

第四节、二次曲面

二次曲面的定义：

三元二次方程所表示的曲面称之。

相应地平面被称为**一次曲面**。

讨论二次曲面性状的**截痕法**：

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌。

以下用截痕法讨论几种特殊的二次曲面。

1. 椭球面

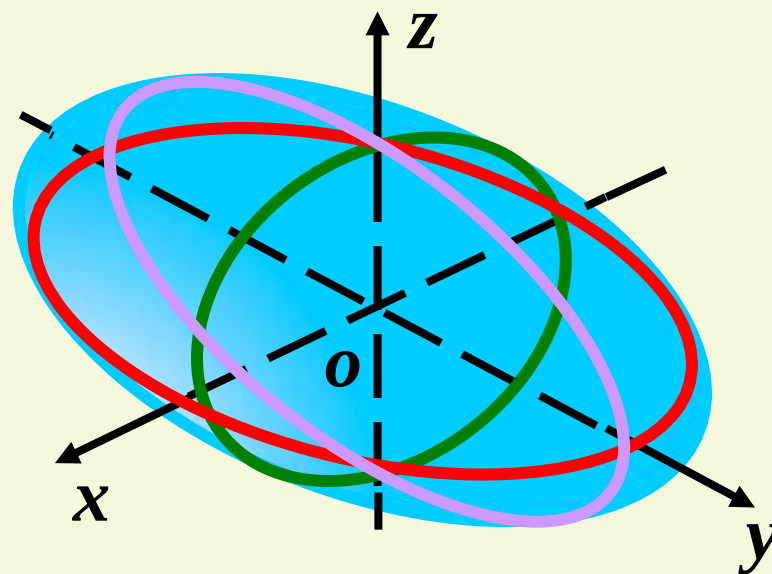
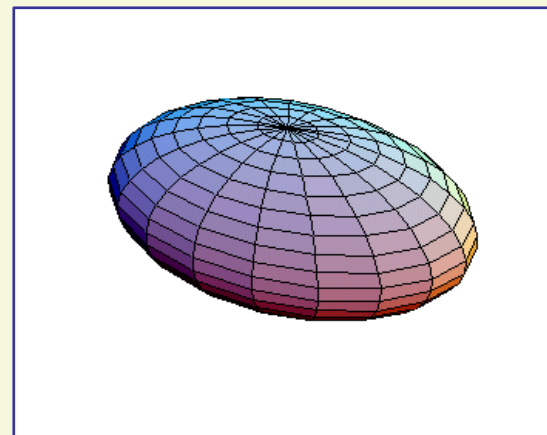
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

椭球面与
三个坐标面
的交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$



椭球面与平面 $z = z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ |z_1| < c \end{cases}$$

同理与平面 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 的交线也是椭圆.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

椭球面的几种特殊情况：

(1) $a = c$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 旋转椭球面

由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转而成.

方程可写为 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

旋转椭球面与椭球面的区别：

与平面 $z = z_1$ ($|z_1| < c$) 的交线为圆.

截面上圆的方程
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2). \\ |z = z_1 \end{cases}$$

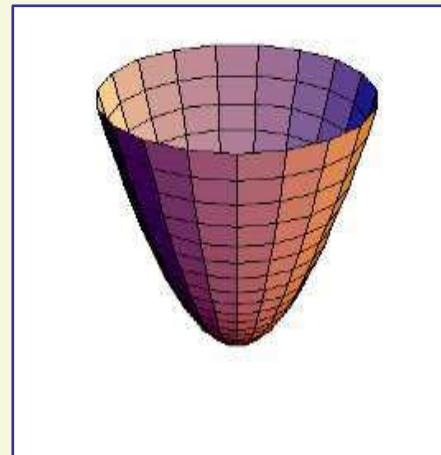
(2) a
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$
 球面

方程可写为
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

2. 抛物面

$$(I) \quad \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p \text{ 与 } q \text{ 同号})$$

椭圆抛物面



用截痕法讨论： 设 $p > 0$,

(1) 用坐标面 $xoy (z = 0)$ 与曲面相截

截得一点，即坐标原点 $O(0,0,0)$

原点也叫椭圆抛物面的**顶点**.



