

B样条曲线

- 1972年，Gordon、Riesenfeld等人提出了B样条方法，在保留Bezier方法全部优点的同时，克服了Bezier方法的弱点。

Bezier曲线



Bernstein基底

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i \cdot (1-t)^{n-i}, (i = 0, 1, \dots, n)$$

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

$$B_{0,0}(t) = 1$$

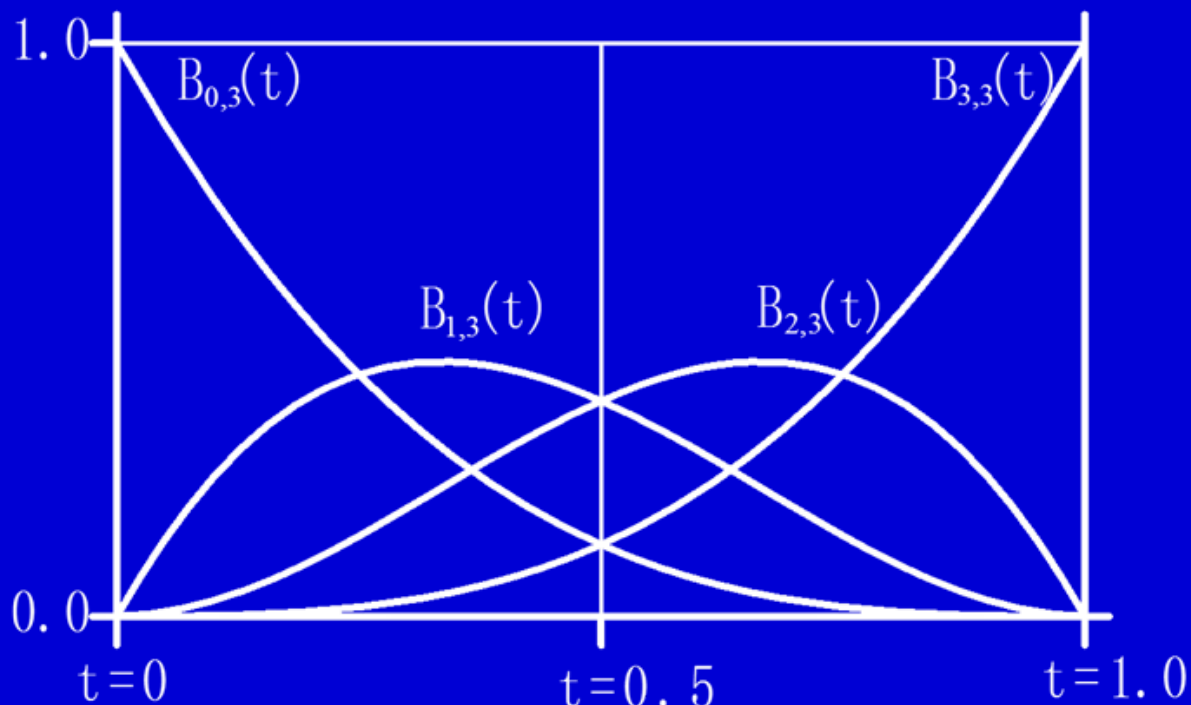
$$B_{0,1}(t) = 1-t, B_{1,1}(t) = t$$

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2, B_{1,2}(t) = 2(1-t)t, B_{2,2}(t) = t^2$$

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, B_{1,3}(t) = 3(1-t)^2 t, B_{2,3}(t) = 3(1-t)t^2, B_{3,3}(t) = t^3$$

Bernstein基底

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, B_{1,3}(t) = 3(1-t)^2t, B_{2,3}(t) = 3(1-t)t^2, B_{3,3}(t) = t^3$$



3.3.1 B样条的递推定义和性质

- B样条曲线的方程定义为:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$$

$P_i (i=0,1,\dots,n)$ 是控制多边形的顶点

$N_{i,k}(t)$ ($i=0,1,\dots,n$) 称为k阶 (k-1次)B样条基函数
B样条基函数是一个称为节点矢量的非递减的参数t的序列所决定的k阶分段多项式, 也即为k阶 (k-1次)多项式样条。

- B样条基地的de Boor-Cox递推定义

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & t < t_i \text{ 或 } t \geq t_{i+1} \end{cases} \\ N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), \quad k \geq 2 \\ \text{约定 } \frac{0}{0} = 0 \end{array} \right.$$

确定B样条 $N_{i,k}(t)$ 需要 $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ 共 $k+1$ 个节点
称区间 $[t_i, t_{i+k}]$ 为 $N_{i,k}(t)$ 的支撑区间。

各B样条的支撑区间的并集 定义了这一组 B样条
基地节点矢量 $T = [t_0, t_1, \dots, t_{n+t}]$ 。

- B样条基地的de Boor-Cox递推定义

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & t < t_i \text{ 或 } t \geq t_{i+1} \end{cases} \\ N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), \quad k \geq 2 \\ \text{约定 } \frac{0}{0} = 0 \end{array} \right.$$

确定B样条 $N_{i,k}(t)$ 需要 $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ 共 $k+1$ 个节点
称区间 $[t_i, t_{i+k}]$ 为 $N_{i,k}(t)$ 的支撑区间。

各B样条的支撑区间的并集 定义了这一组 B样条
基地节点矢量 $T = [t_0, t_1, \dots, t_{n+t}]$ 。

- B样条基地的de Boor-Cox递推定义

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i < x \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

