)=|\sin 2x|$

C. $f(x)=\cos|x|$

D. $f(x)=\sin|x|$

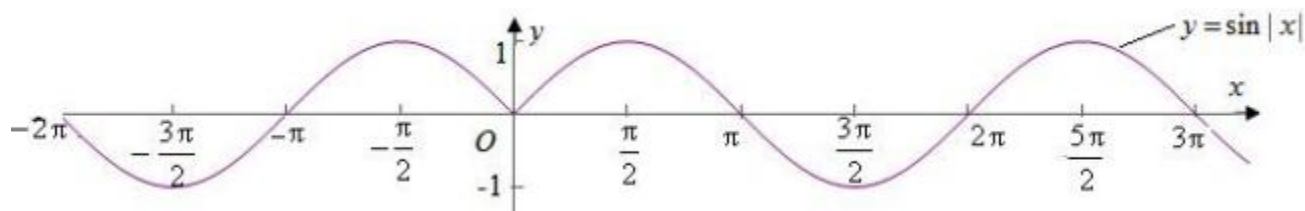


图 1

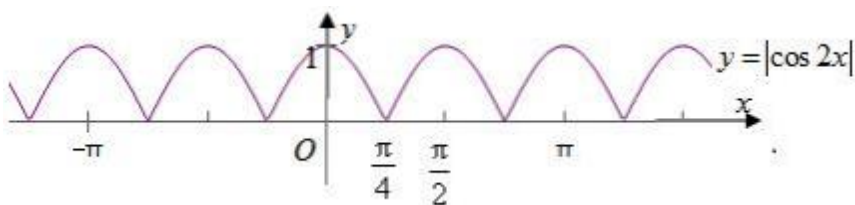


图 2

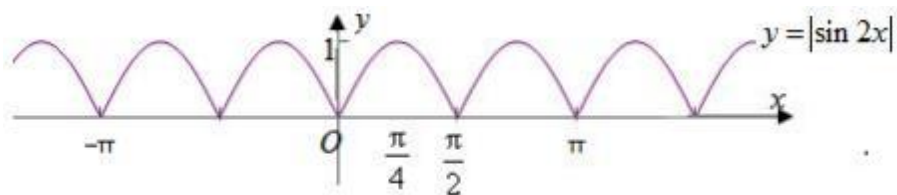


图 3

4. 【2019 年高考全国 II 卷】已知 $\alpha \in (0,$

$\frac{\pi}{2})$, $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 【2019 年高考全国Ⅲ卷】设函数 $f(x) = \sin\left(\phi x + \frac{\pi}{5}\right)$ ($\phi > 0$)，已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，下述四个结论：

① $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点

② $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 单调递增

④ ϕ 的取值范围是 $[\frac{12}{5}, \frac{29}{10})$

其中所有正确结论的编号是

A. ①④

B. ②③

C. ①②③

D. ①③④

6. 【2019 年高考天津卷】已知函数 $f(x) = A\sin(\phi x + Q)$ ($A > 0, \phi > 0, |Q| < \pi$) 是奇函数, 将 $y = f(x)$

的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g(x)$ 的最

小正周期为 2π , 且 $g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 则 $f(\frac{3\pi}{8}) =$

A. -2

B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

1. (2018 年全国 III 卷理数) 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $\frac{8}{9}$

2. (2018 年天津卷) 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数

A. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增

B. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减

C. 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增

D. 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

3. (2018 年北京卷) 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$), 若 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小

值为_____.

4. (2018 年江苏卷) 已知函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 ϕ 的值是_____.

5. (2018 年全国 III 卷理数) 函数 $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为_____.

6. (2018 年全国 II 卷理数) 已知 $\sin\alpha + \cos\beta = 1$, $\cos\alpha + \sin\beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

$$P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

(I) 求 $\sin(\alpha + \pi)$ 的值;

(II) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

8. (2018 年江苏卷) 已知 α, β 为锐角, $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;

(2) 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值.

