

概率初步

一、课堂目标

1. 掌握事件的相关概念以及事件的关系和运算.
2. 掌握古典概型的概率公式, 并结合枚举的思想计算事件的概率.
3. 掌握概率的基本性质并利用其完成概率的相关运算.
4. 掌握频率与概率的意义以及二者的区别与联系.

【备注】【教师指导】

1. 本讲的**重点**是掌握概率的基本性质和古典概型的特征并会应用在解题中, 以及事件独立性和互斥事件的判断及运算; **难点**是统计和概率的综合题型的求解.
2. 本讲的前置知识是统计, 后置知识是离散型随机变量及其分布列.

二、知识讲解

1. 事件的相关概念

知识精讲

(1) 随机试验

我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验, 简称试验, 常用字母 E 表示.

我们一般研究的是具有以下特点的随机试验:

- ① 试验可以在相同条件下重复进行;
- ② 试验的所有可能结果是明确可知的, 并且不止一个;
- ③ 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个, 但事先不能确定出现哪一个结果.

(2) 有限样本空间

① 样本点: 随机试验 E 的每个可能的基本结果称为样本点.

② 样本空间: 全体样本点的集合称为试验 E 的样本空间 (sample space).

③ 有限样本空间: 一般地, 我们用 Ω 表示样本空间, 用 ω 表示样本点. 在本章中, 我们只讨论 Ω 为有限集的情况. 如果一个随机试验有 n 个可能结果 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 则称样本空间

$\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 为有限样本空间.

(3) 随机事件

①随机事件（事件）：一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示．为了叙述方便，我们将样本空间 Ω 的子集称为随机事件（random event），简称事件．

②基本事件：把只包含一个样本点的事件称为基本事件（elementary event）．

随机事件一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示．在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为事件 A 发生．

③必然事件： Ω 作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，我们称 Ω 为必然事件．

④不可能事件：空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称 $\emptyset$ 为不可能事件．

【备注】【教师指导】

必然事件与不可能事件不具有随机性．为了方便统一处理，将必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形．这样，每个事件都是样本空间 Ω 的一个子集．

经典例题

1. 下列随机事件中，随机试验各指什么？试写出它们的样本空间．

（1）抛掷两枚质地均匀的硬币．

（2）从集合 $A = a, b, c, d$ 中任取2个元素，组成集合 A 的子集．

【备注】【教师指导】

直接考查随机试验和有限样本空间，属于简单题．

【答案】（1）随机试验是指“抛掷两枚质地均匀的硬币一次，观察其落地时朝上的面的情况”，样本空间 $\Omega = \{(\text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}$ ．

（2）随机试验是指“从集合 A 中任取2个元素，组成集合 A 的一个子集”，样本空间 $\Omega = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ ．

【解析】（1）随机试验是指“抛掷两枚质地均匀的硬币一次，观察其落地时朝上的面的情况”，样本点有4个，样本空间 $\Omega = \{(\text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}$ ．

（2）随机试验是指“从集合 A 中任取2个元素，组成集合 A 的一个子集”，样本点共有6个，样本空间 $\Omega = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ ．

【标注】【知识点】基本事件与基本事件空间

巩固练习

2. 先后投掷三枚硬币，观察正反面出现的情况，出现正面记为1，出现反面记为0，则这一事件的样本空间为 _____ .

【答案】 $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

【标注】【知识点】基本事件与基本事件空间

经典例题

3. 下面给出五个事件：

- ①某地2月3日下雪；
- ②函数 $y = a^x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 在定义域上是增函数；
- ③实数的绝对值不小于0；
- ④标准大气压下，水在 1°C 时会结冰；
- ⑤ $a, b \in \mathbf{R}$ ， $ab = ba$.

其中必然事件是 _____ ；不可能事件是 _____ ；随机事件是 _____ . (填序号)

【备注】【教师指导】

本题主要考查随机事件、必然事件和不可能事件的概念辨析.

【答案】 ③⑤；④；①②

【解析】 ①是随机事件，某地在2月3日可能下雪，也可能不下雪 .

②是随机事件，当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在其定义域上是增函数；当 $0 < a < 1$ 是减函数 .

③是必然事件，实数的绝对值都是非负数 .

④是不可能事件，在标准大气压下，水在 0°C 时会结冰 .

⑤是必然事件，若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则 $ab = ba$ 恒成立 .

故答案为：③⑤；④；①② .

【标注】【知识点】不可能事件、必然事件、随机事件

巩固练习

4. 给出下列四个命题：

- ①“三个球全部放入两个盒子，其中必有一个盒子有一个以上的球”是必然事件
- ②“当 x 为某一实数时可使 $x^2 < 0$ ”是不可能事件

- ③“明天兰州要下雨”是必然事件
- ④“从100个灯泡中取出5个，5个都是次品”是随机事件，其中正确命题的序号是 _____ .

