

专题 08 解三角形及其应用

(思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧+易混易错)

思维构建 · 理清脉络



知识盘点 · 查漏补缺

知识点 1 正、余弦定理及应用

1、正、余弦定理与变形

定理	正弦定理	余弦定理
内容	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B;$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
变形	(1) $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C;$ (2) $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C;$ (3) $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2R$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$ $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac};$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

【注意】若已知两边和其中一边的对角, 解三角形时, 可用正弦定理. 在根据另一边所对角的正弦值确定角的值时, 要注意避免增根或漏解, 常用的基本方法就是注意结合“大边对大角, 大角对大边”及三角形内角和定理去考虑问题.

2、解三角形中的常用结论

(1) 三角形内角和定理: 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi$; 变形: $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}$.

(2) 三角形中的三角函数关系

$$\textcircled{1}\sin(A+B)=\sin C; \quad \textcircled{2}\cos(A+B)=-\cos C; \quad \textcircled{3}\sin \frac{A+B}{2}=\cos \frac{C}{2}; \quad \textcircled{4}\cos \frac{A+B}{2}=\sin \frac{C}{2}.$$

(3) 三角形中的射影定理: 在 $\triangle ABC$ 中, $a=b\cos C+c\cos B$; $b=a\cos C+c\cos A$; $c=b\cos A+a\cos B$.

(4) 三角形中的大角对大边: 在 $\triangle ABC$ 中, $A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B$.

3、三角形常用面积公式

(1) $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a(h_a \text{ 表示边 } a \text{ 上的高});$

(2) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A;$

(3) $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)(r \text{ 为内切圆半径}).$

知识点 2 解三角形的实际应用

名称	意义	图形表示
仰角与俯角	在目标视线与水平视线所成的角中, 目标视线在水平视线上方的叫做仰角, 目标视线在水平视线下方的叫做俯角	
方位角	从某点的指北方向线起按顺时针方向到目标方向线之间的夹角叫做方位角, 方位角 θ 的范围是 $0^\circ\leq\theta<360^\circ$	
方向角	正北或正南方向线与目标方向线所成的锐角, 通常表达为北(南)偏东(西)	例: (1)北偏东 α : (2)南偏西 α :

【注意】(1) 方位角和方向角本质上是一样的, 方向角是方位角的一种表达形式, 是同一问题中对角的不同描述.

(2) 将三角形的解还原为实际问题时, 要注意实际问题中的单位、近似值要求, 同时还要注意所求的结果是否符合实际情况.



重难点 01 解三角形中的最值范围问题

1、三角形中的最值、范围问题的解题策略

(1) 定基本量: 根据题意或几何图形厘清三角形中边、角的关系, 利用正、余弦定理求出相关的边、角或边角关系, 并选择相关的边、角作为基本量, 确定基本量的范围.

(2) 构造函数：根据正、余弦定理或三角恒等变换将待求范围的变量用关于基本量的函数解析式表示.

(3) 求最值：利用基本不等式或函数的单调性等求最值.

2、求解三角形中的最值、范围问题的注意点

(1) 涉及求范围的问题，一定要搞清已知变量的范围，利用已知的范围进行求解，已知边的范围求角的范围时可以利用余弦定理进行转化.

(2) 注意题目中的隐含条件，如 $A+B+C=\pi$ ， $0 < A < \pi$ ， $b-c < a < b+c$ ，三角形中大边对大角等.

类型1 角或三角函数值的最值范围

【典例1】(23-24 高三下·山西·模拟预测)钝角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a \cos B = c \sin A$ ，则 $\sin A + \sqrt{2} \sin B$ 的最大值是_____.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】因为 $a \cos B = c \sin A$ ，由正弦定理得 $\sin A \cos B = \sin C \sin A$ ，

又因为 $A \in (0, \pi)$ ，可得 $\sin A \neq 0$ ，所以 $\sin C = \cos B$ ，则 $C = \frac{\pi}{2} - B$ 或 $C = \frac{\pi}{2} + B$.

