

7. 已知排球发球考试规则：每位考生最多可发球三次，若发球成功，则停止发球，否则一直发到3次为止。设考生某次发球成功的概率为 p ($0 < p < 1$)，则该考生一次发球成功的概率为 P ，则 P 的表达式为

次结束为止. 某考生一次发球成功的概率为 $p(0 < p < 1)$, 发球次数为 X , 若 X 的数学期望 $E(X) > 1.75$, 则 p 的取值范围为()

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{7}{12}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(\frac{7}{12}, 1\right)$

8. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有三个元素的子集记为 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, n \in N^*$. 记 b_i 为集合 B_i 中的最大元素, 则 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n =$ ()

- A. 45 B. 105 C. 150 D. 210

9. 已知抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点重合, 且抛物线的准线被双曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$, 那么该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\sqrt{5}$

10. 自 2019 年 12 月以来, 在湖北省武汉市发现多起病毒性肺炎病例, 研究表明, 该新型冠状病毒具有很强的传染性. 各级政府反应迅速, 采取了有效的防控阻击措施, 把疫情控制在最低范围之内. 某社区按上级要求做好在鄂返乡人员体格检查登记, 有 3 个不同的住户属在鄂返乡住户, 负责该小区体格检查的社区诊所共有 4 名医生, 现要求这 4 名医生都要分配出去, 且每个住户家里都要有医生去检查登记, 则不同的分配方案共有 ()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 72 种

11. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z =$ ()

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

12. 空间点到平面的距离定义如下: 过空间一点作平面的垂线, 这个点和垂足之间的距离叫做这个点到这个平面的距离. 已知平面 α, β, γ 两两互相垂直, 点 $A \in \alpha$, 点 A 到 β, γ 的距离都是 3, 点 P 是 α 上的动点, 满足 P 到 β 的距离与 P 到点 A 的距离相等, 则点 P 的轨迹上的点到 β 的距离的最小值是 ()

- A. $3 - \sqrt{3}$ B. 3 C. $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 动点 P 到直线 $x = -1$ 的距离和他到点 $F(1, 0)$ 距离相等, 直线 AB 过 $(4, 0)$ 且交点 P 的轨迹于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆必过_____.

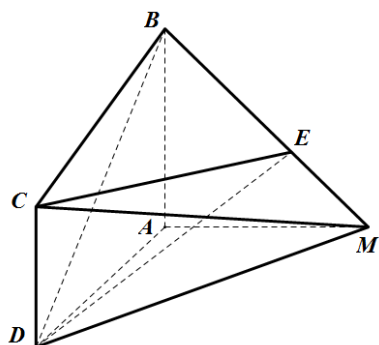
14. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \log_2(1-x)$ 的定义域为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x (x \leq 0) \\ 12 - 3x (x > 0) \end{cases}$, 则 $f(-2) =$ _____; 满足 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围为 _____.

16. 学校艺术节对同一类的 A, B, C, D 四项参赛作品, 只评一项一等奖, 在评奖揭晓前, 甲、乙、丙、丁四位同学对这四项参赛作品预测如下: 甲说: “ A 作品获得一等奖”; 乙说: “ C 作品获得一等奖”; 丙说: “ B, D 两项作品未获得一等奖”; 丁说: “是 A 或 D 作品获得一等奖”, 若这四位同学中只有两位说的话是对的, 则获得一等奖的作品是 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 如图, 在四棱锥 $M - ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $AB = AM = AD = 2$, $MB = MD = 2\sqrt{2}$.

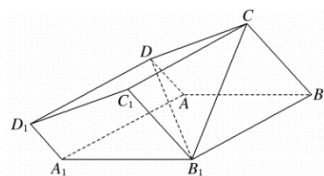


(1) 证明: $AM \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 $CD \parallel AB$, $2CD = AB$, E 为线段 BM 上一点, 且 $BE = 2EM$, 求直线 EC 与平面 BDM 所成角的正弦值.

18. (12 分) 如图所示, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$AB = BC = BB_1 = 2$, $AD = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $\angle ABB_1 = 60^\circ$.



(1) 求证: $AB \perp B_1C$;

(2) 若平面 $ABCD \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $D - B_1C - B$ 的余弦值.

19. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin C = \sin B + \sin(A - B)$.

(1) 求角 A 的大小

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - x + a \ln x$ ($a < 0$), 且 $f(x)$ 只有一个零点.

