

专题 08 基本不等式

【题型归纳目录】

题型一：对基本不等式的理解及简单应用

题型二：利用基本不等式比较大小

题型三：利用基本不等式证明不等式

题型四：利用基本不等式求最值

(1) 直接法求最值

(2) 常规凑配法求最值

(3) 消参法求最值

(4) 换元求最值

(5) “1”的代换求最值

(6) 条件等式求最值

题型五：利用基本不等式求解恒成立问题

题型六：基本不等式在实际问题中的应用

【知识点梳理】

知识点一：基本不等式

1、对公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的理解.

(1) 成立的条件是不同的：前者只要求 a, b 都是实数，而后者要求 a, b 都是正数；

(2) 取等号“=” 的条件在形式上是相同的，都是“当且仅当 $a = b$ 时取等号”.

2、由公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 可以引申出常用的常用结论

$$\textcircled{1} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 \quad (a, b \text{ 同号});$$

$$\textcircled{2} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2 \quad (a, b \text{ 异号});$$

$$\textcircled{3} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \text{ 或 } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad (a > 0, b > 0)$$

知识点诠释： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 可以变形为： $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 可以变形为： $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

知识点二：基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的证明

方法一：几何面积法

专题 08 基本不等式

【题型归纳目录】

题型一：对基本不等式的理解及简单应用

题型二：利用基本不等式比较大小

题型三：利用基本不等式证明不等式

题型四：利用基本不等式求最值

(1) 直接法求最值

(2) 常规凑配法求最值

(3) 消参法求最值

(4) 换元求最值

(5) “1”的代换求最值

(6) 条件等式求最值

题型五：利用基本不等式求解恒成立问题

题型六：基本不等式在实际问题中的应用

【知识点梳理】

知识点一：基本不等式

1、对公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的理解.

(1) 成立的条件是不同的：前者只要求 a, b 都是实数，而后者要求 a, b 都是正数；

(2) 取等号“=”的条件在形式上是相同的，都是“当且仅当 $a = b$ 时取等号”.

2、由公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 可以引申出常用的常用结论

$$\textcircled{1} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 \quad (a, b \text{ 同号});$$

$$\textcircled{2} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2 \quad (a, b \text{ 异号});$$

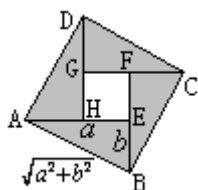
$$\textcircled{3} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \text{ 或 } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad (a > 0, b > 0)$$

知识点诠释： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 可以变形为： $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ， $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 可以变形为： $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

知识点二：基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的证明

方法一：几何面积法

如图，在正方形 $ABCD$ 中有四个全等的直角三角形．



设直角三角形的两条直角边长为 a 、 b ，那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ．这样，4 个直角三角形的面积的和是 $2ab$ ，正方形 $ABCD$ 的面积为 $a^2 + b^2$ ．由于 4 个直角三角形的面积小于正方形的面积，所以： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ．当直角三角形变为等腰直角三角形，即 $a = b$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一个点，这时有 $a^2 + b^2 = 2ab$ ．

得到结论：如果 $a, b \in \mathbb{R}^+$ ，那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ （当且仅当 $a = b$ 时取等号“=”）

特别的，如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，我们用 $\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{b}$ 分别代替 a 、 b ，可得：

如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，（当且仅当 $a = b$ 时取等号“=”）．

通常我们把上式写作：如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ，（当且仅当 $a = b$ 时取等号“=”）

方法二：代数法

$$\because a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0,$$

当 $a \neq b$ 时， $(a - b)^2 > 0$ ；

当 $a = b$ 时， $(a - b)^2 = 0$ ．

所以 $(a^2 + b^2) \geq 2ab$ ，（当且仅当 $a = b$ 时取等号“=”）．

知识点诠释：

特别的，如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，我们用 $\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{b}$ 分别代替 a 、 b ，可得：

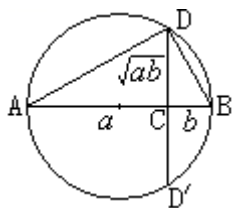
如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，（当且仅当 $a = b$ 时取等号“=”）．

