

品备考资料

（知识点/试题卷/真题）

考前多练习
考后多得分
精准抓考点
快速冲高分

全国教师资格证考试

初中数学教资必背基本公式整理汇总

【全】

常用的公式汇总

1. 平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。
2. 完全平方公式： $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 。
3. 立方和公式： $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 。
4. 立方差公式： $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 。
5. 完全立方公式： $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ 。
6. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (x 为未知数, $a\neq 0$) 的两个实数根是 x_1, x_2 , 那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 。若 $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=n$, 则以 x_1, x_2 为根的一元二次方程是 $x^2-mx+n=0$ 。

7. 指数公式

- (1) $a^0=1(a>0)$
- (2) $a^r \cdot a^s=a^{r+s}(r, s\in\mathbf{R}, a>0)$
- (3) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}(r, s\in\mathbf{R}, a>0)$
- (4) $(ab)^r=a^rb^r(r\in\mathbf{R}, a, b>0)$
- (5) $(a^r)^s=a^{rs}(r, s\in\mathbf{R}, a>0)$
- (6) $a^{-r}=\frac{1}{a^r}(r\in\mathbf{R}, a>0)$
- (7) $a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^r}(r\in\mathbf{R}, a>0, s\in\mathbf{N}^*, s>1)$

8. 对数公式

特殊： $\log_a 1=0, \log_a a=1, \log_a \frac{1}{a}=-1$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

和式： $\log_a(M \cdot N)=\log_a M+\log_a N$ ($a>0$ 且 $a\neq 1, M>0, N>0$)

差式： $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ($a>0$ 且 $a\neq 1, M>0, N>0$)

换底： $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1, c>0$, 且 $c\neq 1; b>0$)

指系： $\log_a m^n=\frac{n}{m}\log_a m$ ($a>0$ 且 $a\neq 1, b>0, m, n\in\mathbf{R}, m\neq 0$)

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

还原： $a^{\log_a x} = \log_a a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$; $x > 0$)

倒数： $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$ 且 $b \neq 1$)

9.三角函数的基础公式

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

10.和差公式

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$(3) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

11.倍角公式

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

12.正弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ， R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径，

$$\text{则有 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R。$$

$$\text{三角形的面积公式： } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

13.余弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，有 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ， $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ， $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\text{推论： } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

14.均值不等式

①若 $a, b \in R$ ， $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立

②若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

这里 a, b 均为正数，称 $\frac{a+b}{2}$ 为正数 a, b 的算术平均数， $\sqrt{ab}$ 称为正数 a, b 的几何平均数，即两个整数的算术平均数不小于（大于等于）它们的几何平均数。

③若 $a, b, c \in R$ ，则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立。

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

15. 柯西不等式

若 $a, b, c, d \in R$ ，都是实数，则 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ ，当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立。

16. 复数的运算

1. 加减运算: $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

2. 乘法运算: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

3. 除法运算: $(a+bi) \div (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i (c+di \neq 0)$

4. i 的幂运算: $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i (n \in N)$

17. 复数方程

实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 在复数范围内求根:

当判别式 $\Delta > 0$ 时，有一对实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

当判别式 $\Delta = 0$ 时，有一对相等的实根 $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$;

当判别式 $\Delta < 0$ 时，有一对共轭虚根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ 。

(3) 数量积: 对于两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，它们的模 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 。

18. 坐标运算

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则:

向量的加减法运算: $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

实数与向量的积: $\lambda \vec{a} = \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ 。

若 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ，即一个向量的坐标等于表示这个向量的

有向线段的终点坐标减去起点坐标。线段 AB 的中点坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ 。

平面向量数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ 。

向量的模: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2$ 。

两点间的距离: 若 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

19. 向量的运算律

交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ， $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ， $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$ ， $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$;

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

分配律： $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 。

20. 向量平行的充要条件： $\vec{a} // \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} (\lambda \in \mathbf{R}) \leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 \leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。

