2024年山东省烟台市招远市高考数学三模试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1.（5分）已知集合$A=\{x|\log_2 x>1\}$，$B=\{x|0<x<4\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$（　　）

A．$\{x|2<x<4\}$　　B．$\{x|2\leqslant x<4\}$　　C．$\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D．$\{x|x\leqslant 2\}$

2.（5分）已知复数z满足：$|z|=|z-(2+2i)|$，则$|z|$的最小值是（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

3.（5分）若椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与椭圆$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$（$b>1$）的离心率相同，则实数$b$的值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{5}{4}$

4.（5分）一袋子中装有5个除颜色外完全相同的小球，其中3个红球，2个黑球，从中不放回的每次取出1个小球，连续取两次，则取出的这两个小球颜色不同的概率为（　　）

A．$\frac{3}{10}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{12}{25}$　　D．$\frac{3}{5}$

5.（5分）若圆$x^2+y^2+ax+\sqrt{3}y+2a-3=0$与$x$轴没有交点，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．(2，6)　　B．(3，5)

C．(2，3)∪(5，6)　　D．(2，3)∪(6，+∞)

6.（5分）若函数$f(x)=sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$在$(0，\frac{\pi}{3})$上有且只有一条对称轴和一个对称中心，则正整数ω的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7.（5分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=4$，$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{a}$，且$\vec{b}\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，则$|\vec{a}+\vec{b}|$的值为（　　）

A．4　　B．$4\sqrt{3}$　　C．16　　D．48

8.（5分）若定义在**R**上的函数$f(x)$满足：$f(\frac{\pi}{4})\neq 0$，$f(\frac{3\pi}{4})=0$，且对任意x_1，$x_2\in$**R**，都有$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=4f(x_1)\cdot f(x_2+\frac{\pi}{4})$，则（　　）

A．$f(0)=0$

B．$f(x)$为偶函数

C．π是$f(x)$的一个周期

D．$f(x)$图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全

部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（6 分）下列说法正确的有（　　）

A．数据 1，2，5，7，10 的 80%分位数为 8.5

B．设随机变量 $X\sim B$（4，p），若 D（X）＝0.75，则 E（X）＝1

C．已知回归直线方程为$\hat{y}=bx-0.3$，若样本中心为（2，4.7），则 b＝2.5

D．x_1，x_2，⋯，x_n（$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$）的极差小于$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{x_2+x_3}{2}$，⋯，$\frac{x_n+x_1}{2}$的极差

（多选）10.（6 分）如图 1，半圆 O 的直径为 4，点 B，C 三等分半圆，P，Q 分别为 OB，OC 的中点，将此半圆以 OA 为母线卷成如图 2 所示的圆锥，D 为 BC 的中点，则在图 2 中，下列结论正确的有（　　）

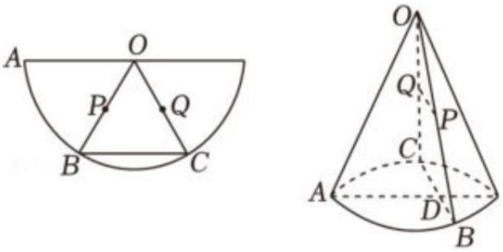


图 1　　　　图 2

A．$PQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

B．$AD\perp$平面 OBC

C．$PQ\parallel$平面 ABC

D．三棱锥 $P-ABC$ 与 $Q-ABC$ 公共部分的体积为$\frac{1}{4}$

（多选）11.（6 分）在锐角△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c=2a\sin B$，则（　　）

A．AB 边上的高为$\frac{c}{2}$

B．$\frac{1}{tanA}+\frac{1}{tanB}$为定值

C．$\frac{sinC}{cosAcosB}$的最小值为 2

D．若 $\tan C=3$，则$a^2+b^2=\frac{4\sqrt{10}}{5}ab$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.（5 分）$(2\sqrt{x}+\frac{1}{4x})^6$展开式的中间一项的系数为 ____________________.

13.（5 分）已知双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，其右焦点为 F，若直线 $y=kx$ 与Γ在第一象限的交点为 P 且 $PF\perp x$ 轴，则实数 k 的值为 ____________________.