通常我们把上式写作：

如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ，（当且仅当 $a = b$ 时取等号“=”）．

知识点三：基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的几何意义

如图， AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上的一点， $AC = a$ ， $BC = b$ ，过点 C 作 $DC \perp AB$ 交圆于点 D ，连接 AD 、 BD ．



易证 $Rt\triangle ACD \sim Rt\triangle DCB$ ，那么 $CD^2 = CA \cdot CB$ ，即 $CD = \sqrt{ab}$ 。

这个圆的半径为 $\frac{a+b}{2}$ ，它大于或等于 CD ，即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，其中当且仅当点 C 与圆心重合，即 $a=b$ 时，等号成立。

知识点诠释：

1、在数学中，我们称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a, b 的算术平均数，称 $\sqrt{ab}$ 为 a, b 的几何平均数。因此基本不等式可叙述为：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

2、如果把 $\frac{a+b}{2}$ 看作是正数 a, b 的等差中项， $\sqrt{ab}$ 看作是正数 a, b 的等比中项，那么基本不等式可以叙述为：两个正数的等差中项不小于它们的等比中项。

知识点四：用基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 求最大（小）值

在用基本不等式求函数的最值时，应具备三个条件：一正二定三取等。

- ① **一正**：函数的解析式中，各项均为正数；
- ② **二定**：函数的解析式中，含变数的各项的和或积必须有一个为定值；
- ③ **三取等**：函数的解析式中，含变数的各项均相等，取得最值。

知识点诠释：

1、两个不等式： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 与 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的，前者要求 a, b 都是实数，后者要求 a, b 都是正数。

2、两个不等式： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 与 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 都是带有等号的不等式，对于“当且仅当……时，取“=”号这句话的含义要有正确的理解。

3、基本不等式的功能在于“和积互化”。若所证不等式可整理成一边是和，另一边是积的形式，则考虑使用平均不等式；若对于所给的“和式”中的各项的“积”为定值，则“和”有最小值，对于给出的“积式”中的各项的“和”为定值，则“积”有最大值。

4、利用两个数的基本不等式求函数的最值必须具备三个条件：

- ①各项都是正数；
- ②和（或积）为定值；
- ③各项能取得相等的值。

5、基本不等式在解决实际问题中有广泛的应用，在应用时一般按以下步骤进行：

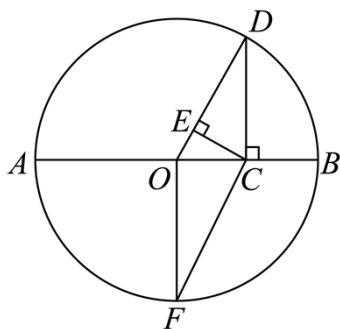
- ①先理解题意，设变量，设变量时一般把要求最大值或最小值的变量定为函数；
- ②建立相应的函数关系式，把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题；
- ③在定义域内，求出函数的最大或最小值；
- ④写出正确答案。

【典例例题】

题型一：对基本不等式的理解及简单应用

例 1. (2023·福建宁德·高一福建省宁德第一中学校考阶段练习) 《几何原本》卷 2 的几何代数法(几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据.通过这一原理,很多的代数的公理或定理都能够通过图形实现证明,也称之为无字证明;如图所示图形,点 D 、 F 在圆 O 上,点 C 在直径 AB 上,且 $OF \perp AB$, $CD \perp AB$, $CE \perp OD$ 于点 E , 设 $AC = a$, $BC = b(a > b > 0)$, 该图形完成

$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的无字证明.则图中表示 a , b 的调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$ 、平方平均数 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的线段分别是 ()



- A. CE , CD B. CE , CF C. DE , CF D. OF , CD

【答案】C

【解析】由图形可知: $OF = \frac{1}{2}AB = \frac{AC+CB}{2} = \frac{a+b}{2}$, $OC = AC - OA = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$,

在 $Rt\triangle COF$ 中, 由勾股定理得 $CF = \sqrt{OF^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,

在 $Rt\triangle COD$ 中, 由勾股定理得 $CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$,

因为 $CD \perp AB$,

所以 $Rt\triangle COD \sim Rt\triangle CED$,

则 $\frac{DE}{DC} = \frac{DC}{DO}$, 即 $DE = \frac{DC^2}{DO} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$,