【答案】 ①②④

【解析】 在①中，“三个球全部放入两个盒子，其中必有一个盒子有一个以上的球”一定发生，是必然事件，故①正确；

在②中，“当 x 为某一实数时可使 $x^2 < 0$ ”不可能发生，没有那个实数的平方小于0，是不可能事件，故②正确；

在③中，“明天兰州要下雨”是随机事件，故③错误；

在④中，“从100个灯泡中取出5个，5个都是次品”有可能发生，也可能不发生，是随机事件，故④正确．

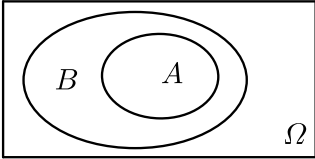
故答案为：①②④．

【标注】 【知识点】 不可能事件、必然事件、随机事件

2. 事件的关系和运算

知识精讲

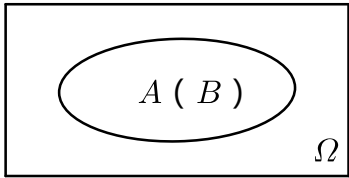
(1) 事件的包含关系

定义	一般地，若事件A发生，则事件B一定发生，就称事件B包含事件A（或事件A包含于事件B）．
符号	$B \supseteq A$ （或 $A \subseteq B$ ）
图示	
注意事项	①不可能事件记作 $\emptyset$ ，显然 $C \supseteq \emptyset$ （ C 为任一事件）； ②事件A也包含于事件A，即 $A \subseteq A$ ； ③事件B包含事件A，其含义就是事件A发生，事件B一定发生，而事件B发生，事件A不一定发生．

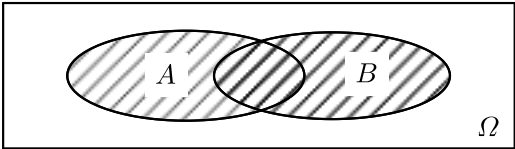
【备注】【教师指导】

事件的包含关系与集合的包含关系相似，不可能事件与空集相似，学习时要注意类比记忆。

(2) 事件的相等关系

定义	一般地，如果事件 B 包含事件 A ，事件 A 也包含事件 B ，即 $B \supseteq A$ ，且 $A \supseteq B$ ，则称事件 A 与事件 B 相等。
符号	$A = B$
图示	 The diagram shows a large rectangle labeled Ω at the bottom right corner. Inside this rectangle is an oval labeled $A(B)$ in the center.
注意事项	①两个相等事件总是同时发生或同时不发生； ②所谓$A = B$，就是A，B是同一事件； ③在验证两个事件是否相等时，常用到事件相等的定义。

(3) 事件的并（或和）

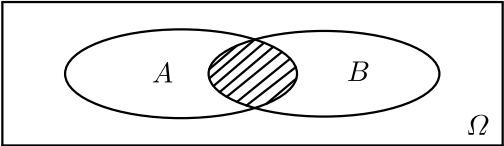
定义	一般地，事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样的 一个事件中的样本点或者在事件 A 中，或者在事件 B 中，我们称这个事件为事件 A 与事件 B 的并事件 (或和事件)。
符号	$A \cup B$ (或 $A + B$)
图示	
注意事项	① $A \cup B = B \cup A$; ②例如，在掷骰子试验中，事件 C_2 ， C_4 分别表示 出现2点，4点这两个事件，则 $C_2 \cup C_4 = \{ \text{出现2} \\ \text{点或4点} \}$ 。

【备注】【教师指导】

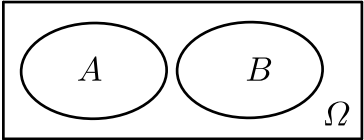
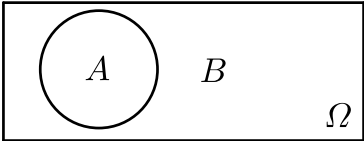
并事件具有三层含义：

- ①事件 A 发生，事件 B 不发生；
- ②事件 A 不发生，事件 B 发生；
- ③事件 A ， B 同时发生。

(4) 事件的交 (或积)

定义	一般地，事件 A 与事件 B 同时发生，这样的—个事件中的样本点既在事件 A 中，也在事件 B 中，我们称这样的—个事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件）。
符号	$A \cap B$ （或 AB ）
图示	
注意事项	① $A \cap B = B \cap A$； ② 例如，擲一枚骰子，事件{出现的点数为奇数} $\cap$ {出现的点数为偶数} = $\emptyset$。