21. 两个向量垂直的充要条件

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$,

① 向量式： $\vec{a} \perp \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

② 坐标式： $\vec{a} \perp \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 。

③ 直线 $l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ 与 $l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ 垂直的充要条件是 $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ 。

向量垂直的充要条件： $\vec{a} \perp \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 。

22. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\vec{r} = (x, y, z)$, 则向量模的坐标表示式 $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

设有点 $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

于是点 A 与点 B 间的距离为 $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

23. 数量积

(1) 数量定义

对于两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 它们的模 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积, 记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

24. 数量积的性质

① $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

② 对于两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如果 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$; 反之, 如果 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。如果认为零向量与任何向量都垂直, 则 $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

25. 数量积的运算律

① 交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

② 分配律： $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

③ $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$, $(\lambda \vec{a}) \cdot (\mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \cdot \vec{b})$ λ 、 μ 为常数

26. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

(5) 两向量夹角的余弦的坐标表示

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

$$\text{设 } \theta = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \text{ 则当 } \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \text{ 时, 有 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

27. 向量积

(1) 向量积的定义

设向量 $\vec{c}$ 是由两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 按下列方式定出：

$\vec{c}$ 的模 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ ，其中 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 间的夹角。

$\vec{c}$ 的方向垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所决定的平面， $\vec{c}$ 的指向按右手定则从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 来确定。那么，向量 $\vec{c}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{a} \times \vec{b}$ ，即 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

向量积的几何意义：平行四边形的面积

28. 向量积的性质

① $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

② 对于两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，如果 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} // \vec{b}$ ；反之，如果 $\vec{a} // \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 。

29. 向量积的运算律

① 交换律 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

② 分配律： $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

③ $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ ， λ 为常数

30. 向量积的坐标表示

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

31. 利用向量的坐标判断两个向量的平行

$$\text{设 } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \neq 0, \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \text{ 向量 } \vec{a} // \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b},$$

$$\text{即 } \vec{a} // \vec{b} \leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = \lambda (b_x, b_y, b_z), \text{ 于是 } \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

32. 混合积

设已知三个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，先作两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 把所得到的向量与第三个向量 $\vec{c}$ 再作数量积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ，这样得到的数量叫做三向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的混合积，记作 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ 。

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

几何意义：以向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 为棱长的平行六面体的体积。

33. 两条平行线间的距离

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

若 $l_1: Ax+By+C_1=0$, $l_2: Ax+By+C_2=0$ 平行, 则: $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 。

34.点与直线的关系

点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 。

35.圆的方程的几种形式

	表达式	圆心	半径
标准方程	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	(a, b)	r
一般方程	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$ $(D^2+E^2-4F>0)$	$(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$	$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$
参数方程	$\begin{cases} x=r \cos \theta +a \\ y=r \sin \theta +b \end{cases}$	(a, b)	r

37.排列数公式: $A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}_{m \text{个相乘}} = \frac{n!}{(n-m)!} (m, n \in \mathbf{N}, m \leq n)$

如 $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{(5-3)!}$

38.组合数公式:

$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m(m-1) \dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!m!} (m, n \in \mathbf{N}, m \leq n)$, 如 $C_5^3 = \frac{A_5^3}{A_3^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$ 。

39.组合数性质

$C_n^m = C_n^{n-m}$, 规定 $C_n^0 = C_n^n = 1$ 。

40.二项式定理

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n (n, r \in \mathbf{N}^*)$, 其中组合数 C_n^r 叫做第 $(r+1)$ 项的二项式系数; 展开式共有 $(n+1)$ 项, 其中第 $(r+1)$ 项 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r (r=0, 1, 2, \dots, n)$ 称为二项展开式的通项, 二项展开式通项的主要用途是求指定的项。

41.等可能事件的概率

(1) 几何概率: 每个事件发生的概率只与构成事件区域的几何度量 (面积或体积) 成正比。

$P(A) = \frac{\text{构成事件 A 的区域的几何度量 (长度、面积或体积)}}{\text{试验所有可能结果构成的区域的几何度量 (长度、面积或体积)}}$