当 $C = \frac{\pi}{2} - B$ 时，可得 $A = \frac{\pi}{2}$ ，与 $\triangle ABC$ 是钝角三角形矛盾，所以 $C = \frac{\pi}{2} + B$ ，

$$\text{由} \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ A+B+C=\pi \end{cases}, \text{则 } A = \frac{\pi}{2} - 2B > 0, \text{可得 } 0 < B < \frac{\pi}{4},$$

所以 $\sin A + \sqrt{2} \sin B = \sin(B+C) + \sqrt{2} \sin B = \cos 2B + \sqrt{2} \sin B$

$$= -2\sin^2 B + \sqrt{2} \sin B + 1 = -2 \left(\sin B - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \frac{5}{4},$$

所以当 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时， $\sin A + \sqrt{2} \sin B$ 的最大值为 $\frac{5}{4}$.

【典例2】(23-24 高三下·福建厦门·三模)记锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $2 \cos C = \frac{3b}{a} - \frac{a}{b}$ ，则 B 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$

【解析】因为 $2 \cos C = \frac{3b}{a} - \frac{a}{b}$ ，所以 $2ab \cos C = 3b^2 - a^2$ ，

由余弦定理可得： $2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$ ，

可得 $b^2 = a^2 - \frac{1}{2}c^2$ ，在锐角 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得：

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(a^2 - \frac{1}{2}c^2\right)}{2ac} = \frac{\frac{3}{2}c^2}{2ac} = \frac{3}{4} \cdot \frac{c}{a},$$

$$\text{因为 } \begin{cases} a^2 + b^2 > c^2 \\ b^2 + c^2 > a^2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a^2 + a^2 - \frac{1}{2}c^2 > c^2 \\ a^2 - \frac{1}{2}c^2 + c^2 > a^2 \end{cases}, \text{ 即 } 2a^2 > \frac{3}{2}c^2, \text{ 所以 } \frac{c}{a} < \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{3}{4} \cdot \frac{c}{a} < \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

类型2 边或周长的最值范围

【典例1】(23-24 高三下·江苏·月考) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $b^2 - a^2 = ac$ 。

(1) 若 $B = 60^\circ$ 求 C 的大小；

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围。

【答案】(1) 90° ；(2) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

【解析】(1) 由题意，在 $\triangle ABC$ 中， $b^2 - a^2 = ac$ ，

$$\text{由余弦定理得， } a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B = b^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B - a^2 = ac, \therefore c - 2a \cos B = a,$$

$$\therefore A + B + C = 180^\circ,$$

$$\therefore \sin(A + B) - 2\sin A \cos B = \sin A \Rightarrow \cos A \sin B - \sin A \cos B = \sin A,$$

$$\therefore \sin(B - A) = \sin A \therefore B - A = A \text{ 或 } B - A + A = \pi \text{ (舍)}, \therefore B = 2A$$

$$\therefore B = 60^\circ, \therefore A = 30^\circ, \therefore C = 180^\circ - A - B = 90^\circ.$$

(2) 由题意及 (1) 得，在 $\triangle ABC$ 中， $B = 2A$ ，

$$\text{由正弦定理得， } \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = 2\cos A,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形，

$$\therefore \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - A - 2A < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{解得： } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \sqrt{2} < 2\cos A < \sqrt{3},$$

$\therefore \frac{b}{a}$ 的取值范围为 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

【典例 2】 (23-24 高三下·安徽淮北·二模) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c - b = 2c \sin^2 \frac{A}{2}$

(1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 若 $c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

【答案】 (1) $\triangle ABC$ 是直角三角形; (2) $\sqrt{2} + 1$

【解析】 (1) 由 $c - b = 2c \sin^2 \frac{A}{2}$, 可得 $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$, 所以 $\frac{1-\cos A}{2} = \frac{c-b}{2c}$,

即 $\frac{1}{2} - \frac{\cos A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2c}$, 所以 $\cos A = \frac{b}{c}$,

又由余弦定理得 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{c}$, 可得 $a^2 + b^2 = c^2$, 所以 $C = \frac{\pi}{2}$,

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形

(2) 由 (1) 知, $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $c = 1$, 可得 $a = \sin A, b = \cos A$,

所以 $\triangle ABC$ 周长为 $1 + \sin A + \cos A = 1 + \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可得 $A + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$,