所以图中表示 a , b 的调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$ 、平方平均数 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的线段分别是 DE , CF ,

故选: C

例 2. (2023·上海静安·高一校考期中) 给出下列命题中, 真命题的个数为 ()

① 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$ 成立;

②已知 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$ ，则 $|x + \frac{4}{x}| = |x| + |\frac{4}{x}| \geq 2\sqrt{|x| \cdot |\frac{4}{x}|} = 4$ 成立；

③已知 $x \in \mathbf{R}$ ，则 $\sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值为 2；

④已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ， $ab < 0$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = -(\frac{-b}{a} + \frac{-a}{b}) \leq -2\sqrt{(\frac{-b}{a}) \cdot (\frac{-a}{b})} = -2$ 成立。

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】当 $ab < 0$ 时，①中的不等式是错误的，①错；

因为 x 与 $\frac{4}{x}$ 同号，所以 $|x + \frac{4}{x}| = |x| + |\frac{4}{x}|$ 是正确的，且 $|x| = |\frac{4}{x}|$ ，即 $x = \pm 2$ 时等号成立，所以②中的基本不等式计算是正确的，②对；

$\sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} > 2$ （当 $\sqrt{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 时， $x^2 = -1$ 无解，等号不成立），故③错；

因为 $ab < 0$ ，所以 $-\frac{a}{b} > 0$ 且 $-\frac{b}{a} > 0$ ，且 $-\frac{b}{a} = \frac{-a}{b}$ ，即 $a = -b$ 时等号成立，所以④中的基本不等式运算是正确的，④对。

故选：B.

例 3. (2023·上海普陀·高一校考期中) 下列不等式中等号可以取到的是 ()

A. $\sqrt{x^2+5} + \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} \geq 2$

B. $x^2+2 + \frac{1}{x^2+2} \geq 2$

C. $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

D. $|x|+3 + \frac{1}{|x|+3} \geq 2$

【答案】C

【解析】对于 A，因为 $\sqrt{x^2+5} > 0$ ，所以 $\sqrt{x^2+5} + \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+5} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}} = 2$ ，当且仅当

$\sqrt{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ ，即 $x^2 = -4$ ，故等号不成立，故 A 不符合；

对于 B，因为 $x^2+2 > 0$ ，所以 $x^2+2 + \frac{1}{x^2+2} \geq 2\sqrt{(x^2+2) \cdot \frac{1}{x^2+2}} = 2$ ，当且仅当 $x^2+2 = \frac{1}{x^2+2}$ ，即 $x^2 = -1$ ，故等号不成立，故 B 不符合；

对于 C，因为 $x^2 > 0$ ，所以 $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$ ，当且仅当 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ ，即 $x = \pm 1$ 时取等号，故 C 符合；

对于 D，因为 $|x|+3 > 0$ ，所以 $|x|+3 + \frac{1}{|x|+3} \geq 2\sqrt{(|x|+3) \cdot \frac{1}{|x|+3}} = 2$ ，当且仅当 $|x|+3 = \frac{1}{|x|+3}$ ，即 $|x| = -2$ ，故等号不成立，故 D 不符合。

故选：C.

变式 1. (2023·北京丰台·高一北京市第十二中学校考期中) 下列结论正确的是 ()

- A. 当 $x < 2$ 时, $x + \frac{1}{x-2} \geq 4$ B. 当 $x \geq 2$ 时, $x + \frac{2}{x}$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$
- C. 当 $x > 0$ 时, $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4$ D. 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x+1}$ 的最小值为 1

【答案】C

【解析】对于 A, 当 $x = 0$ 时, $x + \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$, 故 A 错误,

对于 B, 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时等号成立, 故 B 错误,

对于 C, 当 $x > 0$ 时, $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4$, 当且仅当 $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$ 即 $x = 4$ 时等号成立, 故 C 正确,

对于 D, 当 $x > -1$ 时, $x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2 - 1 = 1$, 当且仅当 $x+1 = \frac{1}{x+1}$ 即 $x = 0$ 时等号成立, 故 D 错误,

故选：C

题型二：利用基本不等式比较大小

例 4. (2023·重庆沙坪坝·高一重庆市第七中学校校考阶段练习) 若实数 x, y, m 满足 $|x-m| > |y-m|$, 则称 x 比 y 远离 m .