42.等可能事件的概率

①特点: 所有基本事件有限个; 每个基本事件发生的可能性都相等

②概率公式: $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$

43.古典概型概率的求法

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$

44.如果事件 A 和 B 互斥，则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (加法公式)。

45.如果 A 和 B 对立，则： $P(A) = 1 - P(B)$ 。

46. 条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ ，为在事件 A 发生条件下，事件 B 发生的概率。

47. 独立事件概率 $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$ 。

48. n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

在 n 次重复试验中，试验成功的次数是一个随机变量，用 ξ 来表示，事件发生的概率是 p ，则在 n 次试验中恰好成功 k 次的概率为： $P(\xi=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 。

49.两点分布

如果随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$1-p$	p

则称 X 服从两点分布，并称 $p=P(X=1)$ 为成功概率。

50.二项分布

n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数 ξ 是一个随机变量，其所有可能的取值为 0、1、2、...、 n ，并且 $P_k = P(\xi=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ，其中 $0 \leq k \leq n$ ， $q=1-p$ ，随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	...	k	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

称这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 $\xi \sim B(n, p)$ ，并称 p 为成功概率，其中 n 、 p 为参数，并记 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = b(k, n, p)$ 。

51. 超几何分布

在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中含有次品数记为 ξ ，则事件 $\{\xi=k\}$ 发生的概率为 $P(\xi=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ ($k=1,2,\dots,l, l=\min(n, M)$ ，且 $n \leq N$ ， $M \leq N$ ， $n, M, N \in N^*$)，

其分布如下表所示：

ξ	0	1	...	l
P	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^l C_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}$

称这样的随机变量 ξ 服从超几何分布，记作 $\xi \sim H(n, M, N)$ ，并将 $P(\xi=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ 记

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

为 $H(k; n, M, N)$ 。

$$52. \text{期望} = \text{平均数} \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$53. \text{方差: } s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$$

$$54. \text{标准差系数 (离散系数): } V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

55. 离散型随机变量的期望

$E(\xi) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n + \dots$ 为 ξ 的数学期望或平均数、均值，简称为期望。

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

若 $\eta = a\xi + b$ ，其中 a, b 为常数，则 η 也是随机变量，且 $E(\eta) = E(a\xi + b) = aE\xi + b$ 。

随机变量期望的性质：

- ① $E(c) = c$ (c 为常数)；
- ② $E(cX) = cE(X)$ ；
- ③ $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ ；
- ④ $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ ；
- ⑤ 若 X, Y 相互独立，则 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ 。

56. 离散型随机变量的方差 $D(\xi) = p_1(x_1 - E(\xi))^2 + p_2(x_2 - E(\xi))^2 + \dots + p_i(x_i - E(\xi))^2 + \dots + p_n(x_n - E(\xi))^2$ 为随机变量 ξ 的方差。

若 $\eta = a\xi + b$ ，其中 a, b 为常数，则 η 也是随机变量，且 $D(\eta) = D(a\xi + b) = a^2 D\xi$ 。

随机变量方差的性质：

- ① $D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k = E\{[X - E(X)]^2\}$ ；
- ② $D(c) = 0$ (c 为常数)；
- ③ $D(cX) = c^2 D(X)$ (c 为常数)；
- ④ $D(X + c) = D(X)$ (c 为常数)；
- ⑤ 若 X, Y 相互独立，则 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ ；
- ⑥ $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 。

57. 随机变量的分布函数

设 X 是一个随机变量， x 是任意实数，

函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$ ， $-\infty < x < \infty$ ，称为 X 的分布函数。

对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$ 。

也就是，只要知道 X 的分布函数，我们就知道 X 落在任一区间 $(x_1, x_2]$ 上的概率。

$F(x)$ 具有以下性质：

1. $F(x)$ 是一个不减函数。对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，有 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$ 。