- 约定 $\frac{0}{0} = 0$

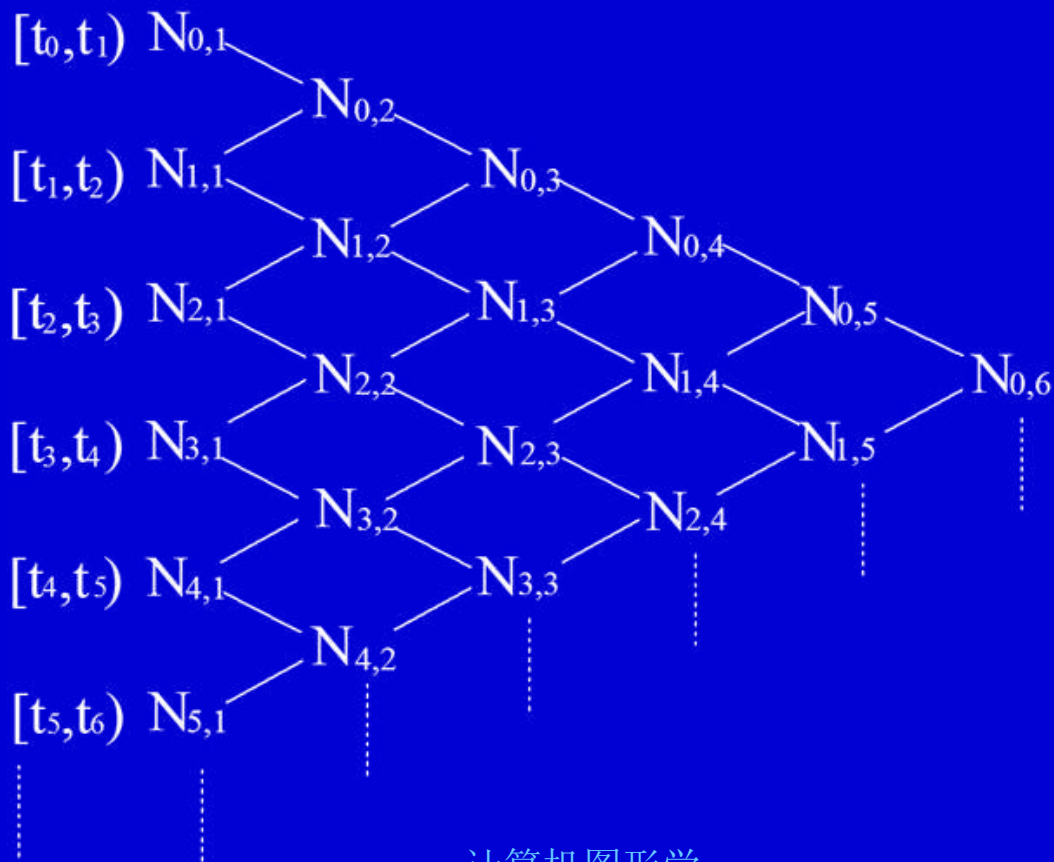
- 确定第*i*个*k*阶B样条基底 $N_{i,k}(t)$ 需要 $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ 共 $k+1$ 个节点

- 曲线*n*+1个控制点需要*n*+1个B样条基底 $N_{i,k}(t)$ 底需要 $n+k+1$ 个节点 t_0, t_1, \dots, t_{i+k}

B样条的注意点

- 控制多边形的顶点数=B样条基底函数的个数
- B样条基底函数的个数和阶数 k 是独立概念
- 控制多边形的顶点个数 n 不能确定B样条基底阶数 k
- 需要定义节点矢量 T
- 设控制多边形顶点数为 $n+1$ ，B样条基底阶数为 k
一般来说， $2 \leq k \leq n+1$
节点数= $n+k+1$

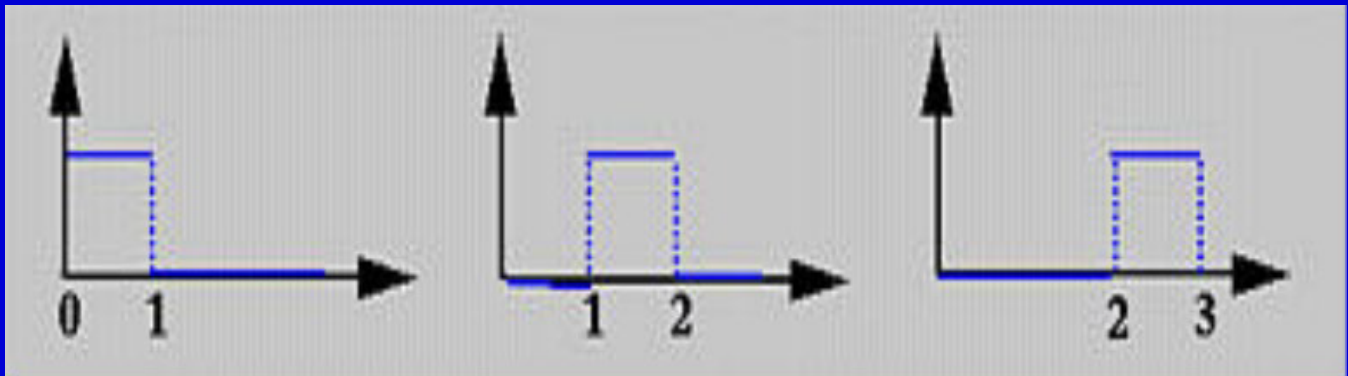
B样条基底的计算



B样条基底的计算

- 以节点数4为例: $T = [0,1,2,3]$
- 从定义可得1阶B样条基底:

$$N_{0,1}(t), N_{1,1}(t), N_{2,1}(t)$$



B样条基底的计算

- 计算2阶基底 $N_{0,2}(t), N_{1,2}(t)$
- 从递推公式

$$N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} N_{1,1}(t) \quad N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,1}(t)$$

$$\because t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2,$$

$$\therefore N_{0,2} = tN_{0,1}(t) + (2-t)N_{1,1}(t)$$

$$\text{If } t \in [0,1], N_{0,2}(t) = t$$

$$\text{If } t \in [1,2], N_{0,2}(t) = 2-t$$

$$\because t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$$

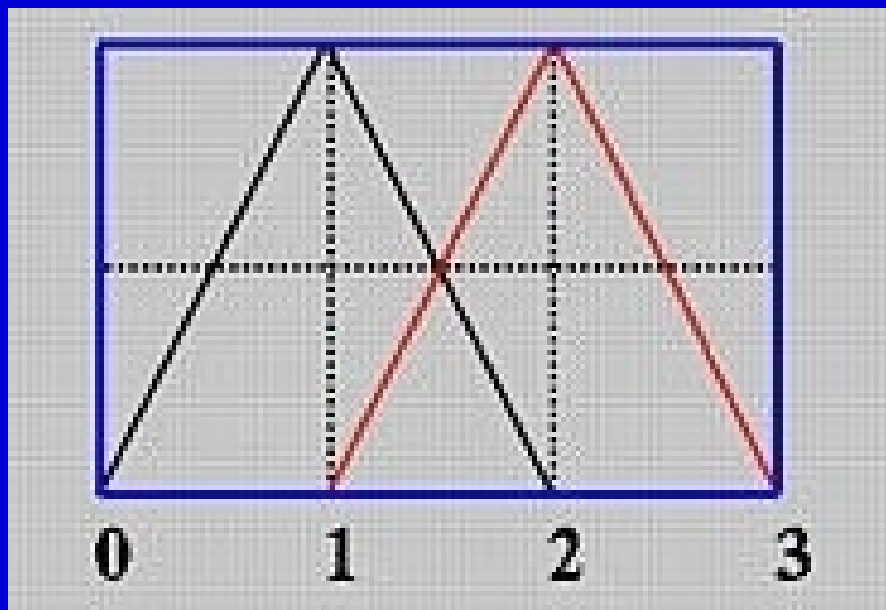
$$\therefore N_{1,2} = (t-1)N_{1,1}(t) + (3-t)N_{2,1}(t)$$