所以, 当 $A = \frac{\pi}{4}$ 时, 即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 周长有最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

类型 3 三角形面积的最值范围

【典例 1】 (23-24 高三下·广东茂名·一模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且

$$b \sin(B+C) = a \sin \frac{A+C}{2}.$$

(1) 求 B 的大小;

(2) 若 D 是 AC 边的中点, 且 $BD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $B = \frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】 (1) $\because A + B + C = \pi$, $\therefore \sin A = \sin(B+C)$, $\therefore b \sin A = a \sin \frac{\pi-B}{2} = a \cos \frac{B}{2}$,

$\therefore$ 由正弦定理可得 $\sin B \sin A = \sin A \cos \frac{B}{2}$,

$\therefore \sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$, $\therefore 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin A = \sin A \cos \frac{B}{2}$,

$\because A, B \in (0, \pi), \sin A \neq 0, \cos \frac{B}{2} \neq 0, \therefore \sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$;

(2) 依题意, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac$,

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BD}|, |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 4, (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = 16,$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 + 2ac \times \cos \frac{\pi}{3} = 16,$$

即 $c^2 + a^2 + ac = 16 \geq 3ac$, 当且仅当 $a = c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立,

即 $ac \leq \frac{16}{3}$, $\therefore \triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【典例 2】(23-24 高三下·湖北武汉·二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(2a - c)\cos B - b\cos C = 0$.

(1) 求 B ;

(2) 已知 $b = \sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{2}a + 2c$ 的最大值.

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{3}$; (2) $\sqrt{21}$.

【解析】(1) $\because (2a - c)\cos B - b\cos C = 0$,

由正弦定理得 $(2\sin A - \sin C)\cos B - \sin B\cos C = 0$,

$2\cos B\sin A - \cos B\sin C - \sin B\cos C = 0$, 即 $2\cos B\sin A = \sin B\cos C + \cos B\sin C$,

所以 $2\cos B\sin A = \sin(B + C) = \sin A$,

$\because A \in (0, \pi), \therefore \sin A \neq 0, \therefore \cos B = \frac{1}{2}$,

$\because 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3}$;

(2) 由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$,

$$\therefore \frac{1}{2}a + 2c = \sin A + 4\sin C = \sin A + 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$$

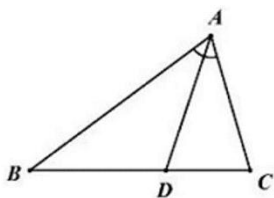
$$= \sin A + 2\sqrt{3}\cos A + 2\sin A = 3\sin A + 2\sqrt{3}\cos A = \sqrt{21}\sin(A + \varphi),$$

又 $\because 0 < A < \frac{2\pi}{3}$, φ 为锐角, $\therefore \sqrt{21}\sin(A + \varphi)$ 的最大值为 $\sqrt{21}$,

$$\therefore \frac{1}{2}a + 2c \text{ 的最大值为 } \sqrt{21}.$$

重难点 02 解三角形角平分线的应用

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, 角 A, B, C 所对的边分别记为 a, b, c



(1) 利用角度的倍数关系: $\angle BAC = 2\angle BAD = 2\angle CAD$

(2) 内角平分线定理: AD 为 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAC$ 的平分线, 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

说明: 三角形内角平分线性定理将对边所成的线段比转化为对应的两边之比, 再结合抓星结构, 就可以转化为向量了, 一般的, 涉及到三角形中“定比”类问题, 运用向量知识解决起来都较为简捷。

(3) 等面积法: 因为 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$, 所以 $\frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc \sin A$,

所以 $(b+c)AD = 2bc \cos \frac{A}{2}$, 整理的: $AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$ (角平分线长公式)

【典例 1】(23-24 高三下·江西·模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 其外接圆的半径为 $2\sqrt{3}$, 且 $b \cos C = a + \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $\angle B$ 的角平分线交 AC 于点 $D, BD = \sqrt{3}$, 点 E 在线段 AC 上, $EC = 2EA$, 求 $\triangle BDE$ 的面积.

