高等数学（第二版）

无穷级数

傅立叶级数

一、傅立叶级数展开式中的系数

二、傅立叶级数的收敛性

三、周期延拓

四、傅立叶余弦级数和正弦级数

在研究细长绝热杆的传导问题时，法国数学家傅立叶需要把一个函数$f(x)$表示为三角级数。一般说来，如果$f(x)$定义在区间$-l<x<l$上，我们需要知道系数a_0, a_n和$b_n\,(n\geq 1)$，使得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad (1)$$

注意区间$-l<x<l$ 关于原点对称。等式(1)称为f在区间$(-l,l)$上的**傅立叶（Fourier）级数**。这类级数在传导、波动现象、化学制品和污染物的浓度，以及物理世界的其他模型研究中有广泛的科学和工程应用的领域。在这一节中，我们引入一个给定函数的这些重要的三角级数表示。

一、傅立叶级数展开式中的系数

设$f(x)$是定义在对称区间$-l<x<l$上的函数。假定$f(x)$可以表示成由等式(1)给定的三角级数。我们要寻找计算系数a_0, a_n和$b_n (n \geq 1)$的一个方法。计算的关键三角函数系在区间$[-l,l]$上具有正交性，即其中任何两个不同函数的乘积在区间$[-l,l]$上的积分等于零：

1. 三角函数的正交性

(1) $\int_{-l}^{l} 1 \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

(2) $\int_{-l}^{l} 1 \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

(3) $\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0 \qquad (k, n = 1, 2, \ldots)$

(4) $\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0 \qquad (k, n = 1, 2, \ldots; k \neq n)$

(5) $\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0 \qquad (k, n = 1, 2, \ldots; k \neq n)$

上述三角函数系中，任一函数的自乘积在区间$[-l,l]$的积分不等于零：

(6) $\int_{-l}^{l} 1^2 dx = 2l$

(7) $\int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi}{l} x dx = l \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

(8) $\int_{-l}^{l} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = l \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

2. 傅立叶级数的计算

设函数 $f(x)$ 能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (2)$$

(1) 计算 a_0. 将等式(2)的两端逐项积分，然后利用三角函数系的正交性，可得:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cdot 1dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}dx=\frac{a_0 x}{2}\Big|_{-l}^{l}$$

解出 a_0，得 $\quad a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \qquad (3)$

(2)计算 a_n. 我们用 $\cos\frac{n\pi}{l}x$乘等式(2)两端，再在区间 $[-l,l]$ 上积分，并利用三角函数系的正交性，可得：

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx = \int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx + b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx]$$
$$= a_n l$$

解出 a_n

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (4)$$

(3)计算 b_n. 我们用 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 乘等式(2)两端，再在区间$[-l,l]$上积分，并利用三角函数系的正交性，可得:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx]$$

$$=b_n l$$

解出 b_n

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (5)$$

高等数学

上一页 下一页 返 回

等式(3),等式(4)和等式(5)称为**欧拉—傅立叶公式**。系数 a_0, a_n 和b_n 分别由等式(3),等式(4)和等式(5)确定的三角级数(1)称为函数 f 在区间 $-l<x<l$上的傅立叶展开式,其中a_0、a_n和 b_n 为 的傅立叶系数。

例1 求函数 $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases}$ 的傅立叶级数展开式。

解： 本题 $l=\pi$，傅立叶系数计算如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=1+\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin nx\,|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\,|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

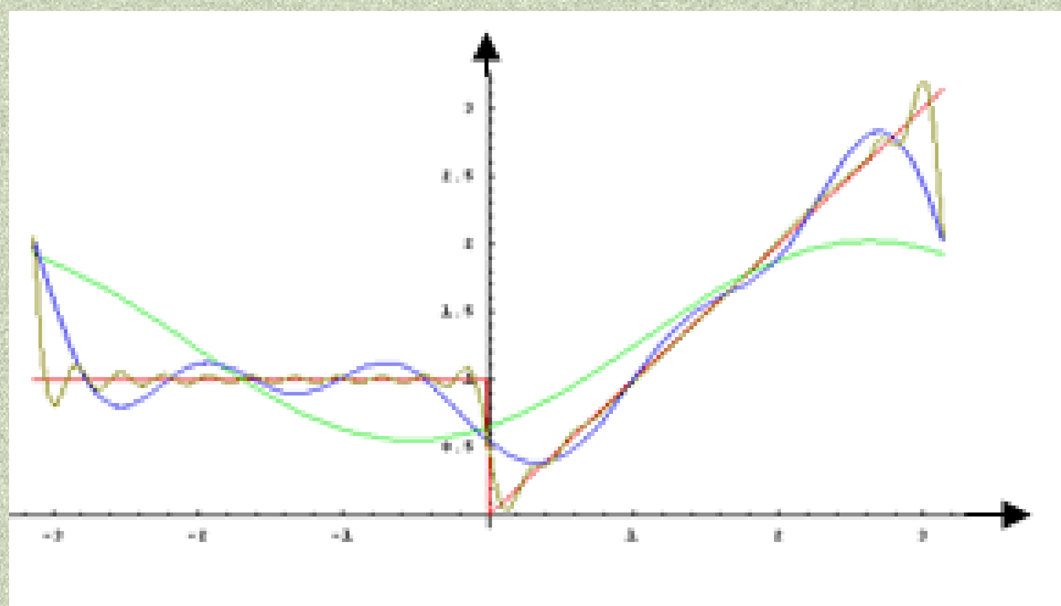
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx$$

$$= \frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}$$

f (x)的傅立叶级数在区间$[-\pi,\pi)$上表达式为

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{\pi n}\sin nx$$

当项数n取1，5和20时傅立叶级数逼近的图象如图。注意随着n的增加，在所有连续点逼近如何越来越接近函数的图象。在$f(x)$的不连续点$x=0$，傅立叶级数逼近趋向0.5，这是跃度的一半，这些结果跟下面叙述的傅立叶收敛定理是一致的。



上一页 下一页 返 回

例2 设是$f(x)$ 周期为2π的函数, 它在$[-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi\le x<0 \\ 0 & 0\le x<\pi \end{cases}$$

将$f(x)$展开成傅立叶级数。

解： 本题$l=\pi$ ，傅立叶系数计算如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi} & n=1,3,5,\cdots \\ 0 & n=2,4,6,\cdots \end{cases}$$