14.（5 分）在平面直角坐标系中，若定义两点 A_1（x_1，y_1）和 A_2（x_2，y_2）之间的“t 距离”为$|A_1A_2|_1=$

$max\{\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}$，$\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}\}$，其中 $max\{p，q\}$表示 p，q 中的较大者，则点 A_1（0，0）与点 A_2（1，2）之间的“t 距离”为 ________；若平面内点 A（x，y）和点 A_0（1，1）之间的“t 距离”为$\frac{1}{2}$，则 A 点的轨迹围成的封闭图形的面积为 ________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）为提高学生对航天科技的兴趣，培养学生良好的科学素养，某学校组织学生参加航天科普知识挑战赛，比赛共设置 A，B，C 三个问题，规则如下：

①每位参加者计分器的初始分均为 50 分，答对问题 A，B，C 分别加 10 分，20 分，30 分，答错任一题减 10 分；

②每回答一题，计分器显示累计分数，当累计分数小于 40 分或答完三题时累计分数不足 80 分，答题结束，挑战失败；当累计分数大于或等于 80 分时，答题结束，挑战成功；

③每位参加者按问题 A，B，C 顺序作答，直至挑战结束．设甲同学能正确回答出问题 A，B，C 的概率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，且回答各题正确与否互不影响.

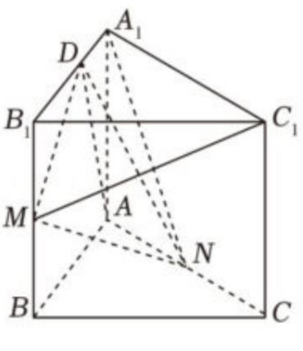
（1）求甲同学挑战成功的概率；

（2）用 X 表示甲同学答题结束时答对问题的个数，求 X 的分布列和数学期望 E（X）.

16.（15 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=BB_1=2$，M，N 分别为 BB_1，AC 中点，且 $C_1M\perp AB$.

（1）证明：$C_1M\perp A_1N$;

（2）若 D 为棱 A_1B_1 上的动点，当 DN 与平面 ABC 所成角最大时，求二面角 $A-DM-N$ 的余弦值.



17.（15 分）在数列$\{a_n\}$中，已知 $2a_n=a_{n+1}+a_na_{n+1}$，$a_1=\frac{4}{3}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=a_n^2-a_n$，S_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，证明：$\frac{4}{9}\leq S_n<1$.

18.（17 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）过点（1，2），F 为 C 的焦点，A，B 为 C 上不同于原点 O 的两点.

（1）若 $OA\perp OB$，试探究直线 AB 是否过定点，若是，求出该定点；若不是，请说明理由；

（2）若 $AF\perp BF$，求△AFB 面积的最小值.

19.（17 分）已知函数 $f(x)=x+ae^{x}$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=3$ 时，若方程 $\frac{x}{f(x)-x}+\frac{f(x)-x}{f(x)}=m+1$ 有三个不等的实根，求实数 m 的取值范围.

2024年山东省烟台市招远市高考数学三模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1．（5分）已知集合$A=\{x|\log_2x>1\}$，$B=\{x|0<x<4\}$，则（$\complement_RA$）$\cap B=$（　　）

A．$\{x|2<x<4\}$　　B．$\{x|2\leqslant x<4\}$　　C．$\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D．$\{x|x\leqslant 2\}$

【解答】解：集合$A=\{x|\log_2x>1\}=\{x|x>2\}$，

则$\complement_RA=\{x|x\leqslant 2\}$，

$B=\{x|0<x<4\}$，

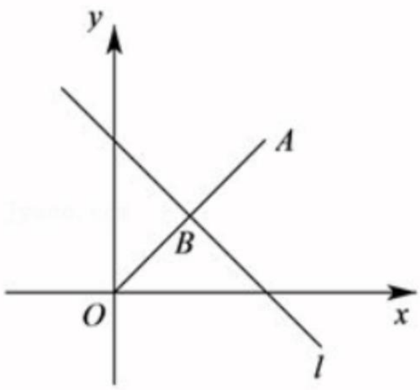
则（$\complement_RA$）$\cap B=\{x|0<x\leqslant 2\}$．

故选：C．

2．（5分）已知复数z满足：$|z|=|z-(2+2i)|$，则$|z|$的最小值是（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【解答】解：由复数模的几何意义知满足$|z|=|z-(2+2i)|$的z对应的点Z在以点O（0，0）和A（2，2）为端点的线段的中垂线l，OA的中点为B（1，1），



$|z|$的最小值就是原点到直线l的距离即为$|OB|=\sqrt{2}$．

故选：B．

3．（5分）若椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与椭圆$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$（$b>1$）的离心率相同，则实数$b$的值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{5}{4}$

【解答】解：$\because$椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

$\therefore$焦距为2，离心率为$\frac{1}{2}$，

又椭圆$x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$b>1$），

∴焦距为 $2\sqrt{b^2-1}$，离心率为$\dfrac{\sqrt{b^2-1}}{b}$，

则$\dfrac{\sqrt{b^2-1}}{b}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

故选：A．

4．（5 分）一袋子中装有 5 个除颜色外完全相同的小球，其中 3 个红球，2 个黑球，从中不放回的每次取出 1 个小球，连续取两次，则取出的这两个小球颜色不同的概率为（　　）

A．$\dfrac{3}{10}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{12}{25}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

