

第 4 章 结构的位移计算

一. 教学目的

理解广义力和广义位移的概念、虚功原理、单位荷载法、图乘法、互等定理。

能利用单位荷载法正确的计算结构在荷载作用及支座移动下和温度变化下的位移。

掌握图乘法及应用条件，能用图乘法计算梁和刚架的位移；能够计算桁架的位移。

二. 主要章节

§4-1 应用虚力原理求刚体体系的位移

§4-2 变形体的虚功原理

§4-3 结构位移计算的一般公式

§4-4 荷载作用下的位移计算

§4-5 图乘法

§4-6 温度作用时的位移计算

§4-7 用求解器进行位移计算

§4-8 互等定理

§4-9 小结

§4-10 思考与讨论

§4-11 习题

§4-12 测验

三. 学习指导

本章是静定结构与超静定结构的联结部分，一方面有相对的独立性，另一方面又是学习超静定结构的基础，因此应当有一个正确的学习态度。本章的理论基础是虚功原理，重点是单位荷载法和图乘法的应用，因此应当加强学习和练习。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P235～304

§4-1 概述

一. 教学目的

了解位移的概念，理解虚功原理在位移计算中的应用----虚力原理，初步掌握单位荷载法。

能利用单位荷载法正确的计算静定结构在支座移动下的位移。

二. 主要内容

1. 结构位移计算概述

2. 虚功原理在位移计算中的应用形式----虚力原理

三. 学习指导

本节是静定结构与超静定结构的联结部分，本节的关键是概念的理解，应在理解虚力原理的基础上掌握计算静结构在支座移动时的位移，因而加深单位荷载法的理解，为今后的学习打下一个良好的基础。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P235~240

4.1.1. 结构位移计算概述

1. 位移的概念:

结构在荷载、温度变化、支座移动与制造误差等各种因素作用下发生变形，因而结构上各点的位置会有变动。这种位置的变动称为位移。

结构的位移通常有两种（图 4-1）：截面的移动----线位移；截面的转动----角位移。

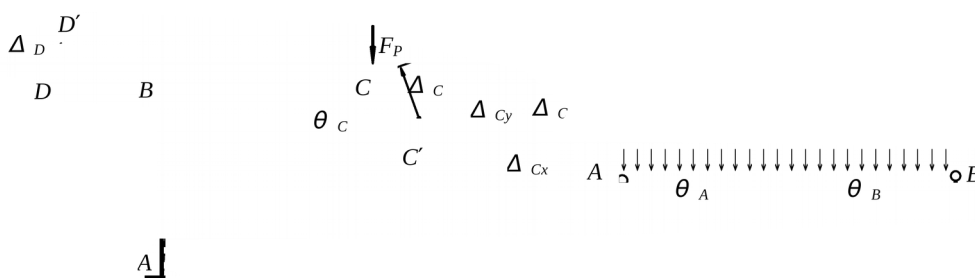


图 4-1

2. 结构位移计算的目的:

(1) 验算结构的刚度，校核结构的位移是否超过允许限值，以防止构件和结构产生过大的变形而影响结构的正常使用。

(2) 为超静定结构的内力计算打下基础。因为，位移计算是计算超静定结构的一个组成部分。

3. 产生位移的原因：

- (1) 荷载作用；
- (2) 温度变化和材料胀缩；
- (3) 支座的沉降和制造误差。

位移计算的理论基础----虚力原理

4.1.2 虚功原理在位移计算中的应用形式----虚力原理

虚功原理的关键是位移与力系是独立无关的。因此，可以把位移看成是虚设的，也可以把力系看成是虚设的，本部分正是把力系看作是虚设的，求刚体体系的位移。

下面通过实际例子一方面介绍虚功原理在计算位移的应用----虚力原理，另一方面通过此例子，应掌握支座移动时静定结构的位移计算。

如图 4-2a 中所示的静定梁，支座 C 向上移动了一个已知距离 c_1 ，现在求 B 处的位移 Δ 。

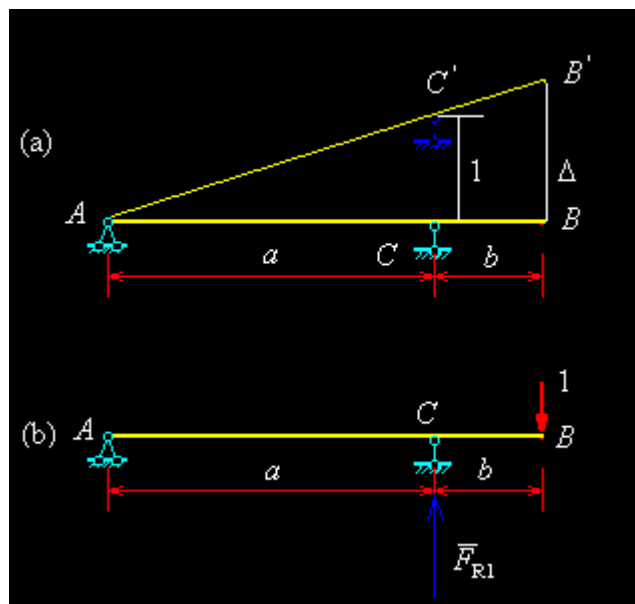


图 4-2

为了应用虚功原理，计算图 4-2a 中的位移状态中的位移，应根据所求位移来虚设力系，由于位移状态为给定状态，力状态为虚设状态，因此称为虚力原理。

根据虚功原理力状态和位移状态除了结构形式和支座情况需要相同外，其它方面两者完全无关，因此应根据所需来虚设力状态。为了使力状态上的力能够在实际状态的所求位移 Δ 上做虚功，应在该点施加一集中力大小为 1（为什

么) ----在拟求位移的方向上设置单位荷载, 而在其它处不再设置荷载 (图 6-2b)。应用平衡条件可求出支座反力。

利用虚功原理可得:

$$-\Delta \times 1 + c_1 \times \overline{F}_{R1} = 0$$

$$\Delta = c_1 \times \overline{F}_{R1} = \frac{a+b}{a} c_1$$

结论: 在拟求位移的方向上虚设单位荷载, 利用平衡条件求支反力。利用虚力原理列出虚力方程进行求解, 由于是在所求位移处设置单位荷载, 因此, 这种解法又称单位荷载法。

§6-2 变形体的虚功原理

一. 教学目的

理解变形体的虚功原理, 能够区分力状态和位移状态以及二者之间的独立性。

二. 主要内容

1. 变形体的虚功原理及应用条件
2. 变形体虚功原理的表达式

三. 学习指导

本节的主要内容是变形体的虚功原理的描述, 虚功原理的应用有一定的广泛性, 重点是理解虚功原理, 为今后的学习打下一个良好的基础。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》 P269~275

6.2.1. 变形体的虚功原理

虚功原理是力学中的一个基本原理, 它有两个基本形式:

虚力原理、虚位移原理

变形体的虚功原理可表述为:

设变形体在力系作用下处于平衡状态, 又设变形体由于其它原因产生符合约束条件的微小连续变形, 则外力在位移上所做的虚功 W 恒等于各个微段的应力合力在变形上所做的内力虚功 W_i 。

可简单写成：外力功 $W =$ 内力功 W_i

虚功原理涉及两组彼此无关的量----作用于结构的平衡力系和符合结构约束条件的微小连续变形系。

2、变形体虚功原理的应用条件

变形体虚功原理的应用条件是：力系应当满足平衡条件----力系是平衡的；位移应当符合支承情况并保持结构的连续性-----变形符合约束条件，且是微小连续的。

虚功原理可用于不同材料、不同结构，应用范围很广。

6.2.2. 变形体虚功原理的表达式

对于任意一个结构则虚功原理的一般形式可表示为：

$$\sum F_P \Delta + \sum F_{RX} c_K + \sum \int (pu + q\omega) ds \\ = \sum \int (Md\theta + F_N \varepsilon ds + F_Q \gamma_0 ds)$$

其中

$\sum F_P \Delta$ 为集中荷载的虚功总和

$\sum F_{RX} c_K$ 为支反力的虚功总和

$\sum \int (pu + q\omega) ds$ 为分布荷载的虚功总和

$\sum \int Md\theta$ 为弯矩的虚功总和

$\sum F_N \varepsilon ds$ 为轴力的虚功总和

$\sum F_Q \gamma_0 ds$ 为剪力的虚功总和

如果力系是给定的，位移是虚设的，则上式为变形体的虚位移方程，可用于求力系中的某未知力。

如果位移是给定的，力系是虚设的，则上式为变形体的虚力方程，可用于求给定变形状态中某未知位移。这也是本章的主要内容。

§6-3 结构位移计算的一般公式

一. 教学目的

在进一步理解变形体的虚功原理的基础上，理解广义力、广义荷载和单位荷载法，利用虚功原理，根据所求位移，假设出虚设的力状态。正确理解结构位移计算的一般公式。

二. 主要内容

1. 单位荷载法

2. 位移计算的一般步骤

3. 广义力和广义位移

三. 学习指导

本节的主要内容是单位荷载法以及相应的表达式，对于相应的理论没有给出进一步的推导和证明，读者可以通过参考资料进行学习。本节的重点是单位荷载法。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P235~304 页