2. $0 \leq F(x) \leq 1$ 且 $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

3. $F(x+0) = F(x)$ 即 $F(x)$ 右连续。

58. 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ ，存在非负可积函数 $f(x)$ ，对于任意实数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ，则称 X 为连续型随机变量， $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称密度概率。

概率密度函数 $f(x)$ 具有以下性质：

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. 对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

4. 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x) = f(x)$

59. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$ ，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望。记为 $E(X)$ 。即 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 。

数学期望简称期望，又称均值。

对于连续型随机变量有 $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 f(x)dx$ ，其中 $f(x)$ 是 X 的概率密度。

例：设随机变量 X 具有概率密度 $f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2} & 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(1) 确定常数 k ；(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$ ；求 $P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\}$

解：由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ，得 $\int_0^3 kxdx + \int_3^4 (2 - \frac{x}{2})dx = 1$ ，解得 $k = \frac{1}{6}$ ，于是

X 具有概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2} & 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

$$(2) X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{6} x dx & 0 \leq x < 3 \\ \int_0^3 \frac{1}{6} x dx + \int_3^x \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{12} & 0 \leq x < 3 \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$(3) P\left\{1 < X \leq \frac{7}{2}\right\} = F\left(\frac{7}{2}\right) - F(1) = \frac{41}{48}$$

60. 随机变量函数数学期望定理

设随机变量 Y 是随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ ，这里 g 是连续函数，那么

(1) 若 X 是离散型随机变量，且 X 的概率分布为 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, 3 \dots$ ，则
 $E(Y) = E[g(x)] = \sum_i g(x_i) p_i$;

(2) 若 X 是连续型随机变量，且概率密度函数为 $f(x)$ ，则 $E(Y) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$

61. 正态分布的概念

如果连续型随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，其中 σ, μ 为常数，

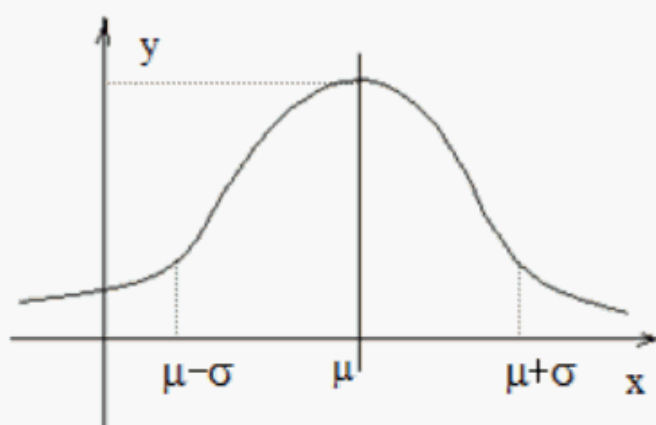
并且 $\sigma > 0$ ，则称 ξ 服从正态分布，记为 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。称 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

为分布函数。期望 $E\xi = \mu$ ，方差 $D\xi = \sigma^2$ 。

62. 性质

1. 曲线在 x 轴上方，并且关于直线 $x = \mu$ 对称。

$$P(X < \mu) = P(X > \mu) = 0.5; \quad P(X < \mu - \sigma) = P(X > \mu + \sigma)$$



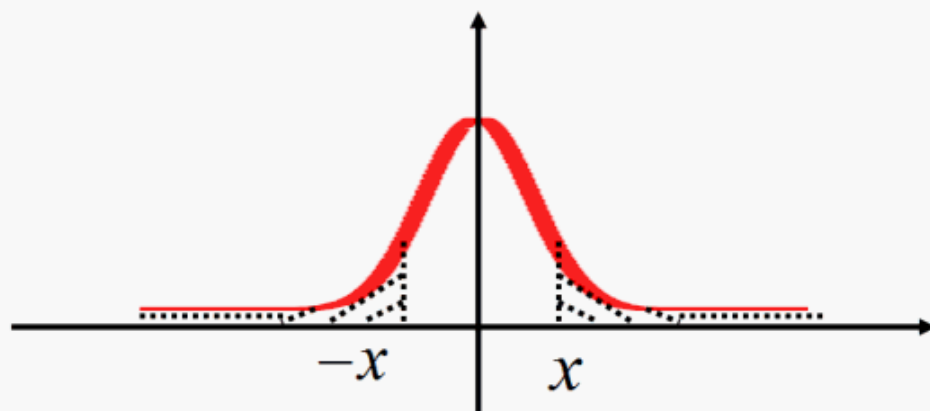
2. 曲线在 $x = \mu$ 时处于最高点，由这一点向左右两边延伸时，曲线逐渐降低。