(1) 求实数 a 的值;

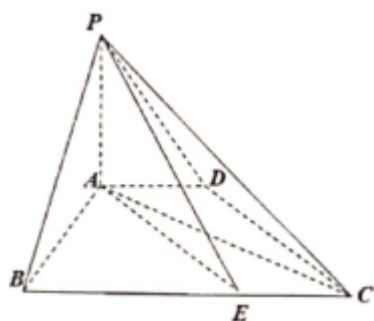
(2) 若 $x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

21. (12 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, a_2, a_4, a_8 分别等于等比数列 $\{b_n\}$ 的第 2 项, 第 3 项, 第 4 项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \dots + \frac{c_n}{a_n} = b_{n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 2020 项的和.

22. (10 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$, $PA = AD = AB = CD = 2$, $BC = 4$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$.



(1) 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 PAB ;

(2) 过 PA 的平面交 BC 于点 E , 若平面 PAE 把四棱锥 $P-ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $A-PE-B$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

设 $|BF_2| = t$, 则 $|BF_1| = 2a - t$, $|AB| = a + t$,

因为 $|AF_1| = a$, 所以 $|AB| > |AF_1|$. 若 $|AF_1| = |BF_1|$, 则 $a = 2a - t$, 所以 $a = t$,

所以 $|AF_1| + |BF_1| = |AB| = 2a$, 不符合题意, 所以 $|BF_1| = |AB|$, 则 $2a - t = a + t$,

所以 $a = 2t$, 所以 $|BF_1| = |AB| = 3t$, $|AF_1| = 2t$, 设 $\angle BAF_1 = 2\theta$, 则 $e = \sin \theta$,

在 $\triangle VABF_1$ 中, 易得 $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, 所以 $1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$, 解得 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (负值舍去),

所以椭圆 Γ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

2、D

【解析】

设 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 联立直线与抛物线方程, 消去 x 、列出韦达定理, 再由直线 $x = my$ 与抛物线的交点求出 A 点坐标, 最后根据 $|BD| = 3|OA|$, 得到方程, 即可求出参数的值;

【详解】

解: 设 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x = my + m \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $y^2 - 4my - 4m = 0$,

$\therefore \Delta = 16m^2 + 16m > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 0$, $\therefore y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4m$.

又由 $\begin{cases} x = my \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $y^2 - 4my = 0$, $\therefore y = 0$ 或 $y = 4m$, $\therefore A(4m^2, 4m)$,

$\therefore |BD| = 3|OA|$,

$\therefore (1+m^2)(y_1 - y_2)^2 = 9(16m^4 + 16m^2)$,

又 $\therefore (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = 16m^2 + 16m$,

$\therefore$ 代入解得 $m = \frac{1}{8}$.

故选: D

【点睛】

本题考查直线与抛物线的综合应用, 弦长公式的应用, 属于中档题.

3、D

【解析】

两边同乘 $-i$, 化简即可得出答案.

【详解】

$i \cdot z = 2 + i$ 两边同乘 $-i$ 得 $z = 1 - 2i$, 共轭复数为 $1 + 2i$, 选 D.

【点睛】

$z = a + bi (a, b \in R)$ 的共轭复数为 $\bar{z} = a - bi$

4、B

【解析】

根据诱导公式化简 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \cos y$ 再分析即可.

【详解】

因为 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \cos y$, 所以 q 成立可以推出 p 成立, 但 p 成立得不到 q 成立, 例如 $\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3}$, 而

$\frac{\pi}{3} \neq \frac{5\pi}{3}$, 所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

故选: B

【点睛】

本题考查充分与必要条件的判定以及诱导公式的运用, 属于基础题.

5、A

【解析】

根据实数 x_0 满足的等量关系, 代入后将方程变形 $a \cdot 2^{x_0} + 4a \cdot 2^{-x_0} = \ln x_0 + 5 - x_0$, 构造函数 $h(x) = \ln x + 5 - x$, 并由导函数求得 $h(x)$ 的最大值, 由基本不等式可求得 $a \cdot 2^{x_0} + 4a \cdot 2^{-x_0}$ 的最小值, 结合存在性问题的求法, 即可求得正数 a 的取值范围.

【详解】

函数 $f(x) = x + a \cdot 2^x$, $g(x) = \ln x - 4a \cdot 2^{-x}$,

由题意得 $f(x_0) - g(x_0) = x_0 + a \cdot 2^{x_0} - \ln x_0 + 4a \cdot 2^{-x_0} = 5$,

即 $a \cdot 2^{x_0} + 4a \cdot 2^{-x_0} = \ln x_0 + 5 - x_0$,

令 $h(x) = \ln x + 5 - x$,

$\therefore h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = 4$, 而 $a \cdot 2^{x_0} + 4a \cdot 2^{-x_0} \geq 2a\sqrt{2^{x_0} \cdot 4 \cdot 2^{-x_0}} = 4a$,

当且仅当 $2^{x_0} = 4 \cdot 2^{-x_0}$, 即当 $x_0 = 1$ 时, 等号成立,

$\therefore 4a \leq 4$,

$\therefore 0 < a \leq 1$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了导数在求函数最值中的应用，由基本不等式求函数的最值，存在性成立问题的解法，属于中档题.