（5）互斥事件和对立事件

互斥事件	定义	一般地，如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，也就是说 $A \cap B$ 是一个不可能事件，即 $A \cap B = \emptyset$ ，则称事件 A 与事件 B 互斥（或互不相容）。
	符号	$A \cap B = \emptyset$
	图示	
	注意事项	例如，在掷骰子试验中，记 $C_1 = \{\text{出现1点}\}$ ， $C_2 = \{\text{出现2点}\}$ ，则 C_1 与 C_2 互斥。
对立事件	定义	一般地，如果事件 A 和事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生，即 $A \cup B = \Omega$ ，且 $A \cap B = \emptyset$ ，那么称事件 A 与事件 B 互为对立。
	符号	$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega$
	图示	
	注意事项	A 的对立事件一般记作 $\bar{A}$ 。

【备注】【教师指导】

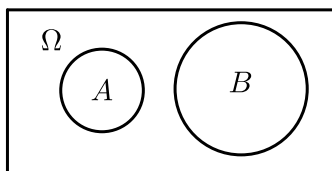
- ①互斥事件同时发生的概率为0。
- ②多个事件的互斥：如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中的任何两个都互斥，就称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥。

(1) 证明事件 A 与事件 B 相等 ($A = B$)，即证明： $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ 。

(2) 若事件 A 的对立事件为事件 $\bar{A}$ ，则 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ 。

经典例题

5. 事件 A 与事件 B 的关系如图所示，则 ()。



A. $A \subseteq B$

B. $A \supseteq B$

C. A 与 B 互斥

D. A 与 B 互为对立事件

【备注】【教师指导】

本题主要考查根据图示判断两个事件的关系。

注意：

互斥事件与对立事件的区别：互斥事件满足 $A \cap B = \emptyset$ ，对立事件满足 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega$

【答案】C

【解析】由题图知，事件 A 与事件 B 不能同时发生，且 $A \cup B \neq \Omega$ ，因此 A 与 B 互斥不对立。故选C。

【标注】【知识点】互斥事件与对立事件的概念辨析；互斥事件与对立事件

6. 从装有2个红球和2个黑球的口袋内任取两个球，那么互斥而不对立的事件是 ()

A. 恰好有一个黑球与恰好有两个红球

B. 至少有一个黑球与至少有一个红球

C. 至少有一个黑球与都是黑球

D. 至少有一个黑球与都是红球

【备注】【教师指导】

本题主要考查互斥事件与对立事件概念的辨析，进一步加强学生对互斥事件与对立事件概念的理解。

【答案】A

【解析】从装有2个红球和2个黑球的口袋内任取两个球，

在A中，恰好有一个黑球与恰好有两个红球是互斥而不对立事件，故A正确；

在B中，至少有一个黑球与至少有一个红球能同时发生，不是互斥事件，故B错误；

在C中，至少有一个黑球与都是黑球能同时发生，不是互斥事件，故C错误；
在D中，至少有一个黑球与都是红球是对立事件，故D错误。
故选A.

【标注】【知识点】互斥事件与对立事件；互斥事件与对立事件的概念辨析

巩固练习

7. 一个人打靶时连续射击两次，事件“至少有一次中靶”的互斥事件是（ ）.

- A. 至多有一次中靶 B. 只有一次中靶 C. 两次都中靶 D. 两次都不中靶

【答案】 D

【解析】 一个人打靶时连续射击两次，所包含的所有事件有“中靶一次”“中靶两次”“两次都不中靶”，事件“至少有一次中靶”包括“中靶一次”“中靶两次”，其互斥事件为“两次都不中靶”.

【标注】【知识点】互斥事件与对立事件；互斥事件与对立事件的概念辨析

8. 袋中装有大小和质地相同的3个红球2个白球和1个黑球，从中任取2个，则互斥而不对立的两个事件是（ ）.

- A. 至少有1个白球；都是白球
B. 至少有1个白球；至少有1个红球
C. 至少有1个白球；1个红球1个黑球
D. 恰有1个白球；1个白球1个黑球

【答案】 C

【解析】 在A中，“至少有1个白球”和“都是白球”两个事件能同时发生，不是互斥事件，A不符合题意；

在B中，“至少有1个白球”和“至少有1个红球”两个事件能同时发生，不是互斥事件，B不符合题意；

在C中，“至少有1个白球”和“1个红球1个黑球”两个事件不能同时发生但能同时不发生，是互斥而不对立的两个事件，C符合题意；

在D中，“恰有1个白球”和“1个白球1个黑球”两个事件能同时发生，不是互斥事件，D不符合题意.