(1) 解不等式 $|x| > 3$

(2) 若 x 比 $\frac{1}{2}$ 远离 1, 求实数 x 的取值范围;

(3) 若 $m \in 1$, $x+y=2$, 试问: x 与 x^2+y^2 哪一个更远离 m , 并说明理由.

【解析】(1) 令 $m = 0$, $y = 3$ 即有 $|x| > |3|$, 所以 x 比 3 远离 0,

从数轴上可得 x 的取值范围是 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$;

(2) 由 x 比 $\frac{1}{2}$ 远离 1, 则 $|x-1| > \left| \frac{1}{2} - 1 \right|$, 即 $|x-1| > \frac{1}{2}$,

$\therefore x-1 > \frac{1}{2}$ 或 $x-1 < -\frac{1}{2}$, 解得 $x > \frac{3}{2}$ 或 $x < \frac{1}{2}$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$;

(3) 因为 $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = 2 \geq m$, 有 $|x^2+y^2-m| = x^2+y^2-m$,

因为 $x+y=2$, 所以 $x^2+y^2 = x^2+(2-x)^2 = 2x^2-4x+4$,

从而 $|x^2+y^2-m| - |x-m| = 2x^2-4x+4-m-|x-m|$,

① 当 $x \geq m$ 时,

$$|x^2 + y^2 - m| - |x - m| = 2x^2 - 4x + 4 - m - (x - m) = 2x^2 - 5x + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \text{ 即 } |x^2 + y^2 - m| > |x - m|;$$

②当 $x < m$ 时,

$$|x^2 + y^2 - m| - |x - m| = 2x^2 - 4x + 4 - m + (x - m) = 2x^2 - 3x + 4 - 2m = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} - 2m,$$

又 $m \leq 1$, 则 $\frac{23}{8} - 2m > 0$,

$$\therefore 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} - 2m > 0, \text{ 即 } |x^2 + y^2 - m| > |x - m|,$$

综上, $|x^2 + y^2 - m| > |x - m|$, 即 $x^2 + y^2$ 比 x 更远离 m .

例 5. (2023·全国·高一专题练习) 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 且 $a^a \geq b^b$, 试找出 $a+b, a^2+b^2, 2\sqrt{ab}, 2ab$ 中的最大者.

【解析】 $\because 0 < a < 1, 0 < b < 1$, 且 $a^a \geq b^b$,

$$\therefore a+b > 2\sqrt{ab}, a^2+b^2 > 2ab,$$

$\therefore$ 四个数中最大者应从 $a+b, a^2+b^2$ 中选择.

$$\text{而 } a^2+b^2-(a+b)=a(a-1)+b(b-1),$$

$$\because 0 < a < 1, 0 < b < 1,$$

$$\therefore a(a-1) < 0, b(b-1) < 0,$$

$$\therefore a^2+b^2-(a+b) < 0,$$

即 $a^2+b^2 < a+b$, $\therefore a+b$ 最大.

例 6. (2023·高一课时练习) 某种产品的两种原料相继提价, 产品生产者决定根据这两种原料提价的百分比, 对产品分两次提价, 现在有三种提价方案:

方案甲: 第一次提价 $p\%$, 第二次提价 $q\%$;

方案乙: 第一次提价 $q\%$, 第二次提价 $p\%$;

方案丙: 第一次提价 $\frac{p+q}{2}\%$, 第二次提价 $\frac{p+q}{2}\%$.

其中 $p > q > 0$, 比较上述三种方案, 哪一种提价少? 哪一种提价多?