6.3.1. 单位荷载法

根据虚力原理的基本表达式：

$$\sum F_P \Delta + \sum F_{RK} C_K + \sum \int (pu + q\omega) ds \\ = \sum \int (Md\theta + F_N \varepsilon ds + F_Q \gamma_0 ds)$$

其中

$\sum F_P \Delta$ 为集中荷载的虚功总和

$\sum F_{RK} C_K$ 为支反力的虚功总和

$\sum \int (pu + q\omega) ds$ 为分布荷载的虚功总和

$\sum \int Md\theta$ 为弯矩的虚功总和

$\sum F_N \varepsilon ds$ 为轴力的虚功总和

$\sum F_Q \gamma_0 ds$ 为剪力的虚功总和

为了能够计算某一结构位移 Δ ，我们选择的力系中只包含一个对拟求位移 Δ 做虚功的相应荷载 P 。这样上式就变成：

$$P \times \Delta = -\sum F_{RK} C_K + \sum \int (Md\theta + F_N \varepsilon ds + F_Q \gamma_0 ds)$$

进一步令 $P=1$ ，便有：

$$1 \times \Delta = -\sum \bar{F}_{RK} C_K + \sum \int (\bar{M} d\theta + \bar{F}_N \varepsilon ds + \bar{F}_Q \gamma_0 ds)$$

或

$$1 \times \Delta = -\sum \bar{F}_{RK} C_K + \sum \int \bar{M} d\theta + \sum \int \bar{F}_N \varepsilon ds + \sum \int \bar{F}_Q \gamma_0 ds$$

式中， $\bar{F}_{RK}, \bar{F}_N, \bar{F}_Q, \bar{M}$ 是结构在集中单位荷载 $P=1$ 作用下的支反力和内力，

它们都可以由静力平衡条件求出。而位移则是实际结构中的位移。

由于在假设中的力系是利用最简单的虚设力系-----单位荷载力系，通过上式计算位移，这就是单位荷载法计算位移的基本思路。

下面讨论位移计算的一般步骤和思路

6.3.2. 位移计算的一般步骤

求结构在某一点沿某一方向的位移 Δ ，其计算步骤为：

- (1) 虚设一单位荷载状态，在结构的所求位移处作用与位移相应的单位荷载，注意单位荷载应与所求位移相一致。
- (2) 在单位荷载作用下，根据平衡条件，求出结构的内力和支反力。
- (3) 利用公式：

$$1 \times \Delta = - \sum \bar{F}_{RX} C_K + \sum \int (M d\theta + F_N \epsilon ds + F_Q \gamma_0 ds)$$

或

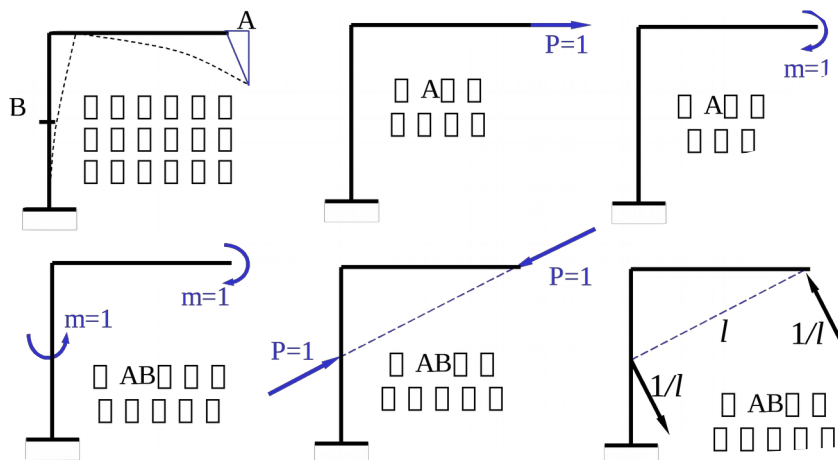
$$1 \times \Delta = - \sum \bar{F}_{RX} C_K + \sum \int M d\theta + \sum \int F_N \epsilon ds + \sum \int F_Q \gamma_0 ds$$

可求出相应的位移，计算出的结果为正值时，则表明所求位移与单位荷载方向一致，负值时则表明实际位移与单位荷载方向相反，具体计算可参考荷载作用下的位移计算和温度变化下的位移计算。

