

新疆巴州焉耆县第三中学 2024 年数学试题高考模拟题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{(x-1)\pi}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 2f(x-2), & 3 < x \leq 100 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 的极大值点从小到大依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 并记相应的极大值为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ 的值为 ()

- A. $2^{50} + 2449$ B. $2^{50} + 2549$ C. $2^{49} + 2449$ D. $2^{49} + 2549$

2. 根据散点图, 对两个具有非线性关系的相关变量 x, y 进行回归分析, 设 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$, 利用最小二乘法, 得到线性回归方程为 $\hat{u} = -0.5v + 2$, 则变量 y 的最大值的估计值是 ()

- A. e B. e^2 C. $\ln 2$ D. $2\ln 2$

3. 已知向量 $\vec{a} = (-\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (3, \sqrt{3})$, 则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为 ()

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. -1 D. 1

4. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

5. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k

的星的亮度为 E_k ($k=1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

6. 某市政府决定派遣 8 名干部 (5 男 3 女) 分成两个小组, 到该市甲、乙两个县去检查扶贫工作, 若要求每组至少 3 人, 且女干部不能单独成组, 则不同的派遣方案共有 () 种

- A. 240 B. 320 C. 180 D. 120

7. 已知复数 z 满足 $z - \bar{z} = 0$, 且 $z \cdot \bar{z} = 9$, 则 $z =$ ()

- A. 3 B. $3i$ C. ± 3 D. $\pm 3i$

8. 已知 AM, BN 分别为圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 与 $O_2: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 的直径, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$ 的取值范围为 ()

- A. $[0, 8]$ B. $[0, 9]$ C. $[1, 8]$ D. $[1, 9]$

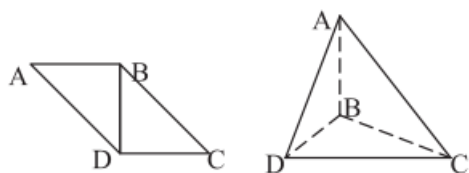
9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($A > 0, \omega > 0$)，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x = \frac{\pi}{6}$ ，则 ω 的最小值为

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，且当 n 为奇数时， $a_{n+2} - a_n = 2$ ；当 n 为偶数时， $a_{n+2} + 1 = 3(a_n + 1)$ 。则此数列的前 20 项的和为 ()

- A. $\frac{3^{11} - 3}{2} + 90$ B. $\frac{3^{11} - 3}{2} + 100$ C. $\frac{3^{12} - 3}{2} + 90$ D. $\frac{3^{12} - 3}{2} + 100$

11. 如图，将两个全等等腰直角三角形拼成一个平行四边形 $ABCD$ ，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ，则直线 AC 与 BD 所成角余弦值为 ()



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

12. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学，物理，化学，生物四科竞赛，其中甲不能参加生物竞赛，则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{a}{x} + 1, & x < 0 \\ 2\ln x - 6x, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 恰有四个不同的解，则实数 a 的取值范围是_____.

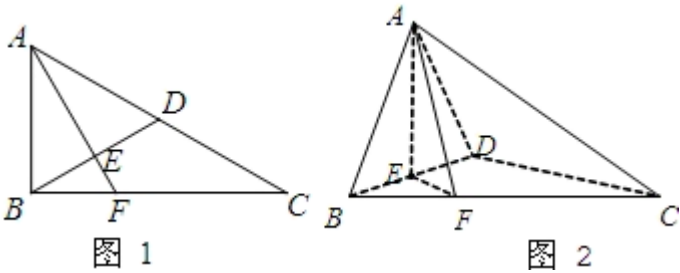
14. 将函数 $f(x) = a\sin x + b\cos x$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到一个偶函数图象，则 $\frac{b}{a} =$ _____.

15. 角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(1, 2)$ ，则 $\sin(\pi - \alpha)$ 的值是_____.

16. 设 O 为坐标原点, $A(2,1)$, 若点 $B(x,y)$ 满足 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的最大值是_____.