【解析】 不妨设提价前的价格为 1, 则

$$\text{方案甲: 两次提价后的价格为: } (1+p\%)(1+q\%) = 1+p\%+q\%+0.01pq\%$$

$$\text{方案乙: 两次提价后的价格为: } (1+q\%)(1+p\%) = 1+p\%+q\%+0.01pq\%$$

$$\text{方案丙: } \left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right) = 1+p\%+q\%+0.01\times\left(\frac{p+q}{2}\right)^2\%$$

由于 $p > q > 0$, 由均值不等式 $p+q \geq 2\sqrt{pq}$, 当且仅当 $p=q$ 时等号成立

$$\text{故 } \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \geq pq, \text{ 且 } p \neq q, \text{ 故等号不成立, 即 } \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 > pq$$

因此方案丙提价最多，方案甲、乙少，且提价一样

变式 2. (2023·湖南长沙·高一长沙一中校考阶段练习) (1) $a > b > 0$ ，比较 $b(a-b)$ 与 $\frac{a^2}{4}$ 的大小；

(2) 已知 $a > b > 0$ ，求代数式 $a^2 + \frac{25}{b(a-b)}$ 的最小值及取最小值时 a, b 的值.

【解析】 (1) $\because a > b > 0, \therefore a-b > 0$,

$\therefore b(a-b) \leq \left[\frac{b+(a-b)}{2} \right]^2 = \frac{a^2}{4}$ ，当且仅当 $b = a-b$ ，即 $2b = a$ 时，等号成立.

所以 $b(a-b) \leq \frac{a^2}{4}$.

(2) 由 (1) 知 $0 < b(a-b) \leq \frac{a^2}{4}$ ， $\therefore \frac{1}{b(a-b)} \geq \frac{4}{a^2}$

$a^2 + \frac{25}{b(a-b)} \geq a^2 + \frac{100}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{100}{a^2}} = 20$ ，当且仅当 $a^2 = \frac{100}{a^2}$ 时取等号，

显然要使 $a^2 + \frac{25}{b(a-b)} = 20$ 成立，需满足 $\begin{cases} b = a-b \\ a^2 = \frac{100}{a^2} \\ a > 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = \sqrt{10} \\ b = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

综上所述，当 $a = \sqrt{10}, b = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，代数式 $a^2 + \frac{25}{b(a-b)}$ 取得最小值 20.

变式 3. (2023·高一课时练习) 已知 $a > b > c$ ，你能比较出 4 与 $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right)(a-c)$ 的大小吗？

【解析】 $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right)(a-c) \geq 4$ ，理由如下：

因为 $a-c = (a-b) + (b-c)$ ，

所以 $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right)[(a-b) + (b-c)]$

$= 2 + \frac{b-c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c}$ ，

又 $a > b > c$ ，所以 $\frac{b-c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} \geq 2$ ，

故 $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right)(a-c) \geq 4$ ，

当且仅当 $\frac{b-c}{a-b} = \frac{a-b}{b-c}$ 时，取等号.

题型三：利用基本不等式证明不等式

例 7. (2023·高一课时练习) 证明：

$$(1) x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1;$$

$$(2) \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2.$$

【解析】(1) $x^2 + \frac{1}{x^2+1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1}} - 1 = 1,$

当且仅当 $x^2+1=1$ 时, 即 $x=0$ 时, 等号成立.

$$(2) \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+1}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}} = 2,$$

当且仅当 $\sqrt{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 时取等号, 此时 $x^2 = -1$,

显然 x 的值不存在, 所以等号不成立,

所以 $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2.$

例 8. (2023·全国·高一假期作业) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

【解析】 $\because a^2 + b^2 \geq 2ab$, ①

$b^2 + c^2 \geq 2bc$, ②

$c^2 + a^2 \geq 2ac$, ③

①+②+③得: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$.

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取等号).

例 9. (2023·全国·高一专题练习) 利用基本不等式证明: 已知 a, b, c 都是正数, 求证:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

【解析】 $\because a, b, c$ 都是正数, $\therefore a+b \geq 2\sqrt{ab} > 0$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号); $b+c \geq 2\sqrt{bc} > 0$ (当且仅当 $b=c$ 时取等号); $c+a \geq 2\sqrt{ca} > 0$ (当且仅当 $c=a$ 时取等号);

$$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc \text{ (当且仅当 } a=b=c \text{ 时取等号),}$$

即 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

变式 4. (2023·高一单元测试) 若 $0 < a < b$, 则下列不等式哪些是成立的? 若成立, 给予证明; 若不成立, 请举出反例.