$$\text{If } t \in [1,2), N_{1,2}(t) = t-1$$

$$\text{If } t \in [2,3), N_{1,2}(t) = 3-t$$

B样条基底的计算

- 2阶基底 $N_{0,2}(t), N_{1,2}(t)$



B样条基底的计算

- 计算3阶基底 $N_{0,3}(t)$
- 从递推公式

$$N_{0,3}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,2}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,2}(t)$$

$$\because t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$$

$$\therefore N_{0,3} = 0.5tN_{0,2}(t) + 0.5(3-t)N_{1,2}(t)$$

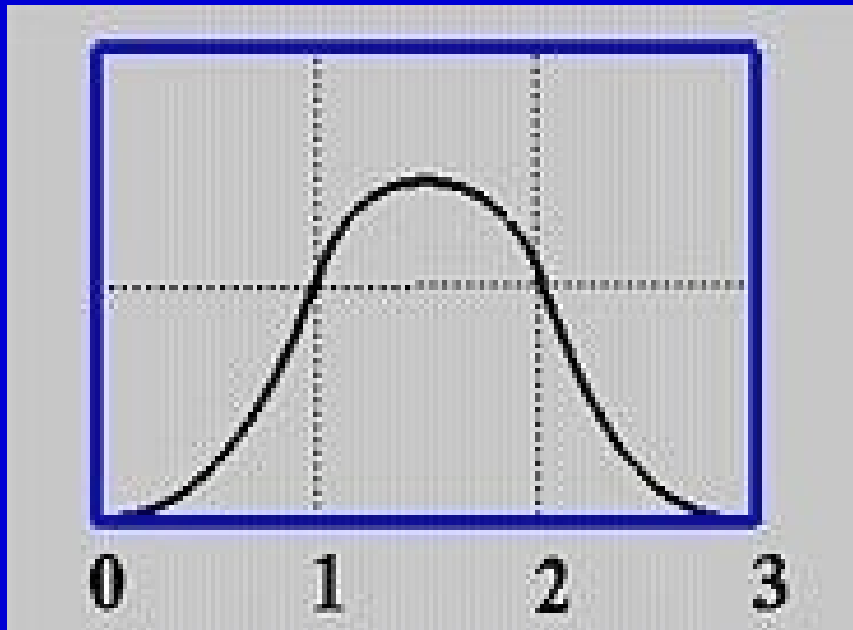
$$\text{If } t \in [0,1), N_{0,3}(t) = 0.5t^2$$