【解答】解：记 A 为“取出的这两个小球颜色不同”，

则 P（A）$=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$．

故选：D．

5．（5 分）若圆$x^2+y^2+ax+\sqrt{3}y+2a-3=0$与 x 轴没有交点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．（2，6）　　B．（3，5）

C．（2，3）∪（5，6）　　D．（2，3）∪（6，+∞）

【解答】解：圆 $x^2+y^2+ax+\sqrt{3}y+2a-3=0\Rightarrow(x+\dfrac{a}{2})^2+(y+\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=\dfrac{a^2}{4}-2a+\dfrac{15}{4}$；

圆心$(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$r=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-2a+\dfrac{15}{4}}$；

∵圆与 x 轴没有公共点，

圆心到 x 轴的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$\begin{cases}\dfrac{a^2}{4}-2a+\dfrac{15}{4}>0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-2a+\dfrac{15}{4}}\end{cases}$，解得 $a\in$（2，3）∪（5，6）．

故选：C．

6．（5 分）若函数$f(x)=sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$在$(0, \dfrac{\pi}{3})$上有且只有一条对称轴和一个对称中心，则正整数 ω 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解答】解：∵函数$f(x)=sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$在$(0, \dfrac{\pi}{3})$上有且只有一条对称轴和一个对称中心，

$\therefore \pi < \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$，

解得$\frac{9}{4} < \omega \leq \frac{15}{4}$，又 ω 是正整数，

$\therefore \omega = 3$.

故选：C.

7.（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}| = 4$，$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{a}$，且$\vec{b} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$，则$|\vec{a} + \vec{b}|$的值为（　　）

A．4　　B．$4\sqrt{3}$　　C．16　　D．48

【解答】解：因为$|\vec{a}| = 4$，$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{a}$，

所以$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{16} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$，所以$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$，

因为$\vec{b} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$，

所以$\vec{b} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 2 \times 8 - \vec{b}^2 = 0$，

所以$|\vec{b}| = 4$，

所以$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$.

故选：B.

8.（5 分）若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(\frac{\pi}{4}) \neq 0$，$f(\frac{3\pi}{4}) = 0$，且对任意 x_1，$x_2 \in \mathbf{R}$，都有 $f(x_1+x_2)+f(x_1 - x_2) = 4f(x_1) \cdot f(x_2 + \frac{\pi}{4})$，则（　　）

A．$f(0) = 0$

B．$f(x)$ 为偶函数

C．π 是 $f(x)$ 的一个周期

D．$f(x)$ 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$对称

【解答】解：对于 A：对于 $f(x_1+x_2) + f(x_1 - x_2) = 4f(x_1) f(x_2 + \frac{\pi}{4})$，

令$x_1 = \frac{\pi}{4}$，$x_2 = 0$，得$2f(\frac{\pi}{4}) = 4f(\frac{\pi}{4})f(\frac{\pi}{4})$，

又$f(\frac{\pi}{4}) \neq 0$，

所以$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$，

令 $x_1=x_2=\frac{\pi}{4}$，

则有 $f(\frac{\pi}{2})+f(0)=4f(\frac{\pi}{4})\cdot f(\frac{\pi}{2})=2f(\frac{\pi}{2})$，

所以 $f(\frac{\pi}{2})=f(0)$，

令 $x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$，

则有 $f(\frac{3\pi}{4})+f(\frac{\pi}{4})=4f^2(\frac{\pi}{2})$，

即 $0+\frac{1}{2}=4f^2(0)$，

解得 $f(0)=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 A 错误；

对于 B：对于 $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=4f(x_1)f(x_2+\frac{\pi}{4})$，

取 $x_1=x$，$x_2=\frac{\pi}{2}$，得 $f(x+\frac{\pi}{2})+f(x-\frac{\pi}{2})=0$，

所以 $f(x+\pi)=-f(x)$，

令 $x=-\frac{\pi}{4}$，得 $f(-\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=0$，

所以$f(\frac{\pi}{4})\neq f(-\frac{\pi}{4})$，故 $f(x)$ 不可能是偶函数，故 B 错误；

对于 C：由 B 可知 $f(x+\pi)=-f(x)$，

所以 $f(x+2\pi)=f(x)$，

则 2π 为 $f(x)$ 的一个周期，故 C 错误；

对于 D：对于 $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=4f(x_1)f(x_2+\frac{\pi}{4})$.

取$x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=x$，

得 $f(\frac{\pi}{4}+x)+f(\frac{\pi}{4}-x)=2f(x+\frac{\pi}{4})$，

所以 $f(\frac{\pi}{4}-x)=f(x+\frac{\pi}{4})$.

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$对称，D 正确.