【答案】(1) $B = \frac{2\pi}{3}$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】(1) 因为 $b \cos C = a + \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$,

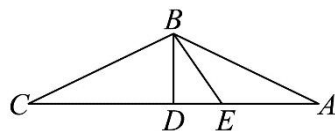
由正弦定理可得 $\sin B \cos C = \sin A + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B$,

又 $A = \pi - (B + C)$, 所以 $\sin B \cos C = \sin(B + C) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B$,

所以 $\sin B \cos C = \sin B \cos C + \cos B \sin C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B$,

即 $\sin C \cos B + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B = 0$,

$\therefore C \in (0, \pi)$, 故 $\sin C \neq 0$,



$$\therefore \cos B + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin B = 0, \text{ 即 } \tan B = -\sqrt{3},$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \text{ 则 } B = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 由(1)可知, $B = \frac{2\pi}{3}$, 又外接圆的半径为 $2\sqrt{3}$;

$$\text{由正弦定理可知 } \frac{b}{\sin B} = 4\sqrt{3}, \text{ 所以 } b = 4\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 6,$$

$$\text{因为 } BD \text{ 是 } \angle ABC \text{ 的平分线, 故 } \angle CBD = \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又 } BD = \sqrt{3}, \text{ 由 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD},$$

$$\text{可得 } \frac{1}{2} ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} c \cdot \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } ac = \sqrt{3}(a+c). \quad ①$$

$$\text{由余弦定理可知, } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } (a+c)^2 - ac = 36. \quad ②$$

$$\text{由 } ①② \text{ 可知 } a = c = 2\sqrt{3}. \text{ 所以 } BD \perp AC,$$

$$\text{又 } \because EC = 2AE, \text{ 则 } DE = 1,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【典例 2】(23-24 高三下·河北沧州·模拟预测)在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a^2 = c(c+b)$.

(1) 求证: $B + 3C = \pi$;

(2) 若 $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D , 且 $a = 12$, $b = 7$, 求 BD 的长.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $4\sqrt{6}$.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理 $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos A$ 及 $a^2 = c(c+b)$,

$$\text{得 } b^2 - 2cb \cos A = bc, \text{ 即 } b - 2c \cos A = c,$$

$$\text{由正弦定理, 得 } \sin B - 2 \sin C \cos A = \sin C,$$

$$\text{即 } \sin C = \sin(C+A) - 2 \sin C \cos A = \sin A \cos C - \cos A \sin C = \sin(A-C),$$

$$\text{由 } 0 < C < \pi, \text{ 得 } \sin(A-C) = \sin C > 0, \text{ 则 } 0 < A-C < A < \pi,$$

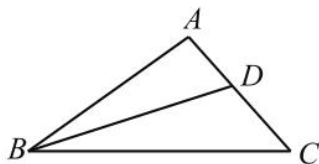
$$\text{因此 } C = A-C, \text{ 即 } A = 2C, \text{ 则 } 2C + B + C = \pi,$$

$$\text{所以 } B + 3C = \pi.$$

(2) 由 $a^2 = c(c+b)$, 得 $12^2 = c(c+7)$, 由 $c > 0$, 得 $c = 9$.

$$\text{在 } \triangle ABD, \triangle BCD \text{ 中, 由正弦定理, 得 } \frac{AB}{AD} = \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \angle CBD} = \frac{BC}{CD},$$

$$\text{则 } \frac{9}{AD} = \frac{12}{7-AD}, \text{ 解得 } AD = 3, \text{ 从而 } DC = 4,$$



又 $\cos \angle ADB + \cos \angle CDB = 0$,

由余弦定理, 得 $\frac{3^2 + BD^2 - 9^2}{2 \times 3BD} + \frac{4^2 + BD^2 - 12^2}{2 \times 4BD} = 0$, 解得 $BD = 4\sqrt{6}$,

所以 BD 的长为 $4\sqrt{6}$.

重难点 03 解三角形中线的应用

1、中线长定理: 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的中线, 则 $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

【点睛】灵活运用同角的余弦定理, 适用在解三角形的题型中

2、向量法: $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc \cos A)$

【点睛】适用于已知中线求面积 (已知 $\frac{BD}{CD}$ 的值也适用).

