第二讲　常用逻辑用语

知识梳理·双基自测

知 识 梳 理

知识点一　充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件	
p 是 q 的充分不必要条件	$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$
p 是 q 的必要不充分条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$
p 是 q 的充要条件	$p\Leftrightarrow q$
p 是 q 的既不充分也不必要条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$

知识点二　全称量词与存在量词

1．命题

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题．

2．全称量词命题与存在量词命题

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示．含有全称量词的命题，叫做全称量词命题．

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示．含有存在量词的命题，叫做存在量词命题．

3．全称量词命题和存在量词命题的否定

量词命题	量词命题的否定	结论
$\exists x\in M$，$p(x)$	$\forall x\in M$，綈 $p(x)$	存在量词命题的否定是全称量词命题
$\forall x\in M$，$p(x)$	$\exists x\in M$，綈 $p(x)$	全称量词命题的否定是存在量词命题

归 纳 拓 展

1．若 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，则

(1)若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；

(2)若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；

(3)若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；

(4)若 A□B，则 p 是 q 的充分不必要条件；

(5)若 A□B，则 p 是 q 的必要不充分条件；

(6)若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件．

2．充分条件与必要条件的两个特征：

(1)对称性：若 p 是 q 的充分条件，则 q 是 p 的必要条件，即“$p\Rightarrow q$”$\Leftrightarrow$“$q\Leftarrow p$”．

(2)传递性：若 p 是 q 的充分(必要)条件，q 是 r 的充分(必要)条件，则 p 是 r 的充分(必要)条件，即“$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow r$”$\Rightarrow$“$p\Rightarrow r$”(“$p\Leftarrow q$ 且 $q\Leftarrow r$”$\Rightarrow$“$p\Leftarrow r$”)．

注意：不能将“若 p，则 q”与“$p\Rightarrow q$”混为一谈，只有“若 p，则 q”为真命题时，才有“$p\Rightarrow q$”，即“$p\Rightarrow q$”$\Leftrightarrow$“若 p，则 q”为真命题．

3．含有一个量词的命题的否定规律是“改量词，否结论”．

4．对省略了全称量词的命题否定时，要对原命题先加上全称量词再对其否定．

5．命题 p 和綈 p 的真假性相反，若判断一个命题的真假有困难时，可判断此命题的否定的真假．

双 基 自 测

题组一　走出误区

1．判断下列结论是否正确(请在括号内打“√”或“×”)

(1)“$x^2+2x-3<0$”是命题．(×)

(2)至少有一个三角形的内角和为 π 是全称量词命题．(×)

(3)若命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{x-2}<0$，则綈 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{x-2}\geqslant 0$.(×)

(4)“$\alpha=\beta$”是“$\tan\alpha=\tan\beta$”的充分不必要条件．(×)

(5)在△ABC 中，$A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的充要条件．(√)

[解析]　(4)当 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan\alpha$、$\tan\beta$ 都无意义．因此不能推出 $\tan\alpha=\tan\beta$，当 $\tan\alpha=\tan\beta$ 时，$\alpha=\beta+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，不一定 $\alpha=\beta$，因此是既不充分也不必要条件．

(5)在△ABC 中，由 $A>B$，则 $a>b$，由正弦定理 $\sin A>\sin B$，反之也成立．

题组二　走进教材

2．**(多选题)**(必修 1P_{28}练习 T1 改编)下列命题是全称量词命题且为真命题的是(AC)

A．$\forall x\in\mathbf{Z}$，$-x^2-1<0$

B．$\exists m\in\mathbf{Z}$，$nm=m$

C．所有圆的圆心到其切线的距离都等于半径

D．存在实数 x，使得$\dfrac{1}{x^2-2x+3}=\dfrac{3}{4}$

[解析]　$\forall x\in\mathbf{R}$，$-x^2\leqslant 0$，所以$-x^2-1<0$，故 A 选项是全称量词命题且为真命题；当 $m=0$ 时，$nm=m$ 恒成立，故 B 选项是存在量词命题且为真命题；任何一个圆的圆心到切线的距离都等于半径，故 C 选项是全称量词命题且为真命题；因为 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant 2$，所以$\dfrac{1}{x^2-2x+3}\leqslant\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}$，故 D 选项是存在量词命题且为假命题．

3．**(必修 1P_{22} 习题 T2 改编)**“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的(B)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