下面将讨论 如何建立虚设状态----单位荷载状态。

6.3.3. 广义位移和虚设状态

本章所讨论的位移可以引申为广义位移。它既可以是某点沿某一方向的线位移或某一截面的角位移，也可以是某两个截面的相对位移等。为了能够应用位移计算的一般公式，虚设单位荷载必须与所求位移产生虚功，因此，虚设单位荷载应与广义位移相一致。下面结合实例分析虚设单位荷载：



§6-4 荷载作用下的位移计算

一. 教学目的

在进一步理解变形体的虚功原理的基础上, 掌握结构在荷载作用下的位移计算。正确理解结构位移计算的一般公式以及各种不同结构的计算公式, 能够计算结构的位移。

二. 主要内容

1. 各种结构的位移计算公式
2. 梁的位移计算实例
3. 桁架位移计算实例

三. 学习指导

本节的主要内容是用积分法计算结构的位移, 对于相应的理论没有给出一步的推导和证明, 读者可以通过参考资料进行学习。本节的重点是结构的位移计算, 学习的方法是多进行练习, 学习的基础是结构内力的计算和表示。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P187~226

6.4.1. 各种结构位移计算公式

根据虚功原理和单位荷载法, 对于位移计算可以得出以下结论:

$$1 \times \Delta = - \sum \bar{F}_{RK} C_K + \sum \int (M d\theta + F_N \varepsilon ds + F_Q \gamma_0 ds)$$

或

$$1 \times \Delta = - \sum \bar{F}_{RK} C_K + \sum \int M d\theta + \sum \int F_N \varepsilon ds + \sum \int F_Q \gamma_0 ds$$

下面讨论结构在荷载作用下的计算公式, 利用材料力学中内力与应变的关系:

$$d\theta = \frac{M_P}{EI} ds$$

$$\varepsilon = \frac{F_{NP}}{EA}$$

$$\gamma_0 = k \frac{F_{QP}}{GA}$$

这里, E 和 G 分别是材料的弹性模量和剪切弹性模量; A 和 I 分别是杆件截面的面积和惯性矩。 k 是与截面形状有关的系数。

将上两个结论进行统一，可得出荷载作用下弹性位移的一般公式

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \sum \int \frac{k \overline{F}_Q F_{QP}}{GA} ds$$

M_P, F_{NP}, F_{QP} 为实际荷载引起的内力；

$\overline{M}, \overline{F}_N, \overline{F}_Q$ 为虚设单位荷载引起的内力

内力正负号规定：轴力以拉为正，剪力是微段顺时针转动者为正，弯矩规定两者的乘积的正负号，当两个弯矩使杆件同一侧受拉时，其乘积取正号。

各类结构的位移计算：

(1) 梁和刚架

由于梁和刚架是以弯曲为主要变形，因此位移计算可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds$$

(2) 桁架

桁架中杆件只受轴力作用，且每根杆件的截面面积、轴力均为常数，故位移计算可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} ds = \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} \int ds = \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

(3) 组合结构

桁梁混合结构中，一些杆件以弯为主，一些杆件只受轴力，故位移计算可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds + \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

(4) 拱

对于拱结构，当压力线与拱轴线相近时，应考虑弯曲变形和轴向变形，即

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} ds$$

当压力线与拱轴线不相近时，只考虑弯曲变形的影响。

4.4.2. 梁的位移计算实例

位移计算的基本步骤：

- (1) 根据欲求位移虚设单位荷载，然后分别列出各杆段的内力方程；
- (2) 列实际荷载作用下的各杆段内力方程；
- (3) 将各内力方程分别代入到相应的计算公式中，分段积分后再求和，即可计算所求位移。

实例分析：

试计算图 4-3a 所示悬臂梁在 B 端的竖向位移， EI 为常数。

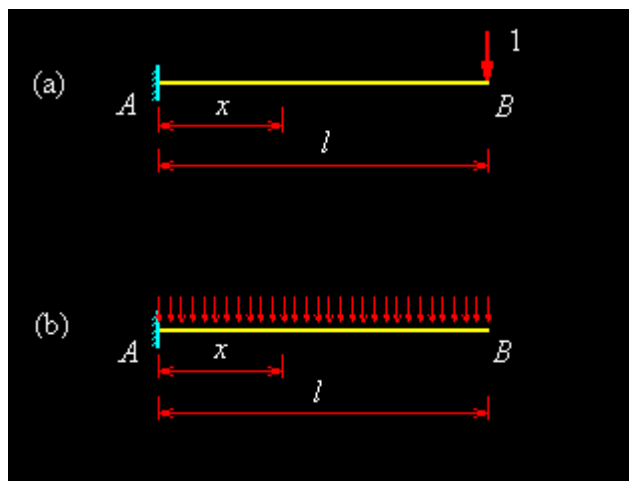


图 4-3

解：虚设单位荷载图 4-3b。

实际荷载和单位荷载的弯矩方程为：

$$M_P = -\frac{1}{2}q(l-x)^2 \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\bar{M} = -(l-x) \quad 0 \leq x \leq l$$