1. 【2017 课标 1, 理 9】已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则下面结论正确的是

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

2. 【2017 课标 1, 理 17】 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$

(1) 求 $\sin B \sin C$;

(2) 若 $6\cos B \cos C = 1$, $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

1. 【2016 高考新课标 3 理数】在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{2}BC$ 则 $\cos A =$ ()

(A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2. 【2016 高考新课标 2 理数】若 $\cos(\frac{\pi}{4} - C) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2C =$ ()

(A) $\frac{7}{25}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $-\frac{7}{25}$

3. 【2016 高考新课标 3 理数】若 $\tan C = \frac{3}{4}$, 则 $\cos^2 C + 2\sin 2C =$ ()

(A) $\frac{64}{25}$

(B) $\frac{48}{25}$

(C) 1

(D) $\frac{16}{25}$

4. 【2016 年高考四川理数】 $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} =$ _____.

5. 【2016 年高考四川理数】为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有

的点()

- (A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
(C) 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

6. 【2016 高考新课标 2 理数】若将函数 $y = 2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后图像的

对称轴为()

- (A) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ (B) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$
(C) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ (D) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$

7. 【2016 年高考北京理数】将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 图象上的点 $P(\frac{\pi}{4}, t)$ 向左平移 s ($s > 0$) 个单位长

度得到点 P' ，若 P' 位于函数 $y = \sin 2x$ 的图象上，则()

- A. $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$ B. $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$
C. $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ D. $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

8. 【2016 高考新课标 3 理数】函数 y

$$= \sin x - \sqrt{3} \cos x \text{ 的图像可由函数 } y = \sin x + \sqrt{3} \cos x \text{ 的图像至}$$

少向右平移_____个单位长度得到.

9. 【2016 高考浙江理数】设函数 $f(x) = \sin^2 x + b \sin x + c$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期()

- A. 与 b 有关，且与 c 有关 B. 与 b 有关，但与 c 无关
C. 与 b 无关，且与 c 无关 D. 与 b 无关，但与 c 有关

10. 【2016 高考山东理数】函数 $f(x) = (\sqrt{3} \sin x + \cos x)(\sqrt{3} \cos x - \sin x)$ 的最小正周期是()

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) π

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) 2π

11. 【2016 年高考四川理数】为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所

有的点()

- (A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
(C) 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

12. 【2016 高考新课标 2 理数】若将函数 $y = 2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后图像的

对称轴为 ()

- (A) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ (B) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$
(C) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ (D) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$

13. 【2016 年高考北京理数】将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 图象上的点 $P(\frac{\pi}{4}, t)$ 向左平移 s ($s > 0$) 个单位

长度得到点 P' ，若 P' 位于函数 $y = \sin 2x$ 的图象上，则 ()

- A. $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$ B. $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$
C. $t = \frac{1}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ D. $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

14. 【2016 高考新课标 3 理数】函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图像可由函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的图像至

少向右平移 _____ 个单位长度得到.

15. 【2016 高考新课标 3 理数】在 $\triangle ABC$ 中， $B = \frac{\pi}{4}$ ， BC 边上的高等于 $\frac{1}{2}BC$ 则 $\cos A =$ ()

- (A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

16. 【2016 高考新课标 2 理数】若 $\cos(\frac{\pi}{4} - C) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2C =$ ()

- (A) $\frac{7}{25}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $-\frac{7}{25}$

17. 【2016 高考新课标 3 理数】若 $\tan C = \frac{3}{4}$ ，则 $\cos^2 C + 2 \sin 2C =$ ()

- (A) $\frac{64}{25}$ (B) $\frac{48}{25}$ (C) 1 (D) $\frac{16}{25}$

专题 6 三角函数的图像与性质

考情解读

1. 三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象变换, 周期及单调性是高考热点.

2. 备考时应掌握 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 的图象与性质, 并熟练掌握函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$)

的值域、单调性、周期性等.

重点知识梳理

1. 任意角和弧度制

(1) 终边相同的角: 所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in$

$\mathbf{Z}\}$.