[解析]　当 $a>b$ 时，若 $c^2=0$，则 $ac^2=bc^2$，

所以 $a>b\not\Rightarrow ac^2>bc^2$，

当 $ac^2>bc^2$ 时，$c^2\neq 0$，则 $a>b$，

所以 $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$，

即“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的必要不充分条件．

4．**(必修 1P_{23}T5 改编)**使$-2<x<2$ 成立的一个充分条件是(B)

A．$x<2$　　B．$0<x<2$

C．$-2\leqslant x\leqslant 2$　　D．$x>0$

题组三　走向高考

5．**(2023·天津，2,5 分)**“$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的(B)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

[解析]　由 $a^2=b^2$ 得$|a|=|b|$；

由 $a^2+b^2=2ab$，得$(a-b)^2=0$，$\therefore a=b$.

$a=b\Rightarrow|a|=|b|$，而由$|a|=|b|$不能推出 $a=b$.

∴“$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的必要不充分条件，故选 B.

6．(2023·**全国甲理**，7,5 **分**)设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则(B)

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

[解析]　充分性：当 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ 时，$\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta$，即 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，∴$\sin\alpha=\pm\cos\beta$，即 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 或 $\sin\alpha-\cos\beta=0$，所以充分性不成立；

必要性：当 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 时，$\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，∴$\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta$，即 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，所以必要性成立.

∴甲是乙的必要条件但不是充分条件，故选 B.

7．(2016·**浙江**)命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n\geq x^2$”的否定形式是(D)

A．$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

B．$\forall x\in\mathbf{R}$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

C．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

D．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

[解析]　根据含有量词的命题的否定的概念可知，选 D.

考点突破·互动探究

考点1

全称量词命题与存在量词命题——自主练透

例1.(**多选题**)下列命题的否定中，是真命题的有(BD)

A．某些平行四边形是菱形

B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+3<0$

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2\geq0$

D．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-ax+1=0$ 有实数解

[解析]　根据原命题和它的否定真假相反的法则判断，即可求解．对于 A，某些平行四边形是菱形，是真命题；对于 B，Δ

$=9-12=-3<0$，则原命题是假命题；对于 C，$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2\geqslant 0$，是真命题；对于 D，只有 $\Delta=a^2-4\geqslant 0$，即 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 2$ 时，$x^2-ax+1=0$ 有实数解，是假命题；根据原命题和它的否定真假相反的法则判断，选项 BD 中，原命题的否定是真命题．故选 BD.

2．(2023·**武汉模拟**)命题“$\forall x\in[0，+\infty)$，$x^3+x\geqslant 0$”的否定是(C)

A．$\forall x\in(-\infty，0)$，$x^3+x<0$

B．$\forall x\in(-\infty，0)$，$x^3+x\geqslant 0$

C．$\exists x\in[0，+\infty)$，$x^3+x<0$

D．$\exists x\in[0，+\infty)$，$x^3+x\geqslant 0$

[解析]　含有一个量词的命题的否定规律是“改量词，否结论”，所以，命题“$\forall x\in[0，+\infty)$，$x^3+x\geqslant 0$”的否定是“$\exists x\in[0，+\infty)$，$x^3+x<0$”，故选 C.

3．(**多选题**)下列存在量词命题中，为真命题的是(ABD)

A．$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2-2x-3=0$

B．至少有一个 $x\in\mathbf{Z}$，使 x 能同时被 2 和 3 整除

C．$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|<0$

D．有些自然数是偶数

[解析]　因为方程 $x^2-2x-3=0$ 的两根为 3 和 -1，所以 $x\in\mathbf{Z}$，故 A 正确；因为 6 能同时被 2 和 3 整除，且 $6\in\mathbf{Z}$，故 B 正确；根据绝对值的意义可得 $|x|\geqslant 0$ 恒成立，不存在 x 满足 $|x|<0$，故 C 错误；2,4 等既是自然数又是偶数，故 D 正确；故选 ABD.

4．已知命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$ax^2-x+2\leqslant 0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\left(\frac{1}{8},+\infty\right)}$.

[解析]　因为命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$ax^2-x+2\leqslant 0$”是假命题，

所以命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-x+2>0$”是真命题，

当 $a=0$ 时，得 $x<2$，故命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-x+2>0$”是假命题，不符合题意；

当 $a\neq 0$ 时，得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=1-8a<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{8}$.