$$(1) a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a};$$

$$(2) a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a};$$

$$(3) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} > a + b.$$

【解析】(1) 正确 $a + \frac{1}{b} - b - \frac{1}{a} = (a-b)\left(1 + \frac{1}{ab}\right) < 0$

(2) 正确 $a^2 + \frac{1}{a^2} - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right) - 2 = \left(a + \frac{1}{a} - 2\right)\left(a + \frac{1}{a} + 1\right) \geq 0$

(3) 正确 $\frac{a^2}{b} + b > 2a, \frac{b^2}{a} + a > 2b \therefore \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + a + b > 2a + 2b \therefore \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} > a + b$

题型四：利用基本不等式求最值

(1) 直接法求最值

例 10. (2023·新疆省直辖县级单位·高一校考开学考试) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 6$, 则 ab 的最大值为 ()

A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

【答案】D

【解析】因为 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 6$,

所以 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 9$, 当且仅当 $a = b = 3$ 时等号成立,

所以 ab 的最大值为 9.

故选:D.

例 11. (2023·新疆昌吉·高一校考期末) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y = 12$, 则 xy 的最大值为 ()

A. 16 B. 25 C. 36 D. 49

【答案】C

【解析】因为 $x > 0, y > 0$, $x + y = 12 \geq 2\sqrt{xy}$, 即 $xy \leq 36$, 当且仅当 $x = y = 6$ 时取到等号, 故 xy 的最大值为 36.

故选: C

例 12. (2023·云南·高一统考期末) 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x} + 1$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{2} + 1$ B. $2\sqrt{2} + 1$ C. 4 D. 5

【答案】D

【解析】由 $x > 0$ 可知, 利用基本不等式可得 $x + \frac{4}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} + 1 = 5$,

当且仅当 $x = 2$ 时, 等号成立,

即 $x + \frac{4}{x} + 1$ 的最小值为 5.

故选: D

变式 5. (2023·江苏连云港·高一期末) 设 $x > 0, y > 0$, 且 $xy = 4$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 ()

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

【答案】A

【解析】因为 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $xy = 4$ ，

所以 $\frac{1}{x} > 0$ ， $\frac{1}{y} > 0$ ，

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = 2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ，当且仅当 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ ，即 $x = y = 2$ 时取等号，

故选：A.

变式 6. (2023·广西桂林·高一统考期末) 设 $x, y \in \mathbb{R}$ ，且 $x + y = 4$ ，则 $3^x + 3^y$ 的最小值为 ()

A. 10 B. $6\sqrt{3}$ C. $8\sqrt{3}$ D. 18

【答案】D

【解析】 $3^x + 3^y \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{x+y}} = 18$ ，当且仅当 $x = y = 2$ 时，等号成立.

故选：D.

(2) 常规凑配法求最值

变式 7. (2023·全国·高一专题练习) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 1} (x \geq 0)$ 的最小值是 ()

A. -1 B. 3 C. 6 D. 12

【答案】A

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 1} = (x + 1) + \frac{9}{x + 1} - 7 (x \geq 0)$.

因为 $x \geq 0$ ，所以 $x + 1 + \frac{9}{x + 1} \geq 2\sqrt{9} = 6$ ，(当且仅当 $x + 1 = 3$ ，即 $x = 2$ 时，等号成立).

故 $f(x)$ 最小值为 -1，

故选：A

变式 8. (2023·黑龙江哈尔滨·高一校考阶段练习) 若 $-1 < x < 1$ ，则 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ 有 ()

A. 最大值 -1 B. 最小值 -1 C. 最大值 1 D. 最小值 1

【答案】A

【解析】因 $-1 < x < 1$ ，则 $0 < 1 - x < 2$ ，

于是得 $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2 + 1}{1-x} = -\frac{1}{2} \left[(1-x) + \frac{1}{1-x} \right] \leq -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{(1-x) \cdot \frac{1}{1-x}} = -1$ ，当且仅当 $1-x = \frac{1}{1-x}$ ，即 $x = 0$ 时取“=”，

所以当 $x = 0$ 时， $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ 有最大值 -1.