与平面 $z = z_1$ ($z_1 > 0$) 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2pz_1} + \frac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad \text{当 } z_1 \text{ 变动时, 这种椭圆的中心都在 } z \text{ 轴上.}$$

与平面 $z = z_1$ ($z_1 < 0$) 不相交.

(2) 用坐标面 xoz ($y = 0$) 与曲面相截

$$\text{截得抛物线} \quad \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

与平面 $y = y_1$ 的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p(z - y^2) \\ y \end{cases}$$

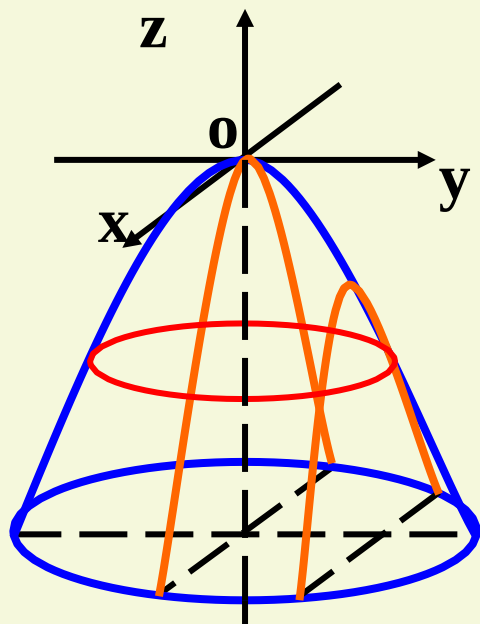
它的轴平行于 z 轴

顶点 $\left(0, y^2 \right)$

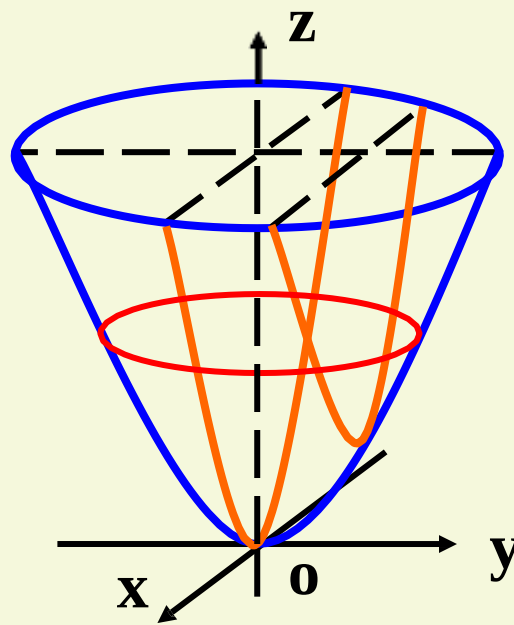
(3) 用坐标面 yoz (, $x = x_1$ 与曲面相截
均可得抛物线.

同理当 $p < 0, q < 0$ 时可类似讨论.

椭圆抛物面的图形如下：



$$p < 0, \quad q < 0$$



$$p > 0, \quad q > 0$$

特殊地：当 $p = q$ 时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z \quad (p > 0) \quad \text{旋转抛物面}$$

（由 xOz 面上的抛物线 $x^2 = 2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

与平面 $z = z_1$ ($z_1 > 0$) 的交线为圆.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2pz_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种圆的中心都在 z 轴上.