利用计算位移公式可得

$$\Delta_B = \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds = \int_0^l \frac{\left(-\frac{1}{2}q(l-x)^2\right)(-(l-x))}{EI} dx = \frac{ql^4}{8EI}$$

计算结果为正说明实际位移方向与单位荷载方向一致。

有关梁和刚架的位移计算将在图乘法中继续分析。

4.4.3. 桁架的位移计算

计算图示是结构 E 点的挠度，上弦杆截面面积为 $A_1=120\text{cm}^2$ ，弹性模量为 $E_1=10^3\text{kN/cm}^2$ 下弦杆截面面积为 $A_2=100\text{cm}^2$ ，弹性模量为 $E_2=2.1 \times 10^4\text{kN/cm}^2$ 腹杆截面面积为 $A_3=64\text{cm}^2$ ，弹性模量为 $E_3=2.1 \times 10^4\text{kN/cm}^2$

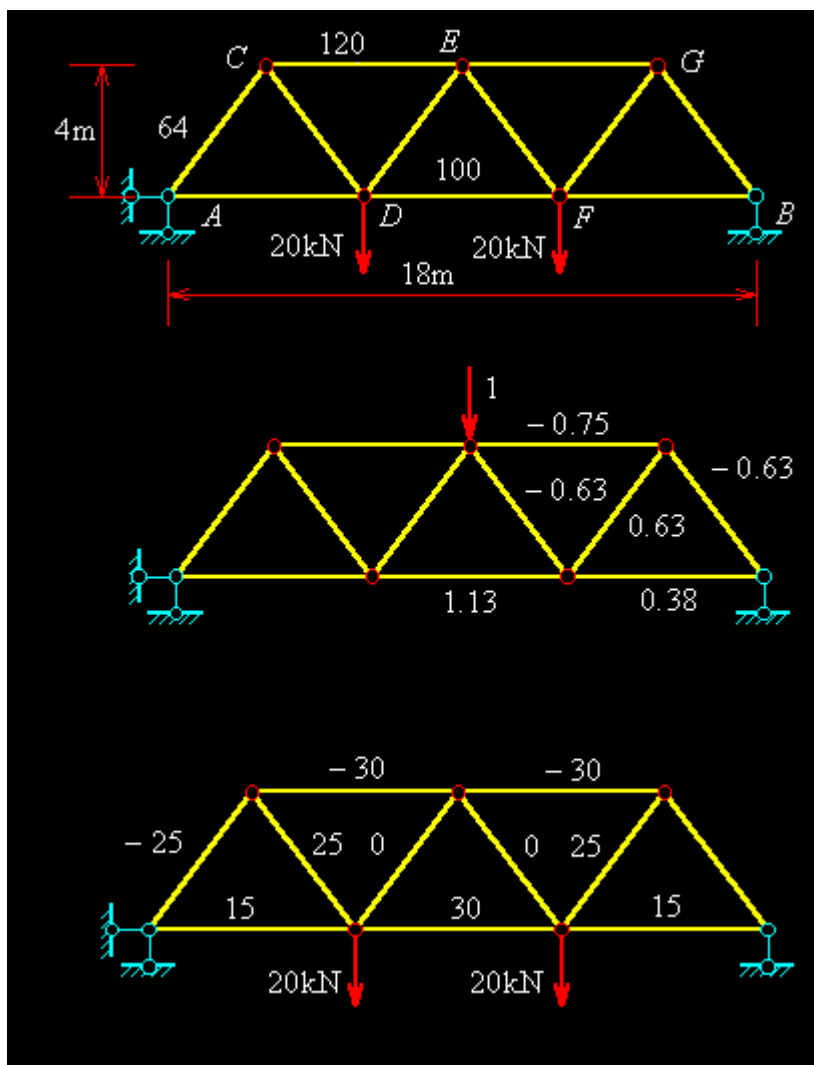


图 6-4

解：在结点 E 加单位力，并求相应的内力（图 6-4b）。

求实际荷载的内力(图 6-4c)。

由于对称性，可计算一半内力，杆 DF 的长度只取一半。列表计算位移

杆件	$F_{NP}(kN)$	$l(cm)$	$A(cm^2)$	$E(kN/cm^2)$	$\overline{F_N}$	$\frac{F_{NP}\overline{F_N}l}{EA}(cm)$
AD	15	600	100	2.1×10^4	0.38	0.0016
AC	-25	500	64	2.1×10^4	-0.63	0.0058
CD	25	500	64	2.1×10^4	0.63	0.0058
CE	-30	600	120	10^3	-0.75	0.1125
DE	0	500	64	2.1×10^4	-0.63	0.0000
DF	30	300	100	2.1×10^4	1.13	0.0048