【标注】【知识点】互斥事件与对立事件；互斥事件与对立事件的概念辨析

3. 古典概型

知识精讲

(1) 事件的概率

对随机事件发生可能性大小的度量（数值）称为事件的概率，事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示．

(2) 古典概型的定义

考察一些试验，它们具有如下共同特征：

①有限性：样本空间的样本点只有有限个；②等可能性：每个样本点发生的可能性相等．

将具有以上两个特征的试验称为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称古典概型．

(3) 古典概型的概率公式

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 k 个样本点，则定义事件

A 的概率： $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ ．

其中， $n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数．

经典例题

9. 从 $1, 2, 3, \dots, 30$ 中任取一个数，它是偶数或能被3整除的数的概率为（ ）．

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【备注】【教师指导】

本题主要考查古典型的概率计算问题．

求古典概型概率的步骤：

第一步：判断本试验是否为古典概型，设出事件 A ；

第二步：分别求出基本事件的总数 n 与所求事件 A 中所包含的基本事件个数 m ；

第三步：利用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 求出事件 A 的概率．

【答案】D

【解析】 $1, 2, 3, \dots, 30$ 中的偶数或能被3整除的数有 $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16$

, $18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30$ ，共20个，

则所求概率为 $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ ，

故选D．

【标注】【素养】数学运算；数据分析

【知识点】古典概型的概率计算（不涉及计数原理）

10. 从分别写有1, 2, 3, 4, 5的5张卡片中随机抽取1张, 放回后再随机抽取1张, 则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为().
- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{5}$

【备注】【教师指导】

本题主要考查古典型的概率计算问题.

求古典概型概率的步骤:

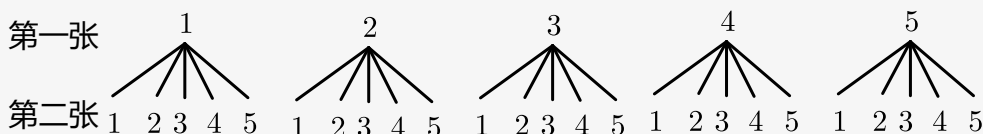
第一步: 判断本试验是否为古典概型, 设出事件 A ;

第二步: 分别求出基本事件的总数 n 与所求事件 A 中所包含的基本事件个数 m ;

第三步: 利用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 求出事件 A 的概率.

【答案】D

【解析】方法一: 从5张卡片中随机抽取1张, 放回后再随机抽取1张的情况的树状图如图:



基本事件总数为25, 第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的事件数为10, 所以所求概率 $P = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, 故选D.

方法二: 先后有放回地抽取2张卡片的情况有(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), 共25种.

其中满足条件的有(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), 共10种情况.

因此所求的概率为 $P = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

故选D.

【标注】【知识点】古典概型

【素养】数学运算

巩固练习

11. 柜子里有3双不同的鞋子, 随机地取出2只, 则取出的2只鞋子刚好成对的概率为 ____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

记3双不同的鞋依次为 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ，随机取出2只，情况有 $(A_1A_2), (A_1B_1), (A_1B_2), (A_1C_1), (A_1C_2), (A_2B_1), (A_2B_2), (A_2C_1), (A_2C_2), (B_1B_2), (B_1C_1), (B_1C_2), (B_2C_1), (B_2C_2), (C_1C_2)$ 共15种，其中刚好成对的有 $(A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2)$ ，共3种情况， $\therefore$ 所求概率 $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ 。

【标注】【知识点】古典概型的概率计算（不涉及计数原理）

【素养】数学运算

12. 在大小相同的5个球中，2个是红球，3个是白球，若从中任取2个，则所取的2个球中至少有一个红球的概率是_____。

【答案】 $\frac{7}{10}$

【解析】 记大小相同的5个球分别为，

红₁，红₂，白₁，白₂，白₃，

则基本事件为，

$(\text{红}_1, \text{红}_2), (\text{红}_1, \text{白}_1), (\text{红}_1, \text{白}_2), (\text{红}_1, \text{白}_3),$

$(\text{红}_2, \text{白}_1), (\text{红}_2, \text{白}_2), (\text{红}_2, \text{白}_3),$

$(\text{白}_1, \text{白}_2), (\text{白}_1, \text{白}_3), (\text{白}_2, \text{白}_3),$

共10个，

其中至少有一个红球的事件包括7个基本事件，

所以所求事件的概率为 $\frac{7}{10}$ 。

【标注】【知识点】古典概型

4. 概率的基本性质

知识精讲

一般地，概率有如下性质：

性质1：对任意的事件 A ，都有 $P(A) \geq 0$ 。

性质2：必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0，即 $P(\Omega) = 1$ ， $P(\emptyset) = 0$ 。

性质3：如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

互斥事件的概率加法公式可以推广到多个事件的情况。如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 两两互斥，那么事件 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ 发生的概率等于这 m 个事件分别发生的概率之和，即

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/725201004032012031>