故选：D.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分分，有选错的得 0 分。

（多选）9.（6 分）下列说法正确的有（　　）

A．数据 1，2，5，7，10 的 80%分位数为 8.5

B．设随机变量 $X\sim B$（4，p），若 D（X）＝0.75，则 E（X）＝1

C．已知回归直线方程为$\hat{y}=bx-0.3$，若样本中心为（2，4.7），则 b＝2.5

D．x_1，x_2，…，x_n（$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$）的极差小于$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{x_2+x_3}{2}$，…，$\frac{x_n+x_1}{2}$的极差

【解答】解：∵5×80%＝4，∴数据 1，2，5，7，10 的 80%分位数为$\frac{7+10}{2}$=8.5，故 A 正确；

设随机变量 $X\sim B$（4，p），若 D（X）＝0.75，则 $4p(1-p)=0.75$，解得 $p=\frac{1}{4}$或 $p=\frac{3}{4}$，

则 E（X）＝$4p$＝1 或 E（X）＝$4p$＝3，故 B 错误；

回归直线方程为$\hat{y}=bx-0.3$，若样本中心为（2，4.7），则 $b=\frac{4.7+0.3}{2}$=2.5，故 C 正确；

由 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，得 $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}$，$x_n>\frac{x_n+x_1}{2}$，

则 x_1，x_2，…，x_n（$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$）的极差大于$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{x_2+x_3}{2}$，…，$\frac{x_n+x_1}{2}$的极差，故 D 错误．

故选：AC．

（多选）10．（6 分）如图 1，半圆 O 的直径为 4，点 B，C 三等分半圆，P，Q 分别为 OB，OC 的中点，将此半圆以 OA 为母线卷成如图 2 所示的圆锥，D 为 BC 的中点，则在图 2 中，下列结论正确的有（　　）

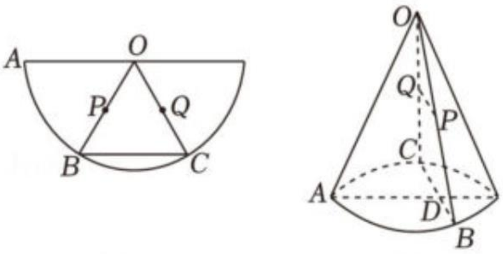


图 1　　　　图 2

A．$PQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

B．$AD\perp$平面 OBC

C．PQ∥平面 ABC

D．三棱锥 $P-ABC$ 与 $Q-ABC$ 公共部分的体积为$\frac{1}{4}$

【解答】解：对于 A：在图 2 中，设圆锥的底面圆半径为 r，

则$2\pi r=\frac{1}{2}\times 2\times 2\pi$，解得 r＝1，

因为在图 1 中，点 B、C 三等分半圆，

所以在图 2 中，点 B、C 为圆锥的底面圆周的三等分点，

所以△ABC 为等边三角形，

所以$\frac{BC}{sin60°} = 2r = 2$，所以$BC = \sqrt{3}$，

又因为点 P、Q 分别是 OB、OC 的中点，

所以$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 正确；

对于 B：若 $AD\perp$平面 OBC，

因为 $AD\subset$平面 ABC，

所以平面 $ABC\perp$平面 OBC，由于 BC 不是圆锥底面的直径，

即平面 OBC 不是轴截面，

故平面 OBC 不会与平面 ABC 垂直，故 B 错误；

对于 C：因为点 P、Q 分别是 OB、OC 的中点，

所以 $PQ// BC$，

因为 $BC\subset$平面 ABC，$PQ\not\subset$平面 ABC，

所以 $PQ//$ 平面 ABC，故 C 错误；

对于 D：连接 BQ，CP 交于点 T，连接 OT 并延长 OT 交 BC 于点 E，

则三棱锥 $P-ABC$ 与三棱锥 $Q-ABC$ 公共部分即为三棱锥 $T-ABC$，

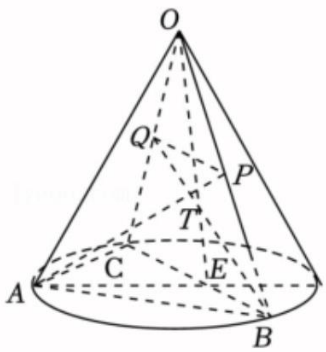
因为点 P、Q 分别是 OB、OC 的中点，

所以 E 为 BC 的中点，且$TE = \frac{1}{3}OE$，

所以$V_{T-ABC} = \frac{1}{3}VO - ABC = \frac{1}{4}$，

所以三棱锥 $P-ABC$ 与三棱锥 $Q-ABC$ 公共部分的体积为$\frac{1}{4}$，故 D 正确．

故选：ACD．



（多选）11．（6 分）在锐角△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c=2a\sin B$，则（　　）

A．AB 边上的高为$\frac{c}{2}$