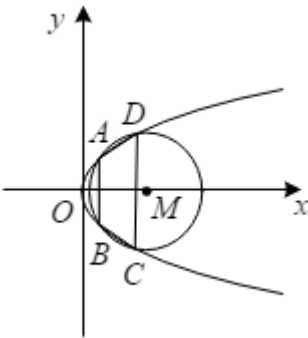
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知如图 1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=30^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$, D 为 AC 中点, $AE \perp BD$ 于 E , 延长 AE 交 BC 于 F , 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 如图 2 所示。



- (I) 求证: $AE \perp$ 平面 BCD ;
- (II) 求二面角 $A-DC-B$ 的余弦值;
- (III) 求三棱锥 $B-AEF$ 与四棱锥 $A-FEDC$ 的体积的比 (只需写出结果, 不要求过程).

18. (12 分) 如图, 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 与圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B, C, D 四个点,



- (1) 求 r 的取值范围;
- (2) 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S , 当 S 最大时, 求直线 AD 与直线 BC 的交点 P 的坐标.

19. (12 分) 在国家“大众创业, 万众创新”战略下, 某企业决定加大对某种产品的研发投入. 为了对新研发的产品进行合理定价, 将该产品按事先拟定的价格试销, 得到一组检测数据如表所示:

试销价格 x (元)	4	5	6	7	8	9
-----------------	---	---	---	---	---	---

产品销量 y (件)	89	83	82	79	74	67
-----------------	----	----	----	----	----	----

已知变量 x, y 且有线性负相关关系，现有甲、乙、丙三位同学通过计算求得回归直线方程分别为：甲 $\bar{y} = 4x + 53$ ；乙 $\bar{y} = -4x + 105$ ；丙 $\bar{y} = -4.6x + 104$ ，其中有且仅有一位同学的计算结果是正确的。

(1) 试判断谁的计算结果正确？

(2) 若由线性回归方程得到的估计数据与检测数据的误差不超过 1，则称该检测数据是“理想数据”，现从检测数据中随机抽取 3 个，求“理想数据”的个数为 2 的概率。

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$
，以原点 O 为极点，

x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$ 。

(1) 求曲线 C 的普通方程；

(2) 求曲线 l 和曲线 C 的公共点的极坐标。

21. (12 分) $\triangle ABC$ 中的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $\sqrt{5}b = 4c$ ， $B = 2C$ 。

(1) 求 $\cos B$ ；

(2) 若 $c = 5$ ，点 D 为边 BC 上一点，且 $BD = 6$ ，求 $\triangle ADC$ 的面积。

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 A ，直线 AF 与直线 $x + y - 3\sqrt{2} = 0$ 垂直，

垂足为 B ，且点 A 是线段 BF 的中点。

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 若 M, N 分别为椭圆 C 的左、右顶点， P 是椭圆 C 上位于第一象限的一点，直线 MP 与直线 $x = 4$ 交于点 Q ，且 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 9$ ，求点 P 的坐标。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

对此分段函数的第一部分进行求导分析可知，当 $x=2$ 时有极大值 $f(2)=1$ ，而后一部分是前一部分的定义域的循环，而值域则是每一次前面两个单位长度定义域的值域的 2 倍，故此得到极大值点 a_n 的通项公式 $a_n=2n$ ，且相应极大值 $b_n=2^{n-1}$ ，分组求和即得

【详解】

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 3 \text{ 时, } f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{2}\right),$$

$$\text{显然当 } x=2 \text{ 时有, } f'(x)=0,$$

∴经单调性分析知

$x=2$ 为 $f(x)$ 的第一个极值点

$$\text{又} \because 3 < x \leq 100 \text{ 时, } f(x) = 2f(x-2)$$

∴ $x=4, x=6, x=8, \dots$ ，均为其极值点

∴函数不能在端点处取得极值

$$\therefore a_n = 2n, \quad 1 \leq n \leq 49, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{对应极值 } b_n = 2^{n-1}, \quad 1 \leq n \leq 49, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{49} (a_i + b_i) = \frac{(2+98) \times 49}{2} + \frac{1 \times (1-2^{49})}{1-2} = 2^{49} + 2449$$

故选：C

【点睛】

本题考查基本函数极值的求解，从函数表达式中抽离出相应的等差数列和等比数列，最后分组求和，要求学生对数列和函数的熟悉程度高，为中档题

2、B

【解析】

将 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$ 代入线性回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ ，利用指数函数和二次函数的性质可得最大估计值.

【详解】

解：将 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$ 代入线性回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ 得：

$$\ln y = -0.5(x-4)^2 + 2, \quad \text{即 } y = e^{-0.5(x-4)^2 + 2},$$

当 $x=4$ 时， $-0.5(x-4)^2 + 2$ 取到最大值 2，

因为 $y = e^x$ 在 R 上单调递增，则 $y = e^{-0.5(x-4)^2+2}$ 取到最大值 e^2 .