故选：A

变式 9. (2023·天津蓟州·高一校考阶段练习) 函数 $y = 3x + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$) 的最小值是 ()

- A. 4
B. $2\sqrt{3} - 3$
C. $2\sqrt{3}$
D. $2\sqrt{3} + 3$

【答案】D

【解析】由 $y = 3(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3$ ，利用基本不等式求最小值即可. 因为 $x > 1$ ，所以

$$y = 3(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3 \geq 2\sqrt{3(x-1) \times \frac{1}{x-1}} + 3 = 2\sqrt{3} + 3, \text{ 当且仅当 } 3(x-1) = \frac{1}{x-1}, \text{ 即 } x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立.}$$

所以函数 $y = 3x + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$) 的最小值是 $2\sqrt{3} + 3$.

故选：D.

变式 10. (2023·高一课时练习) 若 $x > 4$ ，则 $y = x + \frac{1}{x-4}$ 的最值情况是 ()

- A. 有最大值 -6
B. 有最小值 6
C. 有最大值 -2
D. 有最小值 2

【答案】B

【解析】若 $x > 4$ ，则 $y = x + \frac{1}{x-4} = x-4 + \frac{1}{x-4} + 4 \geq 2\sqrt{(x-4) \frac{1}{x-4}} + 4 = 6$,

当且仅当 $x-4 = \frac{1}{x-4}$ 即 $x = 5$ 等号成立，

所以若 $x > 4$ 时， $y = x + \frac{1}{x-4}$ 有最小值为 6，无最大值.

故选：B.

(3) 消参法求最值

变式 11. (2023·安徽·泾县中学高一阶段练习) 设正实数 x 、 y 、 z 满足 $4x^2 - 3xy + y^2 - z = 0$ ，则 $\frac{xy}{z}$ 的最大值为 ()

- A. 0
B. 2
C. 1
D. 3

【答案】C

【解析】因为正实数 x 、 y 、 z 满足 $4x^2 - 3xy + y^2 - z = 0$ ，则 $z = 4x^2 - 3xy + y^2$ ，

$$\text{则 } \frac{xy}{z} = \frac{xy}{4x^2 - 3xy + y^2} = \frac{1}{\frac{4x}{y} + \frac{y}{x} - 3} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} - 3} = 1, \text{ 当且仅当 } y = 2x > 0 \text{ 时取等号.}$$

故 $\frac{xy}{z}$ 的最大值为 1.

故选：C.

变式 12. (2023·贵州遵义·高一期末) 负实数 x 、 y 满足 $x+y=-2$, 则 $x-\frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. 0 B. -1 C. $-\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】因为负实数 x 、 y 满足 $x+y=-2$, 则 $x=-2-y<0$, 可得 $-2<y<0$,

由基本不等式可得 $x-\frac{1}{y}=-2-y-\frac{1}{y}=-2+2\sqrt{(-y)\times\frac{1}{-y}}=0$,

当且仅当 $-y=-\frac{1}{y}$ ($y<0$) 时, 即当 $y=-1$ 时, 等号成立.

故 $x-\frac{1}{y}$ 的最小值为 0.

故选: A.

变式 13. (2023·全国·高一课时练习) 已知正实数 a , b 满足 $a+\frac{1}{b}=2$, 则 $2ab+\frac{1}{a}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. $\frac{9}{2}$ D. $2\sqrt{2}+1$

【答案】A

【解析】因为 $a+\frac{1}{b}=2$, 所以 $a=2-\frac{1}{b}>0$, 所以 $0<b<2$,

所以 $2ab+\frac{1}{a}=2\left(2-\frac{1}{b}\right)b+\frac{b}{2b-1}=2(2b-1)+\frac{b}{2b-1}$,

令 $2b-1=t$, 则 $b=\frac{t+1}{2}$, 且 $-1<t<3$,

所以 $2ab+\frac{1}{a}=2t+\frac{\frac{t+1}{2}}{t}=2t+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, 当且仅当 $2t=\frac{1}{2t}$, 即 $t=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{4}$, $a=\frac{2}{3}$ 时, 取等号,

所以 $2ab+\frac{1}{a}$ 的最小值是 $\frac{5}{2}$.

故选: A.

(4) 换元求最值

变式 14. (2023·全国·高三专题练习) 求下列函数的最小值

(1) $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ ($x>0$);

(2) $y=\frac{x^2+2x+6}{x-1}$ ($x>1$).