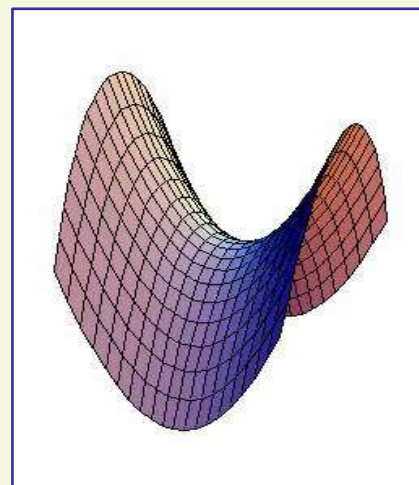
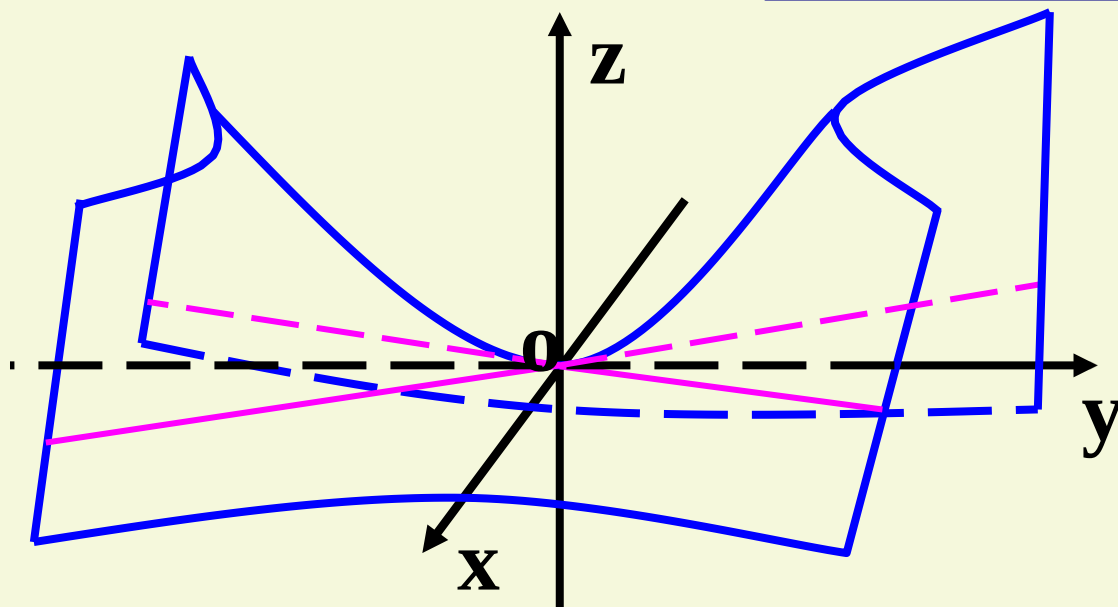
$$(II) \quad -\frac{x^2}{2} + y^2 \quad (p \text{ 与 } q \text{ 同号})$$

双曲抛物面（马鞍面）

用截痕法讨论：

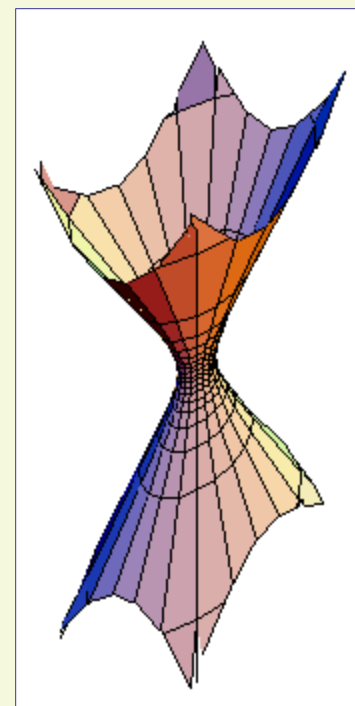
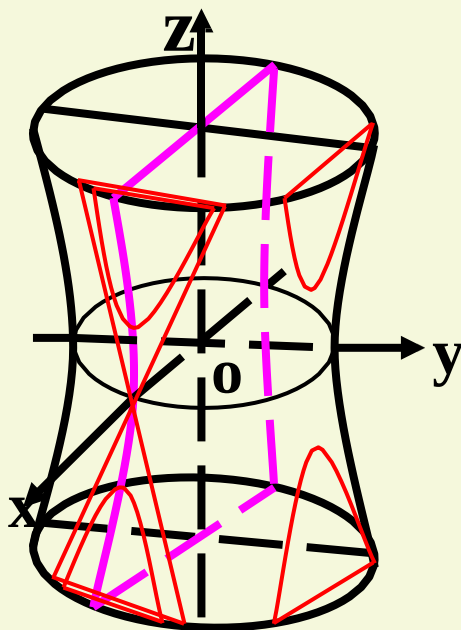
设 $p > 0$,

图形如下：



3. 双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{单叶双曲面}$$



$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

双叶双曲面

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/727161032013006046>