名师点拨：

1．全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假
	假	所有对象使命题为假	否定为真

2.全称量词命题与存在量词命题的否定

(1)改写量词：确定命题所含量词的类型，若命题中无量词，则要结合命题的含义加上量词，再对量词进行改写；

(2)否定结论：对原命题的结论进行否定.

考点2

充分条件与必要条件的判断——多维探究

方法1：定义法判断

例1.已知 x，y 为正实数，则“$x+y>4$”是“$\ln x+\ln y>2\ln 2$”的(B)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

[解析]　利用特值法、基本不等式，结合充分条件与必要条件的定义判断即可．当 $x+y>4$ 时，取 $x=1$，$y=4$，则 $\ln x+\ln y=\ln 1+\ln 4=2\ln 2$，所以“$x+y>4$”不是“$\ln x+\ln y>2\ln 2$”的充分条件；当 $\ln x+\ln y>2\ln 2$ 时，得 $\ln(xy)>\ln 4$，即 $xy>4$，则 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}>4$，所以“$x+y>4$”是“$\ln x+\ln y>2\ln 2$”的必要条件，所以“$x+y>4$”是“$\ln x+\ln y>2\ln 2$”的必要不充分条件．故选 B.

2．(2023·**新课标Ⅰ，7,5 分**)记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$为等差数列；乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则(C)

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

[解析]　若$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，$\therefore S_n=na_1+$

$\frac{n(n-1)d}{2}$，$\therefore \frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{S_{n-1}}{n-1}=a_1+\frac{n-2}{2}d$，

$\therefore \frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=a_1+\frac{n-1}{2}d-a_1-\frac{n-2}{2}d=\frac{1}{2}d$，

$\therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以 S_1 为首项，$\frac{d}{2}$为公差的等差数列.

若$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，设公差为 d'，则$\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)d'=a_1+(n-1)d'$，

$\therefore S_n=na_1+n(n-1)d'$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)a_1+(n-1)(n-2)d'$，

两式作差得，$a_n=a_1+2(n-1)d'$，

又 $n=1$ 时也满足上式，

$\therefore a_n=a_1+2(n-1)d'$，$n\in\mathbf{N}^*$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}=a_1+2(n-2)d'$，

$\therefore a_n-a_{n-1}=a_1+2(n-1)d'-a_1-2(n-2)d'=2d'$，

$\therefore \{a_n\}$是以 a_1 为首项，$2d'$ 为公差的等差数列，

综上，甲是乙的充要条件，故选 C.

方法 2：集合法判断

例 已知 p：$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$，$q$：$\log_2 x<0$，则 p 是 q 的(B)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

[解析] 由$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$ 知 $x>0$，所以 p 对应的 x 的范围为$(0，+\infty)$，由 $\log_2 x<0$ 知 $0<x<1$，所以 q 对应的 x 的范围为$(0,1)$，显然$(0,1)$□$(0，+\infty)$，所以 p 是 q 的必要不充分条件.

方法 3　等价转化法判断

例1.给定两个条件 p，q，若綈 p 是 q 的必要不充分条件，则 p 是綈 q 的(A)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

[解析]　因为綈 p 是 q 的必要不充分条件，则 $q\Rightarrow$綈 p，但綈 $p\nRightarrow q$，其等价命题为 $p\Rightarrow$綈 q，但綈 $q\nRightarrow p$，所以 p 是綈 q 的充分不必要条件．

2 如果 x,y 是实数，那么“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的 (C)

A.充要条件

B.充分不必要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

解决不相等问题转化为相等问题来处理，即转化为等价命题来处理

[解析]　解法一(集合法)：设全集 $U=\{(x，y)|x\in\mathbf{R}，y\in\mathbf{R}\}$，集合 $A=\{(x，y)|x\neq y\}$，$B=\{(x，y)|\cos x\neq\cos y\}$，则 A 的补集 $C=\{(x，y)|x=y\}$，B 的补集 $D=\{(x，y)|\cos x=\cos y\}$，显然 C□D，所以 B□A，故“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的必要不充分条件．

解法二(等价转化法)：$x=y\Rightarrow\cos x=\cos y$，而 $\cos x=\cos y\nRightarrow x=y$，故“$x=y$”是“$\cos x=\cos y$”的充分不必要条件，故“$x\neq y$”是“$\cos x\neq\cos y$”的必要不充分条件．