$$\text{If } t \in [1,2), N_{0,3}(t) = 0.5(-3+6t-2t^2)$$

$$\text{If } t \in [2,3), N_{0,3}(t) = 0.5(3-t)^2$$

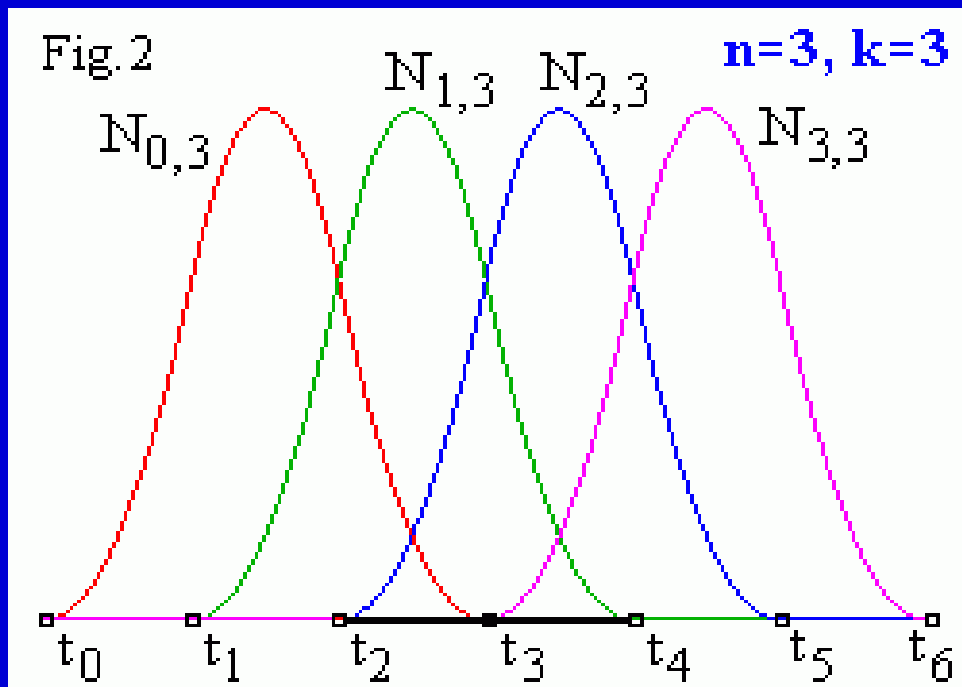
B样条基底的计算

- 3阶B样条基底 $N_{0,3}(t)$

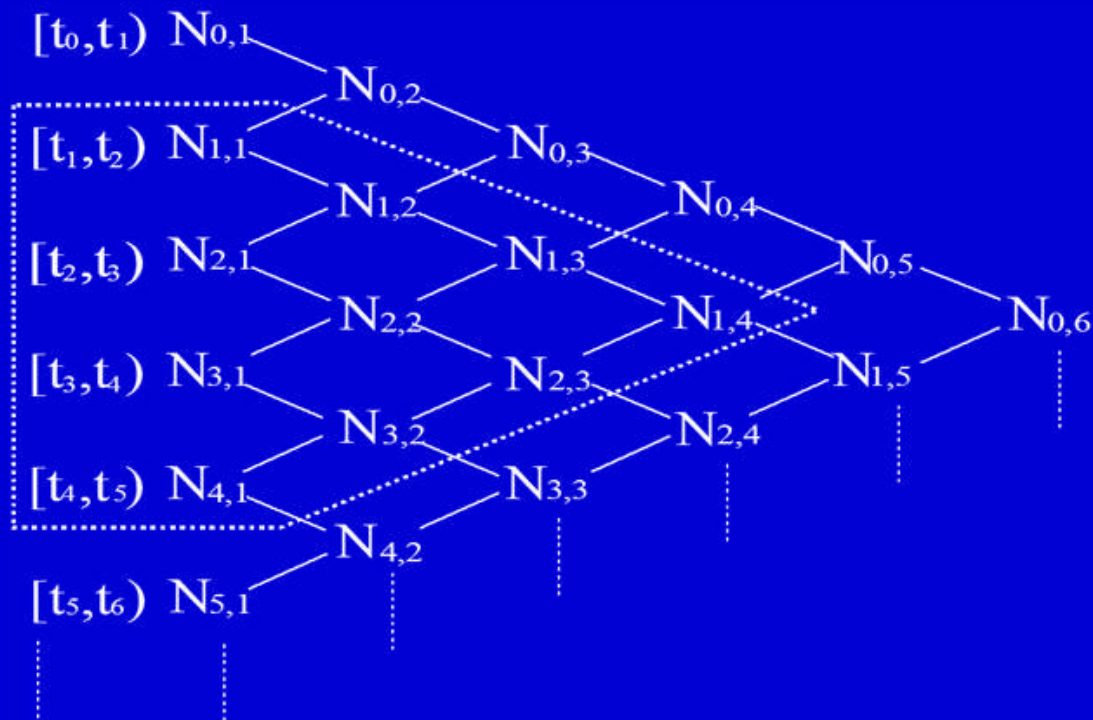


B样条基底的计算

- 3阶B样条基底

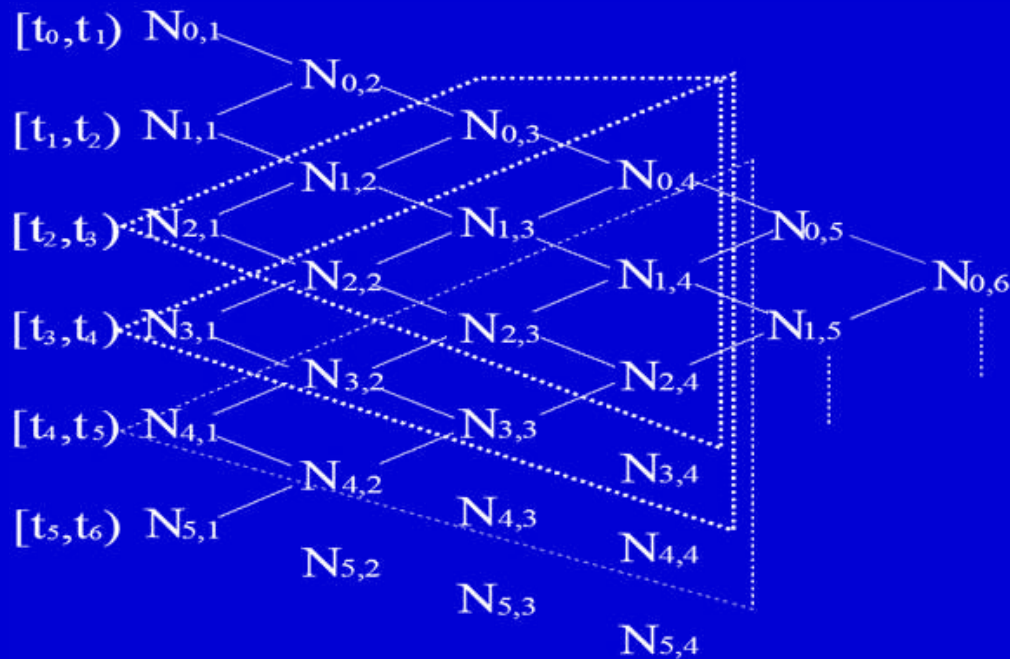


B样条基底的支撑区间



B样条基函数 $N_{i,N}(t)$ 的支撑区间为 $[t_i, t_{i+N})$.

B样条基底的支撑区间

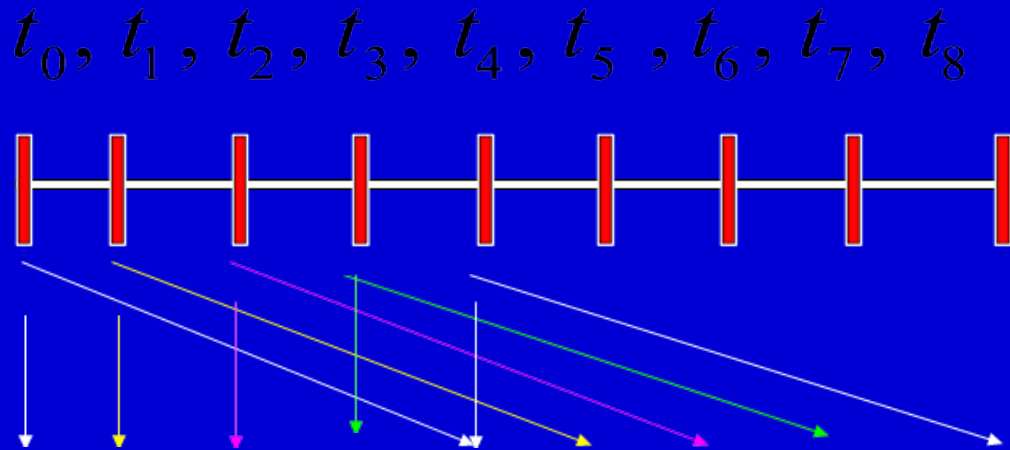


在任意区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上最多有
 N 个非零 N 阶B样条基函数.

B样条基底的性质

局部支撑性
$$N_{i,k}(t) \begin{cases} \geq 0 & t \in [t_i, t_{i+k}) \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以k=4, n=4为例



B样条基底的性质

– 权性。

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1 \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

– 微分公式。

$$N_{i,k}'(t) = \frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

B样条曲线类型的划分

- 曲线按其首末端点是否重合，区分为闭曲线和开曲线。
- B样条曲线按其节点矢量中节点的分布情况，可划分为四种类型。

均匀B样条曲线

节点矢量中节点为沿参数轴均匀或等距分布，所有节点区间长度为常数。这样的节点矢量定义了均匀的B样条基。

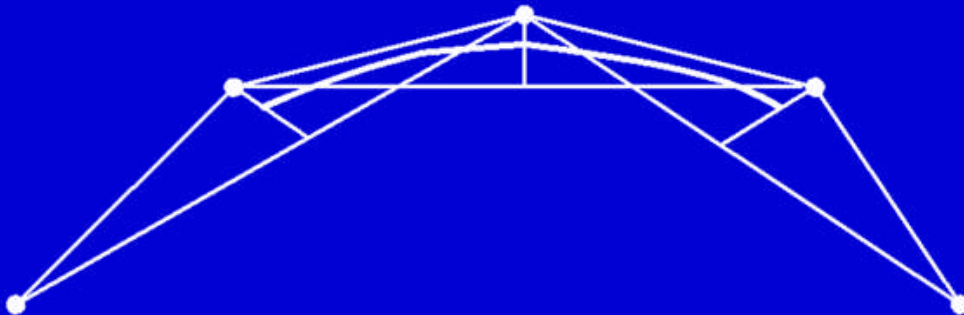


图3. 1. 23 三次均匀的B样条曲线

准均匀B样条

与均匀B样条曲线的差别在于两端节点具有重复度 k ，这样的节点矢量定义了准均匀的B样条基。均匀B样条曲线没有保留Bezier曲线端点的几何性质，即样条曲线的首末端点不再是控制多边形的首末端点。采用准均匀的B样条曲线解决了这个问题