【典例 1】(23-24 高三下·山西·三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知

$A = \frac{2\pi}{3}, b^2 + c^2 = 24, \triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 2\sqrt{3}, D$ 是边 AC 的中点, 则 BD 长为 ()

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $2\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $\sqrt{21}$

【答案】D

【解析】由 $A = \frac{2\pi}{3}, \triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 2\sqrt{3}$, 得 $a = 2R \sin A = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$,

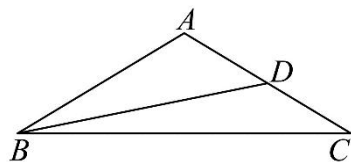
由 $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos A$ 和 $b^2 + c^2 = 24$ 得 $ab = 12$,

又 $\begin{cases} b^2 + c^2 = 24 \\ bc = 12 \end{cases}$, 解得 $b = c = 2\sqrt{3}$, 所以 $B = C = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

因为 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 的中点, 所以 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$,

于是 $|\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{BA}^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos \angle ABC + \overrightarrow{BC}^2}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + \sqrt{3}ca + a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{12 + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times 6 + 36} = \sqrt{21}$. 故选: D.



【典例 2】(23-24 高三下·黑龙江哈尔滨·三模) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = \sqrt{3}, BC$ 边上中线 AD 长为 1, 则 bc 最大值为 ()

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】由题意得 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$, 所以 $\cos \angle ADB + \cos \angle ADC = 0$,

又 $a = \sqrt{3}$ ，且 D 是 BC 的中点，所以 $DB = DC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

在 $\triangle ABD$ 中， $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - c^2}{2AD \cdot BD} = \frac{\frac{7}{4} - c^2}{\sqrt{3}}$ ，

在 $\triangle ADC$ 中， $\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - b^2}{2AD \cdot CD} = \frac{\frac{7}{4} - b^2}{\sqrt{3}}$ ，

所以 $\cos \angle ADC + \cos \angle ADB = \frac{\frac{7}{4} - b^2}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{7}{4} - c^2}{\sqrt{3}} = 0$ ，

即 $b^2 + c^2 = \frac{7}{2}$ ，得 $2bc \leq b^2 + c^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow bc \leq \frac{7}{4}$ ，当且仅当 $b = c = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 取等号，故选：A



方法技巧 · 逆袭学霸

一、利用正、余弦定理求解三角形的边角问题，实质是实现边角的转化，解题的思路是：

1、选定理.

- (1) 已知两角及一边，求其余的边或角，利用正弦定理；
- (2) 已知两边及其一边的对角，求另一边所对的角，利用正弦定理；
- (3) 已知两边及其夹角，求第三边，利用余弦定理；
- (4) 已知三边求角或角的余弦值，利用余弦定理的推论；
- (5) 已知两边及其一边的对角，求另一边，利用余弦定理；

2、巧转化：化边为角后一般要结合三角形的内角和定理与三角恒等变换进行转化；若将条件转化为边之间的关系，则式子一般比较复杂，要注意根据式子结构特征灵活化简.

3、得结论：利用三角函数公式，结合三角形的有关性质（如大边对大角，三角形的内角取值范围等），并注意利用数形结合求出三角形的边、角或判断出三角形的形状等。

【典例 1】(23-24 高三下·浙江金华·三模) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{7}$ ， $b = 2$ ， $A = 60^\circ$ ，则 c 为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 1 或 3

【答案】C

【解析】由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ，

即 $\frac{2^2 + c^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2c} = \frac{1}{2}$ ，即 $c^2 - 2c - 3 = 0$ ，解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍). 故选：C.

【典例2】(23-24 高三下·江苏·二模) 设钝角 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $a=2$, $b\sin A=\sqrt{3}$, $c=3$, 则 $b=$ _____.