(2) 把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

(3) 弧长公式: $l = |\alpha|r$,

扇形的面积公式: $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

2. 任意角的三角函数

(1) 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, 那么 $\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$).

(2) 各象限角的三角函数值的符号: 一全正, 二正弦, 三正切, 四余弦.

3. 诱导公式

公式一	$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha,$ $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$
公式二	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
公式三	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

公式四	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
公式五	$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$

公式六	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
口诀	奇变偶不变，符号看象限

4. 同角三角函数基本关系式

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} (\cos\alpha \neq 0).$$

5. 正弦、余弦、正切函数的性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
最小正周期	2π	2π	π
单调性	在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递增. 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递减	在 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递增. 在 $[2k\pi, \pi + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上递减	在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbf{Z})$ 上递增
最值	当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最大值 1. 当 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最小值 -1	当 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最大值 1. 当 $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, y 取得最小值 -1	无最值
对称性	对称中心: $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$. 对称轴: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$	对称中心: $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$. 对称轴: $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$	对称中心: $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$

	Z)	Z)	
--	----	----	--

6. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

(1)“五点法”作图

设 $z = \omega x + \varphi$, 令 $z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 求出 x 的值与相应的 y 的值, 描点连线可得.

(2) 图象变换

$$\textcircled{1} y = \sin x \xrightarrow[\text{平移 } |\varphi| \text{ 个单位}]{\text{向左 } (\varphi > 0) \text{ 或向右 } (\varphi < 0)} y = \sin(x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y = \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \quad (A > 0, \omega > 0).$$

$$\textcircled{2} y = \sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y = \sin \omega x$$

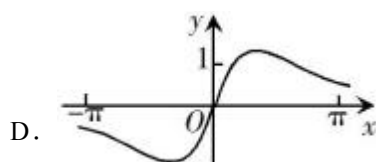
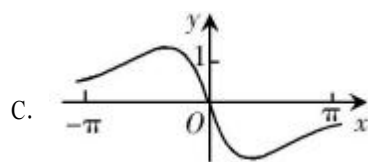
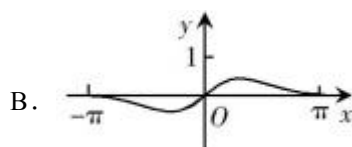
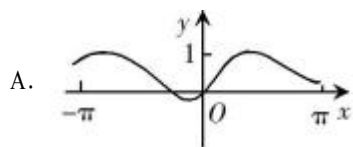
$$\xrightarrow[\text{平移 } |\frac{\varphi}{\omega}| \text{ 个单位}]{\text{向左 } (\omega > 0) \text{ 或向右 } (\varphi < 0)} y = \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \quad (A > 0, \omega > 0).$$

高频者点突破

高频考点一 三角函数图象及其变换

例 1、【2019 年高考全国 I 卷】函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



【答案】D

【解析】由 $f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = \frac{-\sin x - x}{\cos x + x^2} = -f(x)$ ，得 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称。

对称，排除 A. 又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{4+2\pi}{\pi^2} > 1$, $f(\pi) = \frac{\pi}{-1+\pi^2} > 0$ ，排除 B, C，故选 D.

【举一反三】（2018 年天津卷）将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函

数

- A. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增 B. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减
- C. 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增 D. 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

【答案】A

【解析】由函数图象平移变换的性质可知：

将 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为：

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x$$

则函数的单调递增区间满足：

$$\text{即 } k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}),$$

令 $k=1$ 可得一个单调递增区间为： $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

函数的单调递减区间满足： $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$

$$\text{即 } k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}),$$

令 $k=1$ 可得一个单调递减区间为： $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

本题选择 A 选项.

【变式探究】【2017 课标 1，理 9】已知曲线 $C_1: y = \cos x$ ， $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ ，则下面结论正确的是

- A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2
- B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2
- C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

得到曲线 C_2

【答案】D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/718071024120006133>