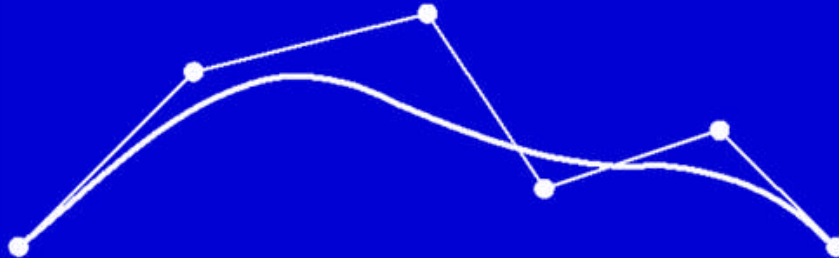
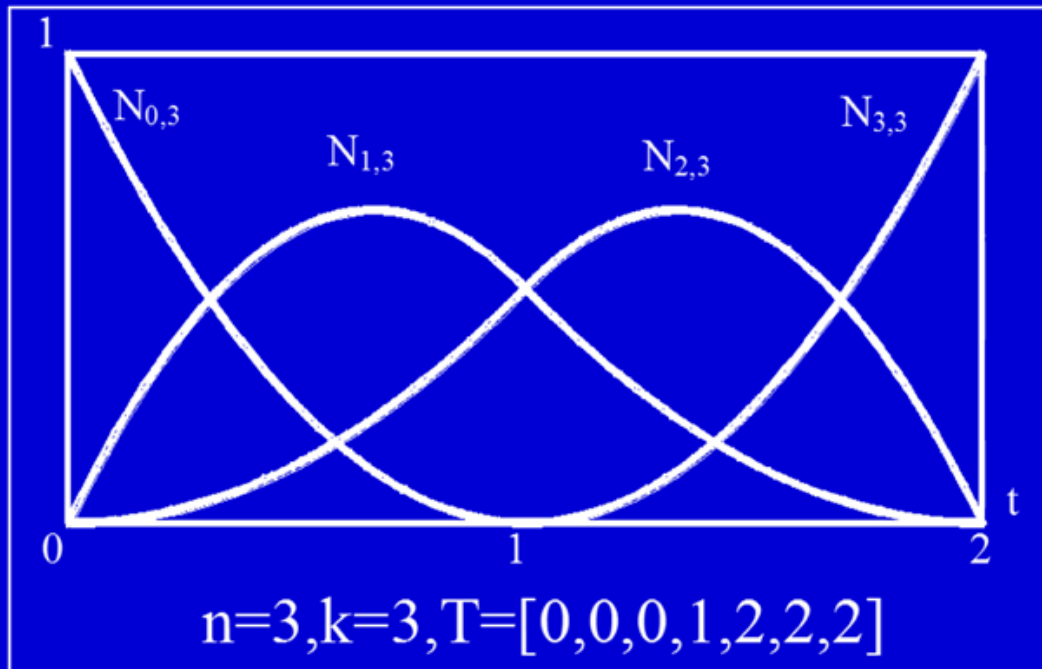


图3. 1. 24 准均匀三次B样条曲线

准均匀B样条基底



分段Bezier曲线

节点矢量中两端节点具有重复度 k ，所有内节点重复度为 $k-1$ ，这样的节点矢量定义了分段的Bernstein基。

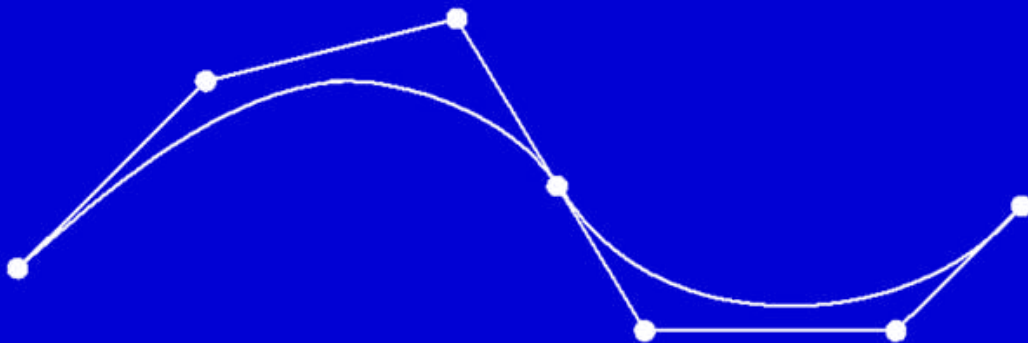


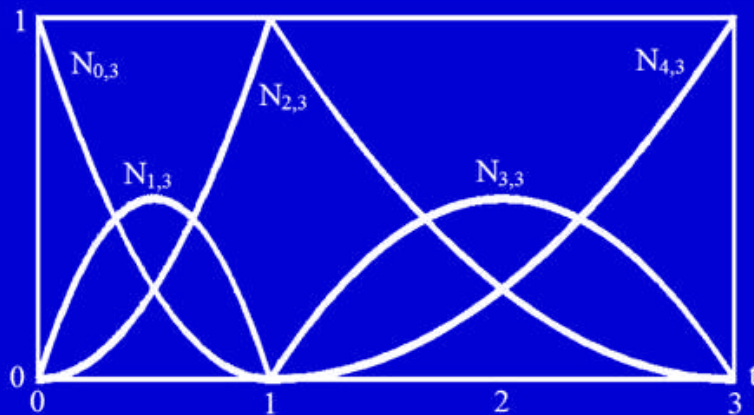
图3.1.25 三次分段Bezier曲线

分段Bezier曲线

B样条曲线用分段Bezier曲线表示后，各曲线段就具有了相对的独立性，移动曲线段内的一个控制顶点只影响该曲线段的形状，对其它曲线段的形状没有影响。并且Bezier曲线一整套简单有效的算法都可以原封不动地采用。缺点是增加了定义曲线的数据，控制顶点数及节点数。