合计

0.1305

所以

$$\Delta_F = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NF} l}{EA} = 2 \times 0.1305 = 0.261 \text{ cm} \downarrow$$

§4-5 图乘法

一. 教学目的

正确理解图乘法和应用条件以及图乘法的含义,能够利用图乘法计算梁、刚架的位移,理解各种弯矩图的叠加并能够根据叠加进行图乘。

二. 主要内容

1. 图乘法及应用条件
2. 常见图形的面积和形心
3. 图乘法的几个具体问题
4. 图乘法应用举例(1)
5. 图乘法应用举例(2)

三. 学习指导

图乘法是梁、刚架位移计算的主要方法也是位移计算的重点,应重点掌握,练习和测验都是围绕图乘进行的,应多做练习。

四. 参考资料

《结构力学教程(I)》P257~267

4.5.1. 图乘法及应用条件

根据计算梁和刚架这类以受弯为主的杆件的位移时,通常采用如下的计算公式的公式:

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_F}{EI} ds \quad (\text{a})$$

此式形式上虽然简单,但需要分别求出单位荷载作用下相应杆件的 $\bar{M}(x)$ 的表达式和实际荷载下相应杆件的 $M_p(x)$ 的表达式,然后逐杆积分。当结构中杆件复杂较多时计算就比较麻烦,为避免微分运算,以下介绍一种计算方法----图乘法。

下面说明图乘法的内容和应用条件:

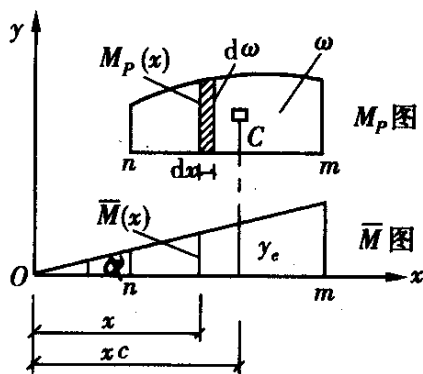


图 4-5

图 4-5 为某直杆段 AB 的两个弯矩图 $\bar{M}(x)$ 和 $M_p(x)$, 其中有一个图形为直线($\bar{M}(x)$ 图), 在距原点的距离为 x 处

$$\bar{M}(x) = x \times \tan \alpha \quad (b)$$

由于 AB 为等截面直杆, 所以抗弯刚度 EI 为常数 $ds = dx$, 将上式代入式 (a) 得到

$$\Delta_{kp} = \int_n^m \frac{x \times \tan \alpha}{EI} M_p(x) \cdot ds = \frac{\tan \alpha}{EI} \int_n^m x \cdot M_p(x) \cdot dx \quad (c)$$

设 $M_p(x) \cdot dx = d\omega$, 故有

$$\Delta_{kp} = \frac{\tan \alpha}{EI} \int_n^m x \cdot d\omega \quad (d)$$

上式中: $x \cdot d\omega$ 表示微分面积 $d\omega$ 对 y 轴的面积矩, $\int_n^m x \cdot d\omega$ 表示 $M_p(x)$ 图面积对 y 轴的面积矩。设 $M_p(x)$ 图的形心 C 距 y 轴的距离为 x_c , $M_p(x)$ 图面积为 ω , 由材料力学知:

$$\int_n^m x \cdot d\omega = \omega \cdot x_c \quad (e)$$

将 (e) 式代入 (d) 式, 得到:

$$\Delta_{kp} = \frac{\tan \alpha}{EI} \omega \cdot x_c = \frac{1}{EI} \omega \cdot y_c \quad (f)$$

上式中的 $y_c = x_c \cdot \tan \alpha$ ，它表示 $M_p(x)$ 图的形心 c 所对应的 $\overline{M}(x)$ 图的竖距，对应整个结构而言

$$\Delta_{kp} = \sum \frac{1}{EI} \omega \cdot y_c$$

上式把积分运算简化为一个图形面积 ω ，于其形心所对应的另一个图形的竖距 y_c 的乘积，在除以 EI 。此方法称之为图形互乘法，简称为图乘法。

位移计算的问题转化为求图形的面积、形心和竖距的问题。

应用图乘法应注意两点：

1. 应用条件：

- (1) 杆段应是等截面直杆段；（杆件的 EI 为常数或是可以分为若干个常数段）。
- (2) 两个图形中至少有一个是直线图形（直线图形中可由若干个不同的斜率），竖距 y_c 应取自直线图形中。