6、C

【解析】

利用基本初等函数的单调性判断各选项中函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性，进而可得出结果.

【详解】

对于A选项，函数 $y = \sqrt{x+1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于B选项，函数 $y = x^2 - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于C选项，函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数；

对于D选项，函数 $y = \log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数在区间上单调性的判断，熟悉一些常见的基本初等函数的单调性是判断的关键，属于基础题.

7、A

【解析】

根据题意，分别求出 $P(X=1)$ ， $P(X=2)$ ， $P(X=3)$ ，再根据离散型随机变量期望公式进行求解即可

【详解】

由题可知 $P(X=1)=p$ ， $P(X=2)=(1-p)p$ ， $P(X=3)=(1-p)^2 p + (1-p)^3 = (1-p)^2$ ，则

$E(X) = P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) = p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 > 1.75$

解得 $p > \frac{5}{2}$ 或 $p < \frac{1}{2}$ ，由 $p \in (0, 1)$ 可得 $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，

答案选A

【点睛】

本题考查离散型随机变量期望的求解，易错点为第三次发球分为两种情况：三次都不成功、第三次成功

8、B

【解析】

分类讨论，分别求出最大元素为3,4,5,6的三个元素子集的个数，即可得解.

【详解】

集合 M 含有 3 个元素的子集共有 $C_6^3 = 20$ ，所以 $k = 20$ 。

在集合 $B_i (i = 1, 2, 3, \dots, k)$ 中：

最大元素为 3 的集合有 $C_2^2 = 1$ 个；

最大元素为 4 的集合有 $C_3^2 = 3$ ；

最大元素为 5 的集合有 $C_4^2 = 6$ ；

最大元素为 6 的集合有 $C_5^2 = 10$ ；

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 6 + 6 \times 10 = 105$ 。

故选：B。

【点睛】

此题考查集合相关的新定义问题，其本质在于弄清计数原理，分类讨论，分别求解。

9、A

【解析】

由抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点 $(5, 0)$ 得双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 $(\pm 5, 0)$ ，求出 $c = 5$ ，由抛物线准线方程

$x = -5$ 被曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$ ，由焦半径公式 $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$ ，联立求解。

【详解】

解：由抛物线 $y^2 = 20x$ ，可得 $2p = 20$ ，则 $p = 10$ ，故其准线方程为 $x = -5$ ，

Q 抛物线 $y^2 = 20x$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点，

$\therefore c = 5$ 。

Q 抛物线 $y^2 = 20x$ 的准线被双曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$ ，

$\therefore \frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$ ，又 $c^2 = 25 = a^2 + b^2$ ，

$\therefore a = 4, b = 3$ ，

则双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查抛物线的性质及利用过双曲线的焦点的弦长求离心率. 弦过焦点时，可结合焦半径公式求解弦长.

10、C

【解析】

先将4名医生分成3组，其中1组有2人，共有 C_4^2 种选法，然后将这3组医生分配到3个不同的住户中去，有 A_3^3 种方法，由分步原理可知共有 $C_4^2 A_3^3$ 种.

【详解】

不同分配方法总数为 $C_4^2 A_3^3 = 36$ 种.

故选：C

【点睛】

此题考查的是排列组合知识，解此类题时一般先组合再排列，属于基础题.

11、A

【解析】

分析：题设中复数满足的等式可以化为 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i$ ，利用复数的四则运算可以求出 z .

详解：由题设有 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i = 1 - 2i + i = 1 - i$ ，故 $z = 1 + i$ ，故选 A.

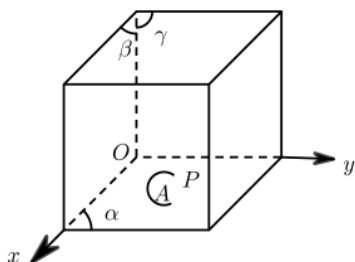
点睛：本题考查复数的四则运算和复数概念中的共轭复数，属于基础题.

12、D

【解析】

建立平面直角坐标系，将问题转化为点 P 的轨迹上的点到 x 轴的距离的最小值，利用 P 到 x 轴的距离等于 P 到点 A 的距离得到 P 点轨迹方程，得到 $6y = (x-3)^2 + 9 \geq 9$ ，进而得到所求最小值.

【详解】



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/718127073006006063>