非均匀B样条曲线

任意分布的节点矢量 $T = [t_0, t_2, \dots, t_{n+k}]$ ，只要在数学上成立（节点序列非递减，两端节点重复度 $\leq k$ ，内节点重复度 $\leq k-1$ ）都可选取。这样的节点矢量定义了非均匀B样条基底。



$$k=3, n=4, T=[0,0,0,1,1,3,3,3]$$

计算机图形学

B样条曲线的性质

– 局部性

k 阶B样条曲线上参数为 $t \in [t_i, t_{i+1})$ 的一点 $p(t)$ 至多与k个控制顶点 ~~P_{i-k}, \dots, P_i~~ 有关, 与其它控制顶点无关; 移动该曲线的第i个控制顶点 P_i 至多影响到定义在区间 $[t_i, t_{i+k})$ 上那部分曲线的形状, 对曲线的其余部分不发生影响。

B样条曲线的性质

– 连续性

$P(t)$ 在 r 重节点处的连续阶不低于 $k-1-r$ 。

– 凸包性

$P(t)$ 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的部分位于 k 个点 P_{i-k+1}, \dots, P_i 的凸包 C_i 内，整条曲线则位于各凸包 C_i 的并集之内。

B样条曲线的性质

– 分段参数多项式

$P(t)$ 在每一区间上都是次数不高于 $k-1$ 的参数 t 的多项式

– 导数公式

$$\begin{aligned} P'(t) &= \left(\sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) \right)' = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}'(t) \\ &= (k-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i - P_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} \right) N_{i,k-1}(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \end{aligned}$$

B样条曲线的性质

– 变差缩减性

设平面内 $n+1$ 个控制顶点 构成B样条曲线 $P(t)$ 的特征多边形。在该平面内的任意一条直线与 $P(t)$ 的交点个数不多于该直线和特征多边形的交点个数。