3. 曲线的对称轴位置由 μ 确定；曲线的形状由 σ 确定， σ 越大，曲线越“矮胖”，反之越“高瘦”。

63. 标准正态分布

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

当 $\mu=0$, $\sigma=1$ 时, ξ 服从标准的正态分布, 记作 $\xi \sim N(0, 1)$, 且有 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\varphi(x)$ 称为标准正态分布的概率密度函数; 标准正态分布函数为 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 且满足 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(0) = 0.5$ 。



当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, $F(\mu) = 0.5$;

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

64. 数列极限

设数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有如下关系: 对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, 那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

“ ε -- N ”语言: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 。

65. 函数极限

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

描述语言: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限趋近 (接近) 于某个常数 A 。

“ ε -- N ”语言: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对任意的 $x \in U^0(x_0)$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

66. 自变量趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义。如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

论它多么小)，总存在着正数 X ，使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow \infty \text{)}$$

“ ε -- N ”语言： $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ ，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

67.函数的有界性

如果在变量 x 所考虑的范围(用 D 表示)内，存在一个正数 M ，使在 D 上的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)| \leq M$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界，亦称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数。如果不存在这样的正数 M ，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上无界，亦称 $f(x)$ 在 D 上是无界函数。

一般来说，连续函数在闭区间上具有有界性。

68.极限的性质

(1) 函数极限的唯一性

如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一。

(2) 函数极限的局部有界性

如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \leq M$ 。

(3) 函数极限的局部保号性

如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

且 $A > 0$ (或 $A < 0$)，那么存在常数 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

(4) 函数极限与数列极限的关系

如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

存在， $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足： $x_n \neq x_0 (n \in N_+)$ ，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

69.极限的运算法则

设 $\lim u(x) = A$ ， $\lim v(x) = B$ ，则有

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

(1) 加减法: $\lim[u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x) = A \pm B$

(2) 乘法: $\lim[u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x) = A \cdot B$

(3) 除法: 当 $\lim v(x) = B \neq 0$ 时, $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)} = \frac{A}{B}$

推论 1: 如果 $\lim u(x)$ 存在, 而 c 为常数, 那么 $\lim[cu(x)] = c \lim u(x)$ 。

推论 2: 如果 $\lim u(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 那么 $\lim[u(x)]^n = [\lim u(x)]^n$ 。

70. 判定极限存在的两个准则

(1) (夹逼准则) 设函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且有极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$

则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

(2) 单调有界数列必有极限。

71. 极限的求法

代入法就是直接将所趋近的值代入函数表达式中, 这种方法的前提条件是这个值能使函数有意义。

约公因子法: 所趋近的值使得函数没有意义, 因此需要进行约公因子, 约公因子通常运用因式分解的方法。

最高次幂: 当函数是分式形式, 且分子、分母都是多项式时, 可以通过这种方法。最高次幂法主要是比较分子与分母次数的高低。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \\ 0, & \text{当 } n > m \\ \infty, & \text{当 } n < m \end{cases}$$

72. 两个重要极限公式

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

73. 洛必达法则

法则 1: ($\frac{0}{0}$ 型)

设 (1) $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = 0$;

(2) 在 x 变化过程中, $f'(x)$, $g'(x)$ 皆存在;

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (或 } \infty), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \text{ (或 } \infty)。$$