故选：B.

【点睛】

本题考查了非线性相关的二次拟合问题，考查复合型指数函数的最值，是基础题.

3、A

【解析】

投影即为 $\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ ，利用数量积运算即可得到结论.

【详解】

设向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，

由题意，得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3} \times 3 + 1 \times \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ ， $|\vec{a}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ ，

所以，向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为 $\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

故选：A.

【点睛】

本题主要考察了向量的数量积运算，难度不大，属于基础题.

4、C

【解析】

分析：利用复数的除法运算法则：分子、分母同乘以分母的共轭复数，化简复数 z ，然后求解复数的模.

详解： $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} + 2i$

$= -i + 2i = i$ ，

则 $|z| = 1$ ，故选 c.

点睛：复数是高考中的必考知识，主要考查复数的概念及复数的运算. 要注意对实部、虚部的理解，掌握纯虚数、共轭复数这些重要概念，复数的运算主要考查除法运算，通过分母实数化转化为复数的乘法，运算时特别要注意多项式相乘后的化简，防止简单问题出错，造成不必要的失分.

5、A

【解析】

由题意得到关于 E_1, E_2 的等式，结合对数的运算法则可得亮度的比值.

【详解】

两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 令 $m_2 = -1.45, m_1 = -26.7$,

$$\lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{5} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{2}{5} (-1.45 + 26.7) = 10.1, \frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}.$$

故选 A.

【点睛】

本题以天文学问题为背景,考查考生的数学应用意识、信息处理能力、阅读理解能力以及指数对数运算.

6、C

【解析】

在所有两组至少都是3人的分组中减去3名女干部单独成一组的情况,再将这两组分配,利用分步乘法计数原理可得出结果.

【详解】

两组至少都是3人,则分组中两组的人数分别为3、5或4、4,

又因为3名女干部不能单独成一组,则不同的派遣方案种数为 $\left(C_8^3 + \frac{C_8^4}{A_2^2} - 1 \right) A_2^2 = 180$.

故选: C.

【点睛】

本题考查排列组合的综合问题,涉及分组分配问题,考查计算能力,属于中等题.

7、C

【解析】

设 $z = a + bi$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 利用 $z - \bar{z} = 0$ 和 $z \cdot \bar{z} = 9$ 求得 a, b 即可.

【详解】

设 $z = a + bi$, 则 $\bar{z} = a - bi$,

因为 $z - \bar{z} = 0$, 则 $(a + bi) - (a - bi) = 2bi = 0$, 所以 $b = 0$,

又 $z \cdot \bar{z} = 9$, 即 $a^2 = 9$, 所以 $a = \pm 3$,

所以 $z = \pm 3$,

故选: C

【点睛】

本题考查复数的乘法法则的应用,考查共轭复数的应用.

8、A

【解析】

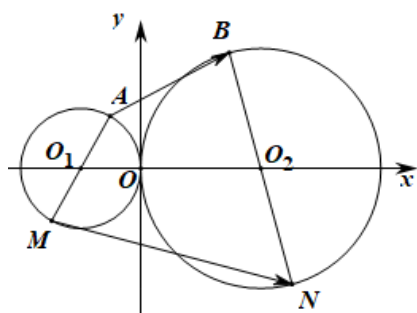
由题先画出基本图形，结合向量加法和点乘运算化简可得

$$\vec{AB} \cdot \vec{MN} = [\vec{O_1O_2} + (\vec{AO_1} + \vec{O_2B})] \cdot [\vec{O_1O_2} - (\vec{AO_1} + \vec{O_2B})] = 9 - |\vec{AO_1} + \vec{O_2B}|^2, \text{ 结合 } |\vec{AO_1} + \vec{O_2B}| \text{ 的范围即可求解}$$

【详解】

如图，

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{MN} &= (\vec{AO_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2B}) \cdot (\vec{MO_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2N}) = [\vec{O_1O_2} + (\vec{AO_1} + \vec{O_2B})] \cdot [\vec{O_1O_2} - (\vec{AO_1} + \vec{O_2B})] \\ &= |\vec{O_1O_2}|^2 - |\vec{AO_1} + \vec{O_2B}|^2 = 9 - |\vec{AO_1} + \vec{O_2B}|^2 \text{ 其中 } |\vec{AO_1} + \vec{O_2B}| \in [2-1, 2+1] = [1, 3], \text{ 所以} \\ \vec{AB} \cdot \vec{MN} &\in [9-3^2, 9-1^2] = [0, 8]. \end{aligned}$$