– 几何不变性

B样条曲线的形状和位置与坐标系的选择无关。

B样条曲线的性质

– 仿射不变性



即在仿射变换下，的表达式具有形式不变性。

– 直线保持性

控制多边形退化为一条直线时，曲线也退化为一条直线。

B样条曲线的性质

— 造型的灵活性。

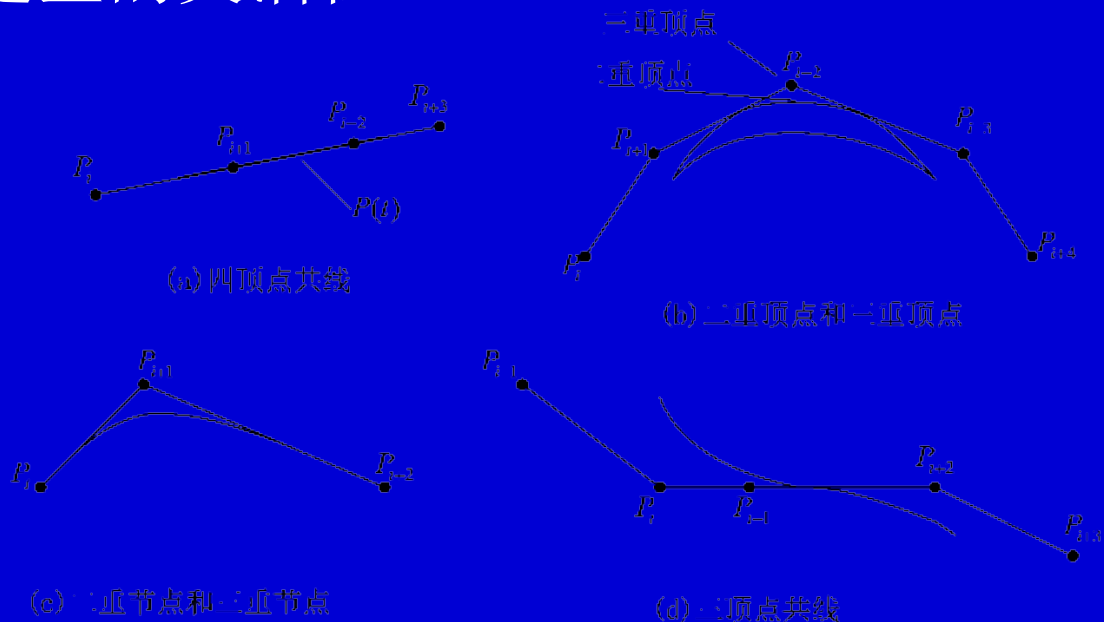


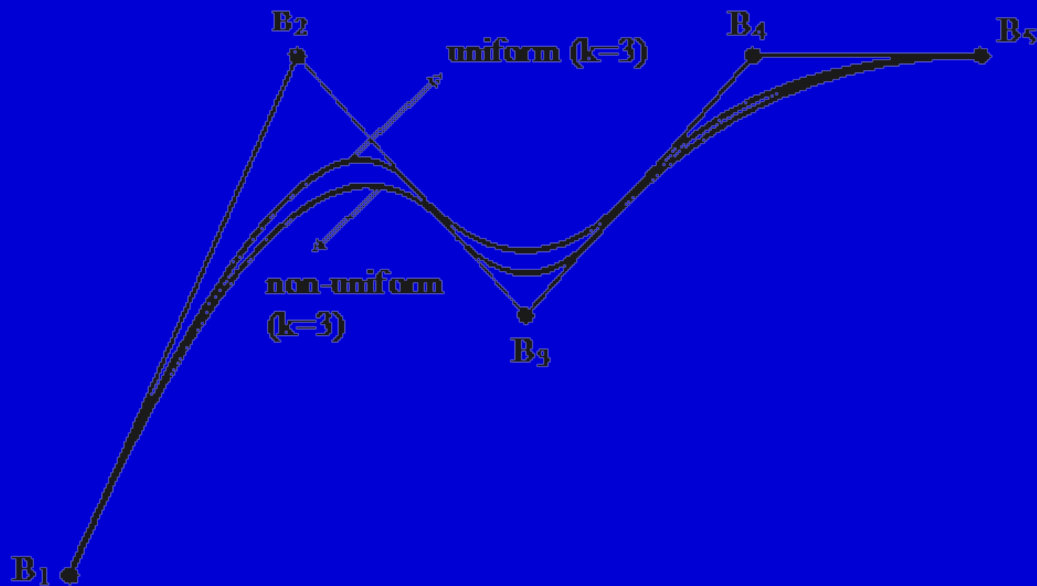
图. 1.26 三次B样条曲线的一些特例

B样条曲线的多样性

- 节点矢量和基函数的种类
- 基底函数的阶数
- 控制顶点的个数和位置
- 控制顶点的重复度
- 节点的重复度

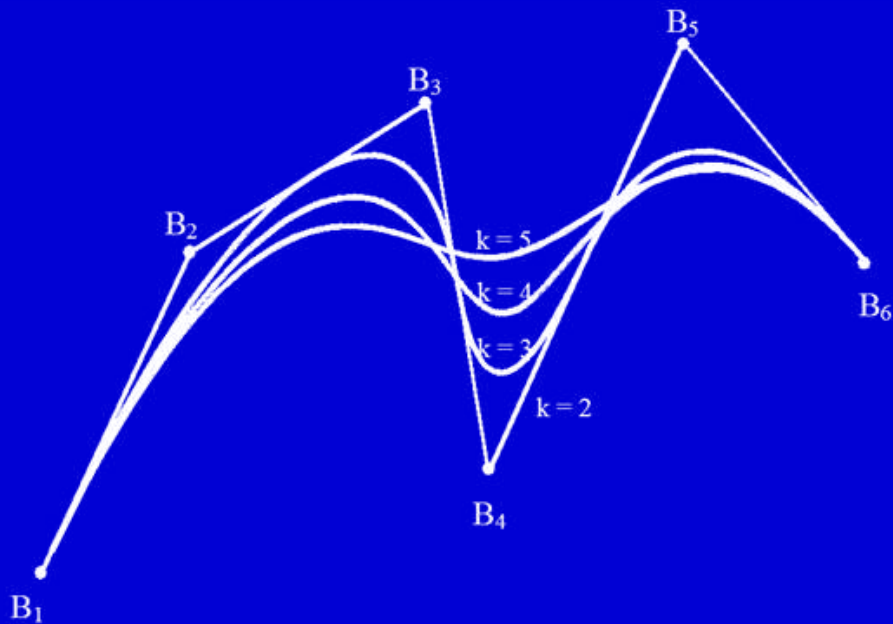
B样条曲线的多样性

– 均匀与非均匀B样条



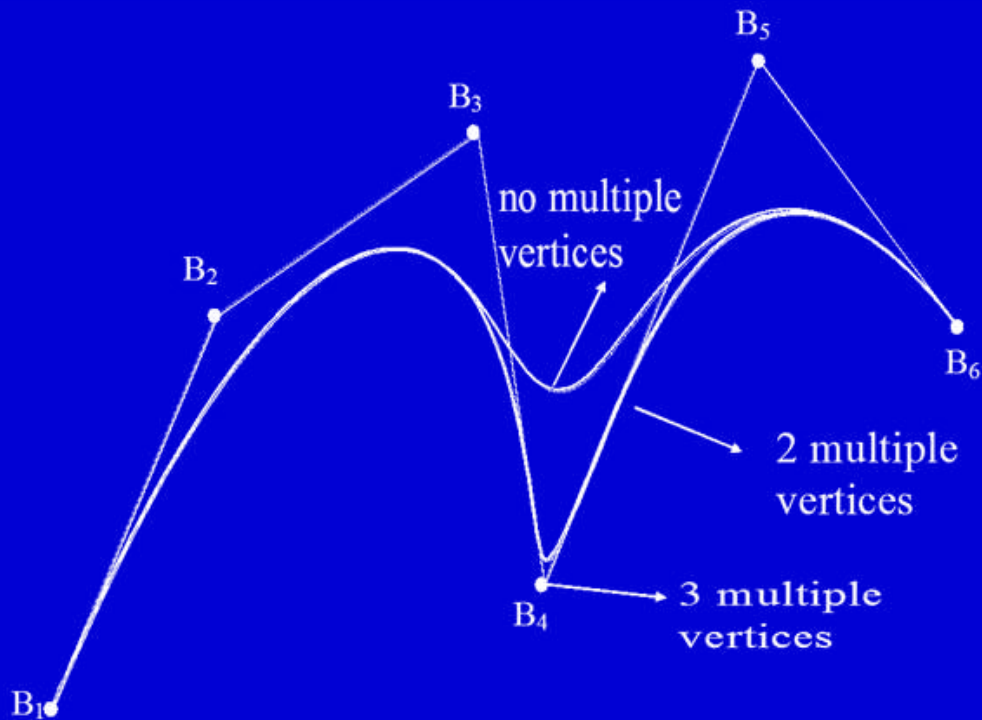
B样条曲线的多样性

— 基底阶数 k 对B样条形状的影响



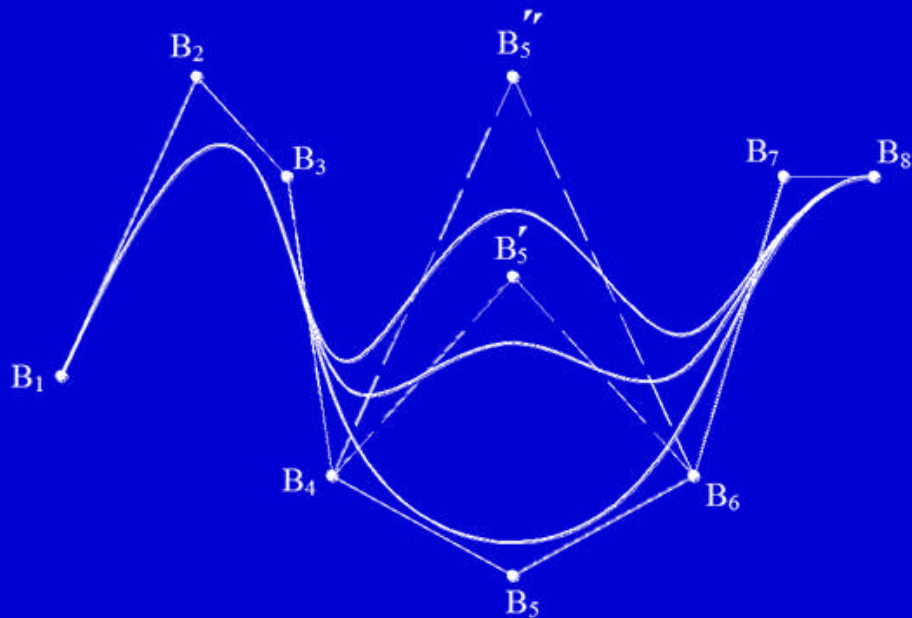
B样条曲线的多样性

– 多重顶点对B样条形状的影响



B样条曲线的多样性

– 顶点位置对B样条形状的影响



3.3.3 de Boor 算法

- 欲计算B样条曲线上对应一点P(t)，可以利用B样条曲线方程，但是采用de Boor 算法，计算更加快捷。
 - de Boor 算法的导出

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) = \sum_{i=j-k+1}^j P_i N_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=j-k+1}^j P_i \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right] \\ &= \sum_{i=j-k+1}^j \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} P_i + \frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i} P_{i+1} \right] N_{i,k-1}(t) \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \end{aligned}$$