【解析】(1) $y=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1$

$\because x > 0, \therefore x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ (当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时取等号)

$\therefore y = \frac{x^2 + x + 1}{x} (x > 0)$ 的最小值为 3;

(2) 令 $t = x - 1 (t > 0)$, 则 $x = t + 1$,

$$\therefore y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1} = \frac{(t+1)^2 + 2(t+1) + 6}{t} = \frac{t^2 + 4t + 9}{t} = t + \frac{9}{t} + 4 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}} + 4 = 10$$

当且仅当 $t = \frac{9}{t}$ 即 $t=3$ 时取等号

$\therefore y$ 的最小值为 10

变式 15. (2023·上海·高一专题练习) 求下列函数的最小值

(1) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x} (x > 0)$;

(2) $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}} (x \in R)$;

(3) $y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1} (x > 1)$.

【解析】 (1) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$

$\because x > 0, \therefore x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$ (当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时取“=”)

即 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x} (x > 0)$ 的最小值为 3;

(2) 令 $t = \sqrt{x^2 + 4} (t \geq 2)$, 则 $y = t + \frac{1}{t} (t \geq 2)$ 在 $[2, +\infty)$ 是单增,

$\therefore$ 当 $t=2$ 时, y 取最小值 $y_{\min} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$;

即 y 的最小值为 $\frac{5}{2}$

(3) 令 $t = x - 1 (t > 0)$, 则 $y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1} (x > 1)$ 可化为:

$$y = t + \frac{9}{t} + 4 \geq 2\sqrt{t \times \frac{9}{t}} + 4 = 10$$

当且仅当 $t=3$ 时取“=”

即 y 的最小值为 10

变式 16. (2023·全国·高一单元测试) 若正数 a, b 满足 $2a + b = 1$, 则 $\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b}$ 的最小值是__.

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

【解析】 设 $u = 2 - 2a, v = 2 - b$ ，则 $a = \frac{2-u}{2}, b = 2 - v$ ，可得 $u + v = 3 (u, v > 0)$ ，

所以 $\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} = \frac{1-\frac{1}{2}u}{u} + \frac{2-v}{v} = \frac{1}{u} + \frac{2}{v} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}(u+v)\left(\frac{1}{u} + \frac{2}{v}\right) - \frac{3}{2}$
 $= \frac{1}{3}\left(3 + \frac{v}{u} + \frac{2u}{v}\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3}\left(3 + 2\sqrt{\frac{v}{u} \cdot \frac{2u}{v}}\right) - \frac{3}{2} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2},$

当且仅当 $v = 6 - 3\sqrt{2}, u = 3\sqrt{2} - 3$ 时，等号成立，取得最小值。

故答案为： $\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$ 。

(5) “1”的代换求最值

变式 17. (2023·高一校考课时练习) 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 2$ ，则 $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 5

【答案】 C

【解析】 由 $a > 0, b > 0, a + b = 2$ ，

$\therefore \frac{a+b}{2} = 1$ ，

$\therefore y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)$

$= \frac{5}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{2a}{b} \geq \frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{b}{2a} \cdot \frac{2a}{b}} = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$ (当且仅当 $b = 2a = \frac{4}{3}$ 时等号成立)，

故选： C

变式 18. (2023·河南·高一联考期中) 已知正实数 a, b 满足 $2a + b - 9ab = 0$ ，则 $a + 2b$ 的最小值为 ()

- A. 3 B. 1 C. 9 D. $\frac{1}{3}$

【答案】 B

【解析】 因为 $2a + b - 9ab = 0$ ，变形得 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 9$ 。

由题意 $a + 2b = \frac{(a+2b)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)}{9} = \frac{5 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b}}{9} \geq \frac{5 + 2\sqrt{4}}{9} = 1$ ，当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{2a}{b}$ ，即 $a = b = \frac{1}{3}$ 时，等号成立。

故选： B.

变式 19. (2023·吉林延边·高一统考期末) 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，则 $4a + 9b$ 的最小值是 ()

- A. 23 B. 26 C. 22 D. 25

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/727046011101010046>