【答案】 $\sqrt{19}$

【解析】由余弦定理得, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 9 - 4}{6b} = \frac{b^2 + 5}{6b}$,

而由 $b\sin A = \sqrt{3}$, 得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{b}$,

因为 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 且 $c > a$, 故 A 为锐角, 所以 $\cos A = \sqrt{1 - \frac{3}{b^2}}$,

所以 $\sqrt{1 - \frac{3}{b^2}} = \frac{b^2 + 5}{6b}$, 解得 $b^2 = 7$ 或 $b^2 = 19$,

当 $b^2 = 7$ 时, 即 $b = \sqrt{7}$, $c > b > a$, 由大边对大角得: 最大角为 C ,

$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba} = \frac{7 + 4 - 9}{6 \times \sqrt{7}} > 0$, 故 C 为锐角, 不符合题意;

当 $b^2 = 19$ 时, 即 $b = \sqrt{19}$, $b > c > a$, 由大边对大角得: 最大角为 B ,

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{9 + 4 - 19}{6 \times 2} < 0$, 故 B 是钝角, 符合题意.

【典例3】(23-24 高三下·广东江门·二模) P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle ABP = 45^\circ, \angle PBC = \angle PCB = \angle ACP = 30^\circ$, 则 $\tan \angle BAP =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

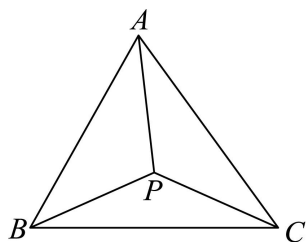
D. $\frac{1}{2}$

【答案】 D

【解析】因为 $\angle ABP = 45^\circ, \angle PBC = \angle PCB = \angle ACP = 30^\circ$,

所以 $\angle BAC = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$,

设 $\angle BAP = \alpha$, 因为 $\angle PBC = \angle PCB$, 所以 $BP = CP$.



在 $\triangle ABP, \triangle ACP$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{AP}{BP} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha}, \frac{AP}{CP} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)}$,

$$\text{则 } \frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)}, \text{ 即 } \sin 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha) = \sin 30^\circ \sin \alpha,$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha, \text{ 解得 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}. \text{ 故选: D}$$

二、判定三角形形状的两种常用途径

1、角化边：利用正弦定理、余弦定理化角为边，通过代数恒等变换，求出边与边之间的关系进行判断；

2、边化角：通过正弦定理和余弦定理，化边为角，利用三角变换得出三角形内角之间的关系进行判断

【典例 1】(23-24 高三下·湖南衡阳·模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\sin 2A = \sin 2B$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.

【答案】等腰三角形或直角三角形.

【解析】因为 $\sin 2A = \sin 2B$ ，可得 $2\sin A \cos A = 2\sin B \cos B$ ，

$$\text{由正弦定理和余弦定理，可得 } 2a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 2b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{整理得 } a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(a^2 + c^2 - b^2), \text{ 即 } a^2c^2 - a^4 - b^2c^2 + b^4 = 0,$$

$$\text{即 } c^2(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0, \text{ 可得 } (a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

$$\text{所以 } a = b \text{ 或 } a^2 + b^2 = c^2, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 是等腰三角形或直角三角形.}$$

【典例 2】(23-24 高三下·河北秦皇岛·三模) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $B = 2C$ ， $b = \sqrt{2}a$ ，则 ()

A. $\triangle ABC$ 为直角三角形

B. $\triangle ABC$ 为锐角三角形

C. $\triangle ABC$ 为钝角三角形

D. $\triangle ABC$ 的形状无法确定

【答案】A

【解析】由 $b = \sqrt{2}a$ ，可得 $\sin B = \sqrt{2} \sin A$ ，

$$\text{则 } \sin 2C = \sqrt{2} \sin(\pi - 3C) = \sqrt{2} \sin 3C,$$

$$\sin 2C = \sqrt{2} \sin 2C \cos C + \sqrt{2} \cos 2C \cdot \sin C,$$

$$2 \cos C = 2\sqrt{2} \cos^2 C + \sqrt{2}(2 \cos^2 C - 1),$$

$$\text{即 } 4\sqrt{2} \cos^2 C - 2 \cos C - \sqrt{2} = 0,$$

$$\text{由 } B = 2C > C, \text{ 故 } C \text{ 只能为锐角, 可得 } \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < C < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{2}. \text{ 故选: A.}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/725243112314011310>