de Boor 算法

– 现令

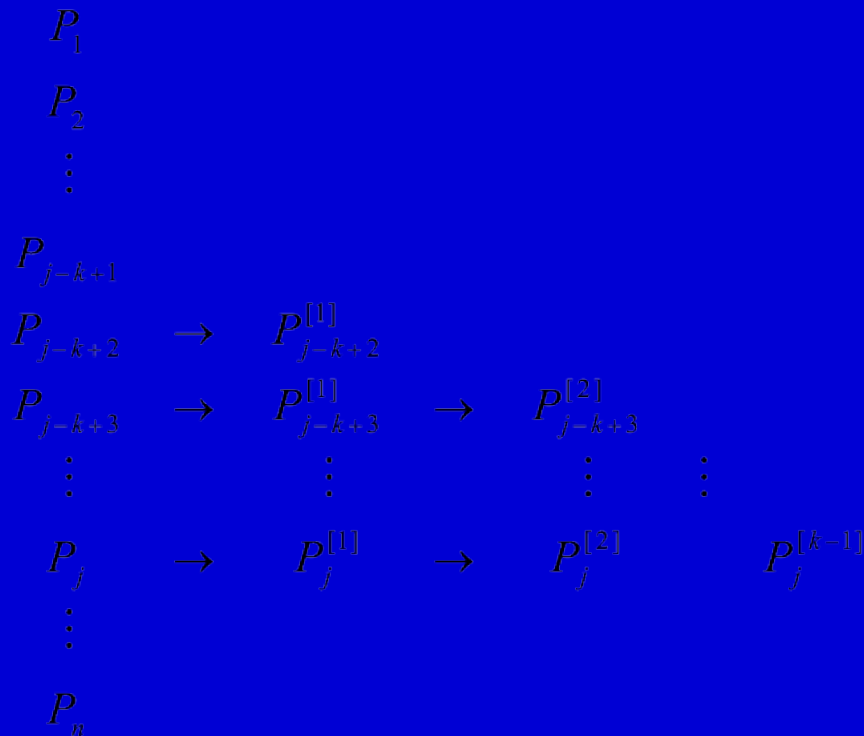
$$P_i^{[r]}(t) = \begin{cases} P_i, r = 0, i = j - k + 1, j - k + 2, \dots, j \\ \frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i} P_i^{[r-1]}(t) + \frac{t_{i+k-r} - t}{t_{i+k-r} - t_{i-1}} P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ r = 1, 2, \dots, k - 1; i = j - k + r + 1, j - k + r + 2, \dots, j \end{cases}$$

则

$$P(t) = P_j^{[k-1]}(t)$$

反复使用上述递推公式, 可得 $P(t) = P_j^{[k-1]}(t)$
这就是著名的de Boor 算法

de Boor 算法的递推关系图



De Boor 算法的几何意义

- de Boor算法有着直观的几何意义 割角，即以线段 $P_i^{[k]}P_{i+1}^{[k]}$ 割去角 $P_i^{[r-1]}$ 。从多边形 $P_i^{[k]}P_{i+1}^{[k]}P_{i+2}^{[k]}P_{i+3}^{[k]}$ 开始，经过 $k-1$ 层割角，最后得到 $P(t)$ 上的点 $P_j^{[r-1]}(t)$ 。

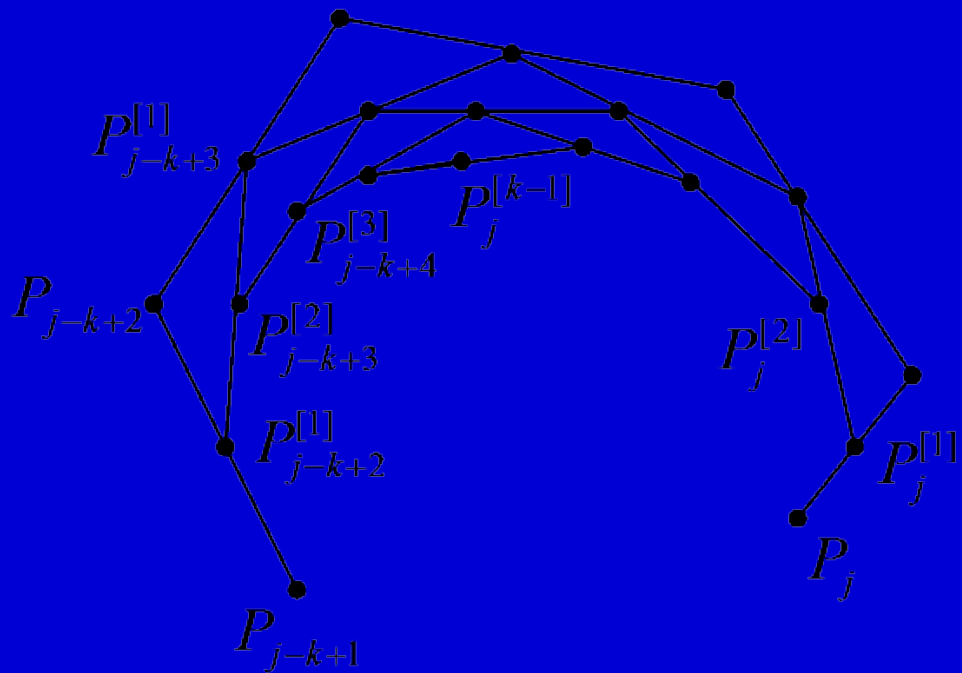


图3. 1. 28 B样条曲线的deBoor算法的几何意义

三次B样条的Bezier表示

- 4阶(3次)B样条曲线和Bezier曲线的关系

由*de boor* 算法,知下列公式成立

$$p(t_j) = P_j^{[3]}(t_j) = P_{j-1}^{[2]}(t_j)$$

$$p(t_{j+1}) = P_{j+1}^{[3]}(t_{j+1}) = P_j^{[2]}(t_{j+1})$$

$$p'(t_j) = 3[P_{j-1}^{[1]}(t_j) - P_{j-1}^{[2]}(t_j)]$$

$$p'(t_{j+1}) = 3[P_j^{[2]}(t_{j+1}) - P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1})]$$

由于 $P(t)$ 在区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上是3次多项式,故以上两个性质表明:
这段曲线如表示成Bezier 曲线,则其控制顶点为

$$P_{j-1}^{[2]}(t_j), P_{j-1}^{[1]}(t_j), P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}), P_j^{[2]}(t_{j+1})$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/726241000005010142>