2. 正负号规定：

面积 A 与竖距 y_c 在同一侧时，乘积取正号；反之取负号。

4.5.2. 常见图形的面积和形心

根据图乘法，位移计算主要是计算图形的面积、形心和标距，下面介绍常见图形的形心和面积：

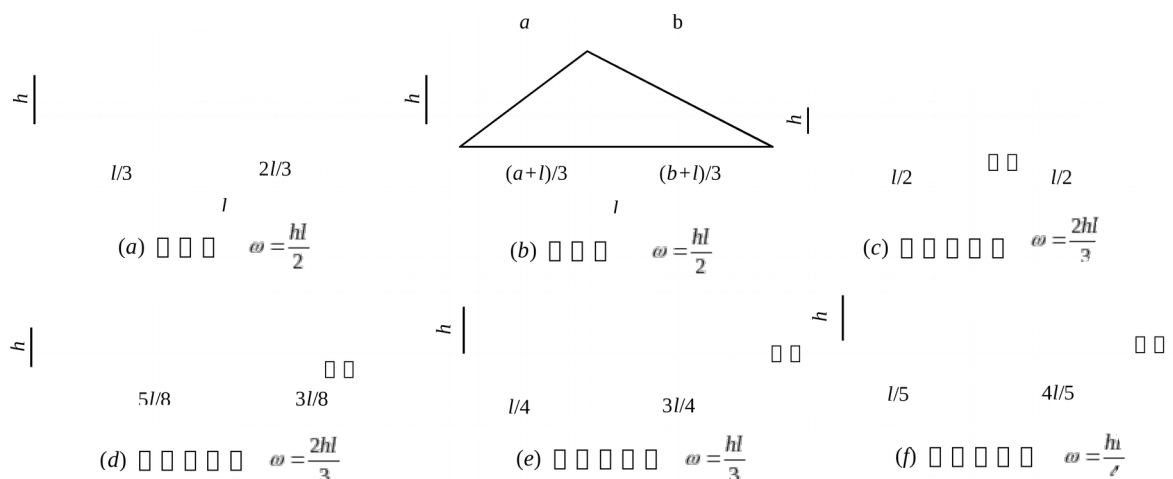
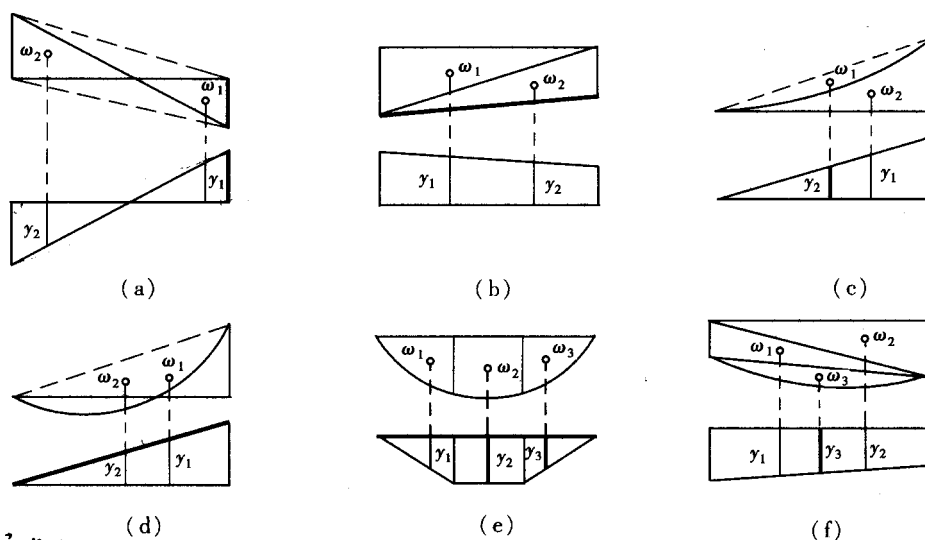