注意：如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则不能得出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，如反例

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}。$$

法则 2: ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

设 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$;

(2) 在 x 变化过程中, $f'(x), g'(x)$ 皆存在;

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (或 } \infty), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \text{ (或 } \infty)。$$

注意: (1) 离散型数列极限不能直接用洛必达法则;

(2) 如果直接用洛必达法则更麻烦, 可先作变量替换, 如令 $\frac{1}{x^2} = t$ 。

74. 两个无穷小的比较

在自变量同一变化过程 ($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$) 中, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$,

则有:

- ①若 $l=0$, 称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 记作: $f(x) = o[g(x)]$;
- ②若 $l=\infty$, 称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小, 记作: $f(x) = O[g(x)]$;
- ③若 $l=c \neq 0$, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小;
- ④若 $l=1$, 称是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等阶无穷小, 记作: $f(x) \sim g(x)$ 。

75. 常用等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 的等价无穷小量有:

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; \arcsin x \sim x; \arctan x \sim x; e^x - 1 \sim x;$$

$$\ln(1+x) \sim x; (1+x)^2 - 1 \sim 2x; 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}; a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$$

76. 水平渐近线

当 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$ (常数) 时, 则称 $y=c$ 为水平渐近线。

77. 垂直渐近线

当 $\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ 时, 则称 $x=x_0$ 为垂直渐近线。

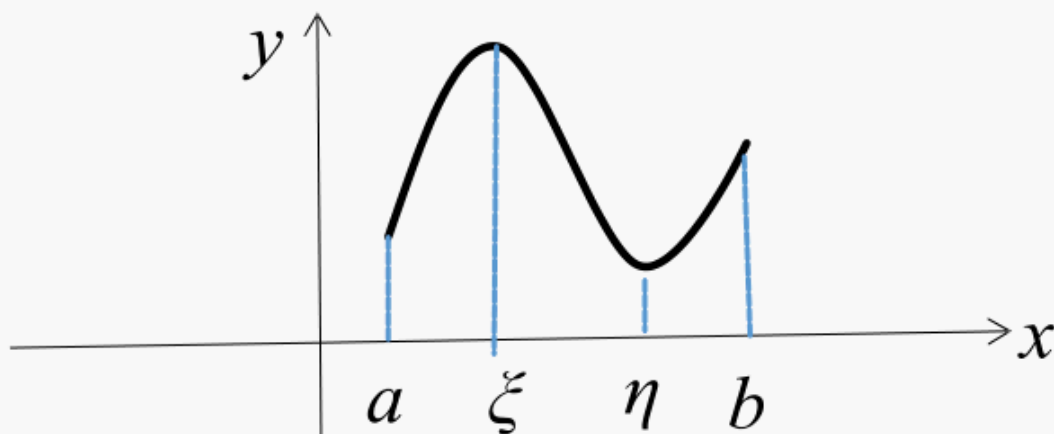
78. 闭区间上的连续函数的性质

定理 1 (有界性与最大值最小值定理): 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定

全国教师资格证考试初中数学教资必背基本公式整理汇总
【全】

能取得它的最大值和最小值。

这就是说,如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,那么存在常数 $M>0$,使得对任一 $x \in [a, b]$,满足 $|f(x)| \leq M$; 且至少有一点 ξ , 使 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值; 又至少有一点 η , 使 $f(\eta)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值。



有界性定理: 闭区间上连续函数在该区间上必有界。

定理 2(零点定理): 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$), 则在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi)=0$ 。

定理 3 (介值定理): 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$ 则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f(\xi)=C$ ($a < \xi < b$)。

79.第一类间断点

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点, 如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。左、右极限相等称为可去间断点, 不相等者称为跳跃间断点。

80.第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。(至少一个单侧极限不存在)

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

例如: $x=0$ 是 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 是 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 的跳跃间断点, 是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的无穷间断点, 是 $f(x)=\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点。

81.导数的几何意义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (*)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/726243011240010124>