名师点拨：有关充要条件的判断常用的方法

1．根据定义判断：(1)弄清条件 p 和结论 q 分别是什么；(2)尝试 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$.若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件；若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件；若 $p\Rightarrow q$，$q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件；若 $p\nRightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件；若 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件．

2．利用集合判断

记法	$A=\{x\|p(x)\}$，$B=\{x\|q(x)\}$			
关系	A□B	B□A	$A=B$	$A B$ 且 $B A$
结论	p 是 q	p 是 q	p 是 q 的充要条件	p 是 q

	的充分不必要条件	的必要不充分条件		的既不充分也不必要条件

3.利用等价转化法：对于带有否定性词语的命题，常用此法，即要判断 p 是 q 的什么条件，只需判断綈 q 是綈 p 的什么条件．

【变式训练】

1．设 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$a^3>b^3$”是“$a^2>b^2$”的(D)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

[解析]　取特值并根据充分条件和必要条件的定义可得答案．当 $a=-1$，$b=-2$ 时，$a^3>b^3$ 不能推出 $a^2>b^2$，当 $a=-1$，$b=0$ 时，$a^2>b^2$ 不能推出 $a^3>b^3$，所以“$a^3>b^3$”是“$a^2>b^2$”的既不充分也不必要条件．故选 D.

2．(2024·全国高三专题练习)下列选项中的两个条件是互为充要条件的是(B)

A．P：$a=1$；Q：函数 $f(x)=x^2-(1-a^2)x+3$ 是偶函数

B．在△ABC 中，P：△ABC 是等边三角形；Q：$\sin A=\sin B=\sin C$

C．P：数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2n^2-3n+1$；Q：数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列

D．P：实数 $x\geqslant1$；Q：$x+\dfrac{1}{x}\geqslant2$

[解析]　选项 A，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=x^2-(1-a^2)x+3$ 是偶函数，

函数 $f(x)=x^2-(1-a^2)x+3$ 是偶函数，

$f(-x)=f(x)\Rightarrow x^2-(1-a^2)(-x)+3=x^2-(1-a^2)x+3\Rightarrow1-a^2=0$，

可得 $a=\pm1$，故 P 是 Q 的充分不必要条件；

选项 B，在△ABC 中，△ABC 是等边三角形，可得 $\sin A=\sin B=\sin C$，

当 $\sin A=\sin B=\sin C$ 时，因为 A，B，$C\in(0,\pi)$，$A+B+C=\pi$，所以有 $A=B=C$，

△ABC 是等边三角形，所以 P 和 Q 互为充要条件；

选项 C，数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2n^2-3n+1$，当 $n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n=S_n-$

$S_{n-1}=4n-5$,

$a_1=S_1=0$，$a_2=3$，$a_3=7$，

可得数列不是等差数列，

当数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列时，因为不知道首项，所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 不确定，

所以 P 是 Q 的既不充分也不必要条件；

选项 D，因为 $x\geqslant 1$，所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$

$\left(\text{当且仅当 } x=\frac{1}{x}\text{取等号，即 } x=1\text{ 时取等号}\right)$，

可以推出 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，

但是当 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 时，显然当 $x=\frac{1}{2}$时成立，不能推出 $x\geqslant 1$，所以 P 是 Q 的充分不必要条件．故选 B.

考点3

充分、必要条件的应用——师生共研

例(1)已知 $P=\{x|x^2-8x-20\leqslant 0\}$，非空集合 $S=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$．若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 m 的取值范围是__[0,3]__．

(2)在(1)中若把条件“若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件”改为“若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要不充分条件”，则 m 的取值范围是__[0,3]__．

[解析]　(1)由 $x^2-8x-20\leqslant 0$，得$-2\leqslant x\leqslant 10$，

所以 $P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$，

由 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，知 $S\subseteq P$，

则$\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\1-m\geqslant -2,\\1+m\leqslant 10,\end{cases}$　　所以 $0\leqslant m\leqslant 3$，

所以当 $0\leqslant m\leqslant 3$ 时，$x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，即所求 m 的取值范围是[0,3]．

(2)解法一：由(1)若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 $0\leqslant m\leqslant 3$，

当 $m=0$ 时，$S=\{1\}$，满足题意；当 $m=3$ 时，$S=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$满足题意，故 m 的取值范围为[0,3]．