图 4-6

以上图形的抛物线均为标准抛物线——抛物线的顶点处的切线都是与基线平行。

对于复杂图形，处理的办法是：将其分解为几个简单的图形，图乘后再叠加。



4.5.3. 应用图乘法时的几个具体问题

- (1) 如果两个图形都是直线图形,则竖距可任取自其中一个图形。
- (2) 如果一个图形为曲线, 另一个图形为折线, 则应分段考虑。如图 4-7 所示

示

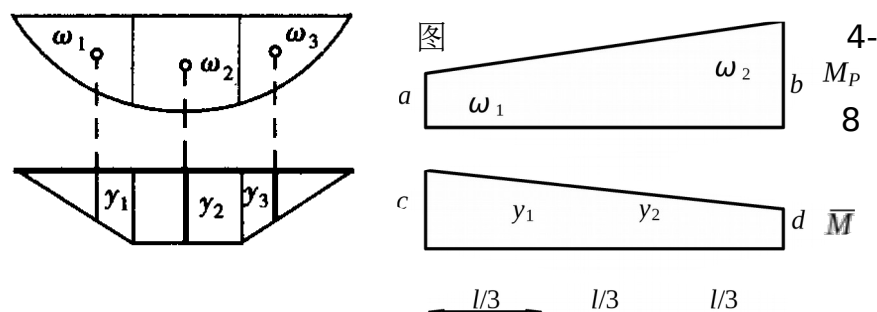


图 4-7

则计算结果应为:

$$\int \bar{M}(x) M_p(x) dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3$$

- (3) 如果图形比较复杂, 可以将图形分解为几个简单图形, 分项计算后再进行叠加。

如图 4-8 两个图形均为梯形, 将梯形分为两个三角形再进行图乘。因此,

$$\int \bar{M}(x) M_p(x) dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2$$

对于非标准抛物线的图乘, 由于弯矩图中的非标准抛物线是由叠加原理获得, 因此可以将非标准抛物线分解为标准抛物线图形和直线图形。

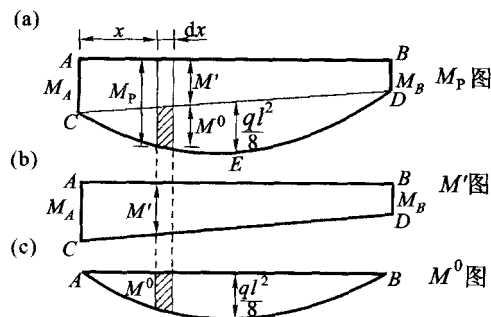


图 4-9

讨论:

以上抛物线中的 M_0 的两个图形并不相似,为什么面积和形心的横坐标是相同的?

所谓弯矩图的叠加是指弯矩图纵坐标的叠加。所以虽然图 4-9a 的 M_0 与图 b 中的 M_0 形状不相似但在同一横坐标 x 处, 二者的纵坐标是相同的, 微段 dx 的微小面积 (图中带阴影的部分的面积) 是相同的。因此, 两图的面积和形心的横坐标也是相同的。

4.5.4. 图乘法应用举例

例 1: 试计算图 4-10a 所示简支梁中点 C 点的竖向位移 Δ_{cv} 和 B 点的

转角位移 Δ_B , EI 为常数。

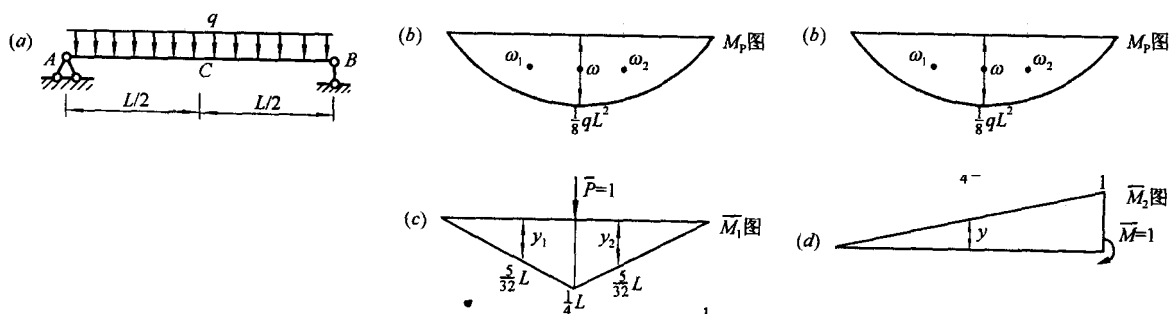


图 4-10

解: (1) 求 Δ_{cv} , 虚设单位荷载 (图 4-10c 所示),

作实际状态和虚设单位荷载的弯矩图(图 4-10 b 、图 4-10c)。

应用图乘法, 实际荷载弯矩图中计算面积, 单位荷载弯矩图中计算竖标:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/727011026155006040>