故选：A

【点睛】

本题考查向量的线性运算在几何中的应用，数形结合思想，属于中档题

9、C

【解析】

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3})$ 的图象，因为函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $\sin(\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \pm 1$ ，即 $\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\omega = \frac{5}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ ，又 $\omega > 0$ ，所以 ω 的最小值为 $\frac{5}{3}$ 。故选 C。

10、A

【解析】

根据分组求和法，利用等差数列的前 n 项和公式求出前 20 项的奇数项的和，利用等比数列的前 n 项和公式求出前 20 项的偶数项的和，进而可求解。

【详解】

当 n 为奇数时， $a_{n+2} - a_n = 2$ ，

则数列奇数项是以1为首项，以2为公差的等差数列，

当 n 为偶数时， $a_{n+2}+1=3(a_n+1)$ ，

则数列中每个偶数项加1是以3为首项，以3为公比的等比数列.

所以 $S_{20}=a_1+a_2+a_3+\text{L}+a_{20}=a_1+a_3+\text{L}+a_{19}+a_2+a_4+\text{L}+a_{20}$

$$=10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2 + (a_2+1) + (a_4+1) + \text{L} + (a_{20}+1) - 10$$

$$=100 + \frac{3(1-3^{10})}{1-3} - 10 = \frac{3^{11}-3}{2} + 90.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了数列分组求和、等差数列的前 n 项和公式、等比数列的前 n 项和公式，需熟记公式，属于基础题.

11、C

【解析】

利用建系，假设 AB 长度，表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ ，利用向量的夹角公式，可得结果.

【详解】

由平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ， $AB \perp BD$

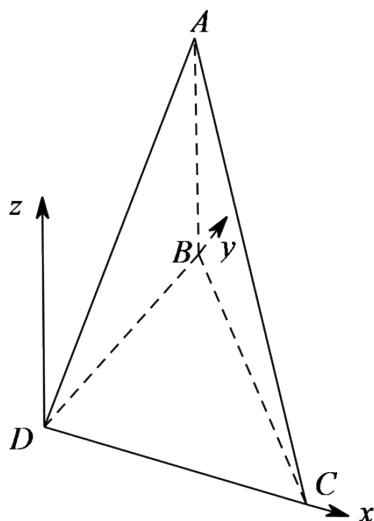
平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$ ， $AB \not\subset$ 平面 ABD

所以 $AB \perp$ 平面 BCD ，又 $DC \subset$ 平面 BCD

所以 $AB \perp DC$ ，又 $DB \perp DC$

所以作 z 轴 $\parallel AB$ ，建立空间直角坐标系 $B-xyz$

如图



设 $AB=1$ ，所以 $BD=1, DC=1, BC=\sqrt{2}$

则 $A(0,1,1), B(0,1,0), C(1,0,0), D(0,0,0)$

所以 $\vec{AC}=(1,-1,-1), \vec{BD}=(0,-1,0)$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AC}| |\vec{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选：C

【点睛】

本题考查异面直线所成角的余弦值，一般采用这两种方法：（1）将两条异面直线作辅助线放到同一个平面，然后利用解三角形知识求解；（2）建系，利用空间向量，属基础题.

12、D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外3场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外3场比赛时，共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案；②当甲学生不参加任何比赛时，共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方案.

综上所述，所有参赛方案有 $72+24=96$ 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13、 $(-2,0)$

【解析】

设 $g(x) = f(x) + f(-x)$ ，判断 $g(x)$ 为偶函数，考虑 $x > 0$ 时， $g(x)$ 的解析式和零点个数，利用导数分析函数的单调性，作函数大致图象，即可得到 a 的范围.

【详解】

$$\text{设 } g(x) = f(x) + f(-x),$$

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是偶函数，

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) = 2 \ln x - 6x + 3x^2 - \frac{a}{x} + 1,$$

$$\text{由 } g(x) = 0 \text{ 得 } a = 2x \ln x - 6x^2 + 3x^3 + x,$$

$$\text{记 } h(x) = 2x \ln x - 6x^2 + 3x^3 + x,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/728006030134007003>